प्रगति-5

2018-2019

गणित

कक्षा- VII

बिक्री के लिए नहीं

स्वाध्यायान्मा प्रमदः

राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद् दिल्ली

सौजन्य से :

दिल्ली पुस्तक ब्यूरो

GNCT OF DELHI

शिक्षा निदेशालय
रा.रा.क्षे., दिल्ली सरकार

जून, 2018

1,80,000 प्रतियाँ

उत्पादन मंडल

अनिल कुमार शर्मा
दीपक तंवर

दिल्ली पाठ्य पुस्तक ब्यूरो में अनिल कौशल, सचिव, दिल्ली पाठ्य पुस्तक ब्यूरो, 25/2, पंखा रोड, संस्थानीय क्षेत्र, नई दिल्ली द्वारा प्रकाशित तथा मैसर्स अरिहन्त ऑफसैट, नई दिल्ली द्वारा मुद्रित।

आमुख

शिक्षा निदेशालय, दिल्ली द्वारा चलाए गए मिशन बुनियाद के दौरान अध्यापकों तथा अभिभावकों द्वारा बच्चों की बुनियादी गणितीय अवधारणाओं की नींव मज़बूत की गई है। इस मिशन के दौरान बच्चों की गणितीय अवधारणाओं की समझ विकसित करने के लिए प्रतिदिन अध्यापकों द्वारा गणित संबंधित बातचीत, संख्या संबंधित गतिविधियाँ, शाब्दिक सवालों पर बातचीत एवं औपचारिक रूप से गणितीय संक्रियाएँ तथा अन्य दक्षताओं जैसे– मापन और अनुमान, आकृतियों से परिचय, और बराबर भागों में बाँटना आदि पर कार्य किया गया।

हम आशा करते हैं कि हमारे नव निष्ठा एवं निष्ठा समूहों के बच्चे चार अंकों तक की संख्याओं पर संक्रियाएँ करना सीख चुके हैं। वे निश्चय ही द्विविमीय आकृतियों, आँकड़ों, मुद्रा, परिमाप आदि के बारे में अपनी समझ बनाने में कामयाब हुए होंगे।

बातचीत करने पर वे हमें बता पाएँगे कि विद्यालय, बाज़ार, गाँव, मेला, परिवार इत्यादि में हमें गणित कहाँ–कहाँ नज़र आता है। अब गणितीय अवधारणाओं पर बातचीत करते हुए वे झिझकेंगे नहीं, आत्मविश्वास के साथ बोल सकेंगे। और हम उनकी तर्क–वितर्क की क्षमता को बढ़ाने में उनका सहयोग कर पाएँगे। गणित की साधारण संक्रियाएँ जैसे जोड़, घटा, गुणा और भाग में कठिनाई महसूस नहीं करेंगे।

'कमाल' (Combined Activities for Maximized Learning) तकनीक का प्रयोग मिशन बुनियाद के दौरान बच्चों की आधारभूत क्षमताओं जैसे सुनना, बोलना, पढ़ना, करना और लिखना आदि को मज़बूती देने के लिए किया गया। इससे बच्चों में जो क्षमता विकसित हुई, उससे उनकी कक्षा में भागीदारी बढ़ेगी अर्थात जो वो सुनेंगे, उसके बारे में बोल सकेंगे, जो बोलेंगे उसे खुद कर पाएँगे, जो करेंगे उसे लिख पाएँगे, जो लिखेंगे उसे पढ़ पाएँगे– इन सभी क्रियाओं के क्रम में वे बदलाव भी कर पाएँगे।

'कमाल' के अंतर्गत हम आसान से मुश्किल, मूर्त से अमूर्त, सरल से जटिल और परिचित से अपरिचित की तरफ अग्रसर होते हैं। लगभग यही अवधारणा प्रगति–5 में प्रयोग की गई है। ताकि हम बच्चों की योग्यता पर विश्वास रखते हुए उन्हें स्वयं सीखने का आनंद लेने देंगे।

प्रगति–3 एवं प्रगति–4 की मुख्य सामग्री (Content) को एक ही पुस्तक में समाहित करके प्रगति–5 के रूप में प्रस्तुत किया गया है।

कक्षा VI की प्रगति–5 में कुछ अध्यायों को शामिल नहीं किया गया है, जैसे– सममिति (अध्याय–13) तथा अनुपात एवं समानुपात (अध्याय–12)। इस कक्षा में बच्चों को बहुत सारी गणितीय धारणाएँ एवं शब्दावली याद करनी पड़ती हैं, इसलिए पाठ्यक्रम को कम करने के लिए उपरोक्त दोनों अध्यायों की मूल अवधारणा (basic concepts) कक्षा VII के अध्याय–8 तथा अध्याय–14 में सम्मलित की गई है।

कक्षा VII के सरल समीकरण (अध्याय–4) की मूल अवधारणा को कक्षा VIII के सरल समीकरण के साथ मिला दिया गया है। इसी प्रकार परिमेय संख्याओं (अध्याय–9) को भी कक्षा VII की प्रगति–5 में शामिल नहीं किया गया है। इस अध्याय को कक्षा VIII के अध्याय परिमेय संख्याओं में शामिल कर दिया गया है।

कक्षा VIII में भी कुछ अध्यायों जैसे राशियों की तुलना (अध्याय–8) तथा गुणनखंड (अध्याय–14) आदि को प्रगति–5 में शामिल नहीं किया गया है। यदि अध्यापक/अध्यापिका अध्यायों को पढ़ाना चाहते हैं तो NCERT से यह अध्याय पढ़ाए जा सकते हैं।

गणित में 'रोल प्ले' का इस्तेमाल करते हुए प्रगति के कई अध्यायों में 'रोल प्ले' दिए गए हैं। किसी भी विषय या प्रसंग को शुरू करने से पहले उसके बारे में संक्षिप्त नाट्य प्रस्तुति हम सबको बाँधती है और इससे विषय पर आना और उसके बारे में अवधारणा को स्पष्ट करना अपेक्षाकृत आसान हो जाता है एवं वह बच्चों के साथ सीधे–सीधे भी जुड़ता है। इस तरह गणित शिक्षण में 'थियेटर इन एजुकेशन' की शिक्षण रणनीति को अच्छे से अपनाया जाय तो गणित शिक्षण को और रुचिकर बनाया जा सकता है। इसके चलते गणित के प्रति छात्रों के अंदर की तमाम भ्रांतियों को तोड़ा जा सकता है कि गणित मुश्किल है, उबाऊ है, डराऊ है–आदि। 'रोल प्ले' उसी का एक अंग है। प्रगति में दिए गए 'रोल प्ले' को बच्चों के साथ मिलकर खेला जाना चाहिए। अगर इन सभी गतिविधियों में शिक्षक की सक्रिय भागीदारी संभव हो पाए तो बेहतर होगा।

हम सभी शिक्षक अगर सुझाए गए 'रोल प्ले' का इस्तेमाल ही करें, ये ज़रूरी नहीं है। इसके लिए शिक्षक को संपूर्ण स्वायत्तता है कि वह अपने अनुसार काम करे। इसके अंदर इंप्रोवाइज़ेशन की पूरी छूट है, बशर्ते ये इंप्रोवाइज़ेशन शिक्षक की देख–रेख में हों। इंप्रोवाइज़ेशन में हम बच्चों को खेलने के लिए कोई स्थिति देते हैं, जिसे बच्चे अपने अनुभव और आपके निर्देशन के अनुसार खेलते हैं। ये स्थितियाँ छात्रों की रोज़मर्रा की ज़िंदगी से जुड़ी हों तो बेहतर है। हमारी कोशिश हो कि कक्षा के ज़्यादातर बच्चों को इसमें शरीक़ कर पाएँ। उनकी सहभागिता पूरी गतिविधि को जीवंत बना देगी। इसके लिए हम कक्षा के छात्रों के चार से पांच ग्रुप बना सकते हैं। सभी ग्रुप 'रोल प्ले' को अपने–अपने हिसाब से खेलेंगे। हां, इस बात का ध्यान रहे कि जब एक ग्रुप अपनी प्रस्तुति दे रहा हो तो बाकी सभी ग्रुप उस प्रस्तुति को ध्यान से देखें। उसके बारे में जो भी उनकी राय बने, उसे कापी के अंदर नोट कर लें ताकि प्रस्तुतियों के बाद जब सभी प्रस्तुतियों की मूल्यांकन प्रक्रिया की जाए तो उन राय और सुझावों को सबके सामने रखा जाए। सुधार की हर संभावना का स्वागत किया जाए।

प्रगति पर आपके सुझाव निश्चय ही अगले अंकों को बेहतर बनाने में सहयोग देंगे।

Editorial Team

Reviewed by :

Dr. Anil Teotia, Principal, DIET Dilshad Garden.

Editorial Group of Mentor Teachers :

Dr. Ashok Kumar Tiwari (19900432), SBV C. C. Colony

Mr. Rakesh Gujral (20050846), GSBV Ramesh Nagar

Dr. Sushma Singh (19930796), SKV Pooth Kala, Sector-20, Rohini Extn

Ms. Sunila Bhatia (19930502), VSSKV No. 1, Kalkaji

Mr. Devender Kumar Juneja (19875169), GBSSS No. 1, Shakti Nagar

Mr. Mukesh Jain (20102389), GBSSS No. 1, Punjabi Bagh

Ms. Neeta Rani (20130835), S Co.Ed. Mangolpuri, C-Block

Ms. Preeti Nanda (19960587), SV, Sector-6, Rohini

Ms. Punam Sardana (20036698), RPVV, BT Block, Shalimar Bagh

Mr. Rajeev Ratan (19910068), RSBV No.4, Roop Nagar

Ms. Shalini Bahri (20111699), SKV No. 1, Narela

Ms. Vandana Arora (20050187), GGSSS No.3, Badarpur

Ms. Vilakshna (20081060), SKV Sector-20, Rohini Extn

Ms. Vinod Bala (20072429), GGSSS, Sec-3, Dwarka

Ms. Jaspal Kaur (20100095), SKV Prahladpur

Ms. Amita Sharma (BRP), SSA

Ms. Alpna Chaterjee (BRP), SSA

विषयसूची

1st Term

2nd Term

अध्याय – 1 पूर्णांक

वर्कशीट 1.1

1. मेरे पास कौन सा संख्या समूह है, लिखिए- (प्राकृत संख्याएँ / पूर्ण संख्याएँ / पूर्णांक)

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6 ____________

2. 11, 12, 13 0, 1, 2 ____________

3. 75, 76 1, 11, 5 ____________

4. 101, 102 14, 25, 0 ____________

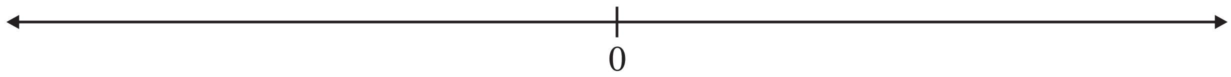
1. 4, 5, 6, 17, 35, 45 ____________

2. 14, 15, 17 90, 105, 106 ____________

3. -14, -15, 0 1, 2, 3 ____________

4. 105, 0 156, -150, 11 ____________

2. पूर्णांकों को नीचे दी गई संख्या रेखा पर दर्शाइए।



3. निम्न कथनों को पूर्णांक के रूप में लिखिए।

	कथन	पूर्णांक
a)	समुद्र तल से 100 मीटर नीचे	-100
b)	0°C से 25°C ऊपर तापमान	
c)	0°C से 5°C नीचे तापमान	
d)	महेन्द्र को 5 रुपये का नुकसान हुआ	
e)	सीताराम ने 20 रुपये कमाए	
f)	मोहन ने बैंक खाते में से 10,000 रुपये निकाले	
g)	हवाई जहाज की समुद्र तल से ऊंचाई 2000 मीटर	

4. नीचे दिए पैटर्न को पूरा कीजिए।

i)	10,	5,	0,	______,	______	______
ii)	–3,	–6,	–9,	______,	______	______
iii)	–16,	–12,	–8	______,	______	______
iv)	–5,	–3,	–1,	______,	______	______

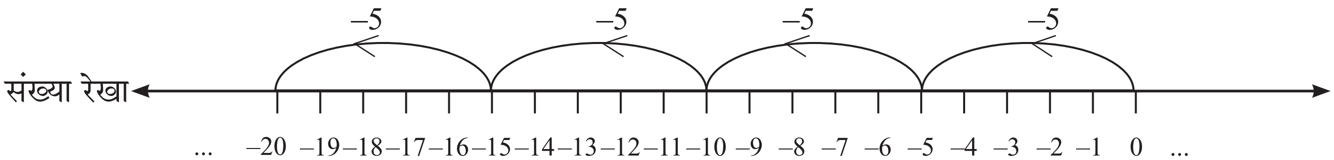
वर्कशीट 1.2

पूर्णांकों का गुणन

उदाहरण :

$\underbrace{5 \quad +5 \quad +5 \quad +5}$ = 4×5 = 20 **गुणन ⇒ समान संख्या का बार-बार योग।**

$(-5) + (-5) + (-5) + (-5)$ = $4 \times (-5)$ = -20 **धनात्मक पूर्णांक × ऋणात्मक पूर्णांक**



1. रिक्त स्थान भरिए तथा संख्याओं के गुणन को संख्या रेखा पर दिखाइए।

(क) $(-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) =$ ______ $\times$ ______ = ______

(ख) $(-4) + (-4) + (-4) + (-4) =$ ______ $\times$ ______ = ______

(ग) $(-1) + (-1) = 2 \times$ ______ = ______

2. रिक्त स्थान भरिए।

धनात्मक पूर्णांक × ऋणात्मक पूर्णांक = ______________________ (धनात्मक पूर्णांक/ऋणात्मक पूर्णांक)

गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(1) $2 \times (-3)$ = ________ (2) $5 \times (-7)$ = ________ (3) $1 \times (-1)$ = ________

(4) $6 \times (-5)$ = ________ (5) $3 \times (-9)$ = ________ (6) $(6) \times (-1)$ = ________

ऋणात्मक पूर्णांक × धनात्मक पूर्णांक

3. पैटर्न देखते हुए रिक्त स्थान भरिए।

$3 \times 5 = 15$
$2 \times 5 = 10$
$1 \times 5 = \_\_\_$
$0 \times 5 = \_\_\_$
$-1 \times 5 = \_\_\_$
$-2 \times 5 = \_\_\_$
-3×5

ऋणात्मक पूर्णांक × धनात्मक पूर्णांक = ____________ (ऋणात्मक पूर्णांक/धनात्मक पूर्णांक)

रिक्त स्थान भरिए

(1) $-4 \times 2 =$ ________ (2) $-5 \times 3 =$ ________ (3) $-1 \times 1 =$ ________

(4) $-2 \times 7 =$ ________ (5) $-1 \times 9 =$ ________ (6) $-1 \times 10 =$ ________

ऋणात्मक पूर्णांक × ऋणात्मक पूर्णांक

4. पैटर्न देखते हुए रिक्त स्थान भरिए।

$-3 \times 4 = -12$
$-3 \times 3 = -9$
$-3 \times 2 = -6$
$-3 \times 1 = \_\_\_$
$-3 \times 0 = \_\_\_$
$-3 \times (-1) = \_\_\_$
$-3 \times (-2) = \_\_\_$
$-3 \times (-3) = \_\_\_$

ऋणात्मक पूर्णांक × ऋणात्मक पूर्णांक = ____________ (ऋणात्मक पूर्णांक/धनात्मक पूर्णांक)

रिक्त स्थान भरिए

(1) $-2 \times (-4) =$ ________ (2) $-4 \times (-3) =$ ________ (3) $-1 \times (-1) =$ ________

(4) $-5 \times (-1) =$ ________ (5) $-6 \times (-5) =$ ________ (6) $-1 \times (-10) =$ ________

वर्कशीट 1.3

पूर्णांकों का विभाजन

$8 \times 5 = 40$	और	$40 \div 8 = 5$,	या	$40 \div 5 = 8$
$4 \times 3 = 12$	और	$12 \div 4 = 3$,	या	$12 \div 3 = 4$

उदाहरण को देखकर खाली स्थान भरिए।

उदाहरण-

$(-12) \div 2 = (-6)$,	या	$(-12) \div (-6) = 2$
$(-20) \div (-4) = (5)$,	या	$(-20) \div 5 = (-4)$
$21 \div (-3) =$ ____,	या	$21 \div (-7) =$ ____
$72 \div (-8) =$ ____,	या	$72 \div$ ____ $= (-8)$
____________________,	या	____________________,
____________________,	या	____________________,

कथनों को समझकर उत्तर दीजिए।

ऋणात्मक पूर्णांक ÷ धनात्मक पूर्णांक = ____________________

ऋणात्मक पूर्णांक ÷ ऋणात्मक पूर्णांक = ____________________

धनात्मक पूर्णांक ÷ धनात्मक पूर्णांक = ____________________

रिक्त स्थान भरिए।

(a)	$(-15) \div (-5) =$ ________	(b)	$50 \div (-10) =$ ________
(c)	$(-30) \div 3 =$ ________	(d)	$(-18) \div (-9) =$ ________
(e)	$-20 \div 4 =$ ________	(f)	$-24 \div (-4) =$ ________

वर्कशीट 1.4

संवृत (Closed)

शाब्दिक अर्थ ⇒ संवृत - समान वृत में

दो संख्याओं पर होने वाली संक्रिया से प्राप्त संख्या का भी उसी समूह में होना ही संवृत कहलाता है।

पूर्णांकों का योग संवृत कहलाएगा, जब

किन्हीं भी दो पूर्णांकों को जोड़ने पर प्राप्त योग भी पूर्णांक होगा

तालिका को पूरा कीजिए

	पूर्णांक संख्या	+	पूर्णांक संख्या	=	प्राप्त योग	पूर्णांक है/पूर्णांक नहीं है
a)	–4	+	7	=	3	पूर्णांक है।
b)	–10	+	–3	=	–13	पूर्णांक है।
c)	______	+	0	=	__________	__________
d)	______	+	______	=	__________	__________
e)	______	+	______	=	__________	__________

रिक्त स्थान भरिए

निष्कर्ष: किन्हीं भी दो पूर्णांक का योग सदैव ही एक **पूर्णांक** होता है।
पूर्णांक, योग के अंतर्गत ____________________ होते हैं। **(संवृत / पूर्णांक)**

पूर्णांकों के लिए घटाव (व्यवकलन) के लिए संवृत नियम की जांच

किन्हीं भी दो पूर्णांकों को घटाने पर प्राप्त संख्या भी पूर्णांक होगी।

तालिका को पूरा कीजिए तथा जाँचिए

	पूर्णांक संख्या	–	पूर्णांक संख्या	=	परिणाम	पूर्णांक है/पूर्णांक नहीं है
a)	4	–	5	=	–1	**एक पूर्णांक है।**
b)	–5	–	–8	=	+3	**एक पूर्णांक है।**
c)	______	–	0	=	__________	__________
d)	______	–	______	=	__________	__________
e)	______	–	______	=	__________	__________

रिक्त स्थान भरिए

निष्कर्ष: किन्हीं भी दो पूर्णांकों का घटाव सदैव ही एक **पूर्णांक** होता है।
पूर्णांक, घटाव के अंतर्गत ______________________ होते हैं। **(संवृत / पूर्णांक)**

पूर्णांकों के लिए गुणन के लिए संवृत नियम की जांच

किन्हीं भी दो पूर्णांकों को गुणा करने पर प्राप्त संख्या भी पूर्णांक होगी।

तालिका को पूरा कीजिए

	पूर्णांक संख्या	×	पूर्णांक संख्या	=	गुणनफल	पूर्णांक है/पूर्णांक नहीं है
a)	4	×	–3	=	–12	एक पूर्णांक है।
b)	–5	×	–2	=	10	एक पूर्णांक है।
c)	_____	×	0	=	_________	_________
d)	_____	×	_____	=	_________	_________
e)	_____	×	_____	=	_________	_________

रिक्त स्थान भरिए

निष्कर्षः किन्हीं भी दो पूर्णांकों का गुणनफल सदैव ही एक ______**पूर्णांक**______ होता है।
पूर्णांक, गुणन के अंतर्गत ______________________ होते हैं। **(संवृत / पूर्णांक)**

पूर्णांकों के लिए भाग के लिए संवृत नियम की जांच

किन्हीं भी दो पूर्णांकों को भाग करने पर
प्राप्त संख्या भी पूर्णांक होगी।

तालिका को पूरा कीजिए

	पूर्णांक	÷	पूर्णांक	=	भागफल	पूर्णांक है/पूर्णांक नहीं है
a)	– 4	÷	– 2	=	2	एक पूर्णांक है।
b)	3	÷	2	=	$\frac{3}{2}$	एक पूर्णांक नहीं है।
c)	_____	÷	_____	=	_________	_________
d)	_____	÷	_____	=	_________	_________
e)	2	÷	0	=	_________	(क्या यह संभव है?)

★ उपरोक्त उदाहरण (e) पर अपनी कक्षा में चर्चा करें।

★ 2 ÷ 0 , परिभाषित नहीं है। 2 को 0 से भाग नहीं किया जा सकता है।

रिक्त स्थान भरिए

निष्कर्ष: किन्ही भी दो पूर्णांकों का भागफल सदैव ही एक पूर्णांक ___________ होता है।
पूर्णांक, भाग के अंतर्गत **संवृत नहीं** होते हैं। **(होता / नहीं होता)**

वर्कशीट 1.5

क्रमविनिमेय गुण (Commutative law)

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें :-

(I)

6 + 3 = 3 + 6 = 9

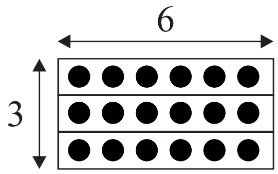
(II)

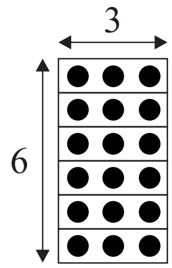
_____ + _____ = _____ + _____ = _____

(III)

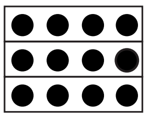
_____ + _____ = _____ + _____ = _____

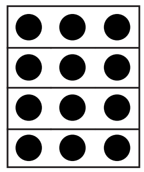
क्रम बदलकर, योग करने पर भी योगफल ____________ (समान/असमान) रहता है।

(I) 

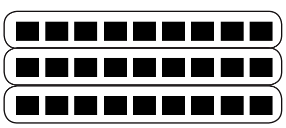


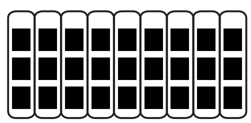
3×6 = 6×3 = 18

(II) 



_____ × _____ = _____ × _____ = _____

(III) 



_____ × _____ = _____ × _____ = _____

क्रमविनिमेयता में क्रम बदलकर गुणन करने पर भी गुणनफल ______________ (समान/असमान)रहता है।

क्रमविनिमेय गुण (Commutative law)

क्रमविनिमेय = क्रम + विनिमेय

किन्ही भी दो पूर्णांकों का क्रम बदलकर योग करने पर भी उनका योगफल समान रहता है।

कोई भी दो पूर्णांकों लिखिए	जोड़ कीजिए	क्रम बदलकर जोड़ कीजिए	परिणाम
a) –5 , 4	–5 + 4 = –1	4 + (–5) = –1	योगफल समान है
b) –3 , –7	–3 + (–7) = ____	(–7) + (–3) = –10	योगफल समान है
c) _____ , _____	___ + ___ = ____	___ + ___ = ____	_________
d) _____ , _____	___ + ___ = ____	___ + ___ = ____	_________

रिक्त स्थान भरिए

निष्कर्ष: किन्हीं भी दो पूर्णांकों का क्रम बदलकर योग करने पर उनका योगफल सदैव **समान** रहता है। योग पूर्णांकों के लिए ______________ होता है। **(समान, क्रमविनिमेय)**

रिक्त स्थान भरिए।

i) (–4) + 3 = 3 + ___ ii) 8 + (–5) = ___ + 8

iii) ___ + 9 = ___ + (–4) iv) –1 + ___ = 7 + ___

पूर्णांकों के लिए घटाव के अंतर्गत क्रमविनिमेयता की जाँच

यदि किन्हीं भी दो पूर्णांकों का क्रम बदलकर घटा करने पर उसका हल समान हो

करके देखिए-

कोई भी दो पूर्णांक लिखिए	घटाव कीजिए	क्रम बदलकर घटाव कीजिए	परिणाम
a) –2 , 4	–2 – 4 = –6	4 – (–2) = 6	समान नहीं
b) –3 , –7	–3 – (–7) = 4	–7 – (–3) = –4	समान नहीं
c) ______ , ______	___ – ___ = ______	___ – ___ = ______	__________
d) ______ , ______	___ – ___ = ______	___ – ___ = ______	__________

रिक्त स्थान भरिए

निष्कर्ष: किन्हीं भी दो पूर्णांकों का क्रम बदलकर घटाव करने पर उनका हल **समान** नहीं रहता है।
घटाव (व्यकलन) पूर्णांकों, के लिए ________________________ नहीं है। **(समान, क्रमविनिमेय)**

पूर्णांकों के गुणा तथा भाग के लिए क्रमविनिमेयता की जाँच

किन्हीं भी दो पूर्णांकों का क्रम बदलकर गुणा करने पर गुणनफल समान रहता है।

कोई भी दो पूर्णांक लिखिए			गुणन कीजिए	क्रम बदलकर गुणन कीजिए	परिणाम
a)	4	-2	$4 \times (-2) = -8$	$(-2) \times 4 = -8$	समान गुणनफल
b)	-3	-1	$(-3) \times (-1) = 3$	$(-1) \times (-3) = 3$	समान गुणनफल
c)	______	______	___ × ___ = ____	___ × ___ = _____	_________
d)	______	______	___ × ___ = ____	___ × ___ = _____	_________

रिक्त स्थान भरिए

निष्कर्ष: किन्ही भी दो पूर्णांकों का क्रम बदलकर गुणन करने पर उनका गुणनफल सदैव **समान** रहता है। पूर्णांक, गुणन के अंतर्गत ______________________ होते हैं। **(समान, क्रमविनिमेय)**

हल कीजिए।

a) $(-3) \times 4 =$ ___ $\times -3$

b) $2 \times$ ___ $= -1 \times 2$

c) $-9 \times -7 =$ ___ $\times -9$

d) ___ $\times 6 = 6 \times -4$

कोई भी दो पूर्णांक लिखिए			भाग कीजिए	क्रम बदलकर भाग कीजिए	परिणाम
a)	-4	-3	$-4 \div 3 = \frac{-4}{3}$	$3 \div (-4) = \frac{3}{-4}$	समान नहीं
b)	___	___	___ ÷ ___ = ___	___ ÷ ___ = ___	_________
c)	___	___	___ ÷ ___ = ___	___ ÷ ___ = ___	_________

रिक्त स्थान भरिए

निष्कर्ष: किन्हीं भी दो पूर्णांकों का क्रम बदलकर भाग करने पर उनका भागफल सदैव **समान** नहीं रहता है। पूर्णांकों के लिए भाग ______________________ नहीं है। **(समान, क्रमविनिमेय)**

वर्कशीट 1.6

योज्य तत्समक (Additive Identity)

वह संख्या जिसको किसी भी पूर्णांक में जमा करने पर परिणाम में कोई परिवर्तन (बदलाव) न आए।

रिक्त स्थान भरिए।

a) $-3 + \_\_\_ = -3$ b) $\_\_\_ + (-50) = -50$

c) $10 + \_\_\_ = 10$ d) $\_\_\_ + 75 = 75$

e) $\_\_ + 0 = 10$ f) $a + 0 = \_\_\_$

निम्न रिक्त स्थान भरिए।

निष्कर्ष: किसी भी पूर्णांक में ____शून्य____ को जोड़ने पर उसके मान में कोई भी परिवर्तन (बदलाव) नहीं आता है। योग के अंतर्गत पूर्णांक __________ योज्य तत्समक है। (0, 1)

गुणात्मक तत्समक (Multiplicative Identity)

वह संख्या जिससे किसी भी पूर्णांक को गुणा करने पर परिणाम में कोई परिवर्तन (बदलाव) न आए।

निम्नलिखित में रिक्त स्थान भरिए।

a) $-3 \times \_\_\_ = -3$ b) $\_\_\_ \times (-50) = -50$

c) $10 \times \_\_\_ = 10$ d) $\_\_\_ \times 75 = 75$

e) $\_\_ \times 1 = \_\_\_$ f) $a \times 1 = \_\_\_$

निम्न रिक्त स्थान भरिए।

निष्कर्ष: सभी पूर्णांकों को_____1_____से गुणा करने पर उनके मान में कोई भी परिवर्तन (बदलाव) नहीं आता है। पूर्णांकों के लिए गुणन के अंतर्गत________________तत्समक है। (1, 0)

साहचर्य गुण (Associative law)

साहचर्य : साथ रहने/निर्वाह करने वाले

तीन पूर्णांकों का युग्म बदलकर जमा करने पर भी हल एक समान रहता है। यह साहचर्य गुण कहलाता है।

कोई भी तीन पूर्णांक लीजिए	पूर्णांकों का योग, अलग-अलग युग्म बनाकर			निष्कर्ष
a) –3 , –2 , 1	[–3 + (–2)] + 1	= –5 + 1	= –4	**समान हल।**
	–3 + [(–2) + 1]	= –3 + (–1)	= –4	
b) 4 , –5 , 7	[4 + (–5)] + 7	= –1 + 7	= 6	**समान हल।**
	4 + [(–5) + 7]	= 4 + 2	= 6	
c) ____ , ____ , ____	[____] + __	= __ + __	= __	
	____ + [__]	= __ + __	= ____	________
d) ____ , ____ , ____	[____] + __	= __ + __	= __	
	____ + [__]	= __ + __	= ____	________

रिक्त स्थान भरिए।

निष्कर्षः पूर्णांकों के लिए योग ______**साहचर्य**______ होता है।

रिक्त स्थान भरिए।

i) $(-4 + 2) + 1 = \_\_\_ + (2 + 1)$

ii) $-3 + (2 + 5) = (\_\_\_ + \_\_\_) + 5$

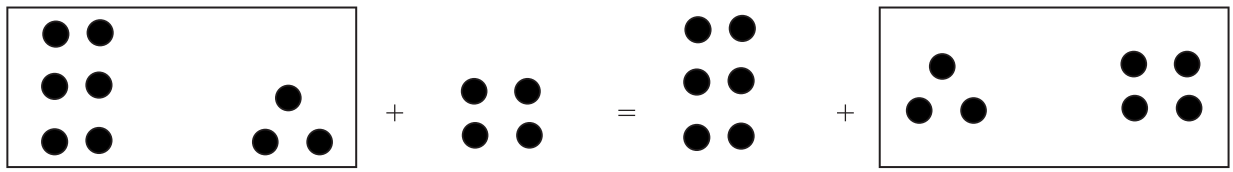
iii) $(a + b) + c = a + (\_\_\_ + \_\_\_)$

iv) $(p + q) + \_\_ = (\_\_\_ + \_\_\_) + \delta p$

वर्कशीट 1.7

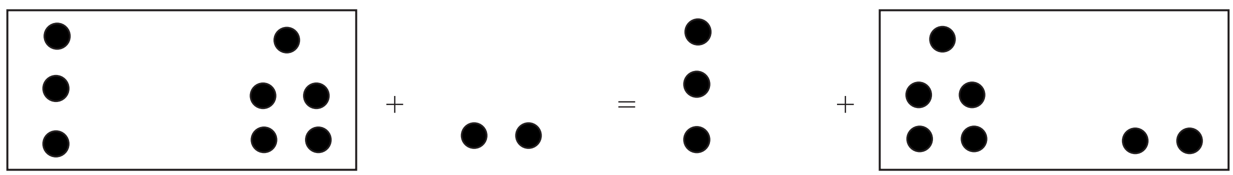
साहचर्य गुण (Associative law)

(I)



(6 + 3) + 4 = 6 + (3 + 4) = 13

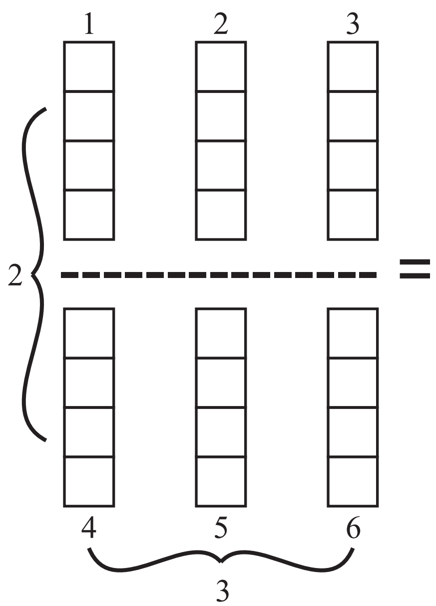
(II)

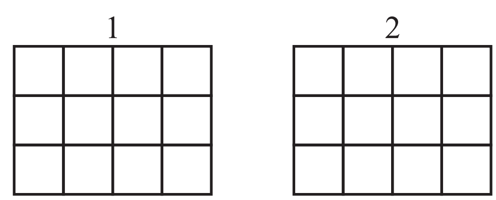


(___ + ___) + ___ = ___ + (___ + ___) = ___

⇨ सभी पूर्णांकों के लिए युग्म बदलकर जोड़ने पर भी जोड़ ________________(समान/असमान) रहता है।

नीचे दिए गए पैटर्न को देखकर रिक्त स्थान भरें?





$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$

6 बार 4 = 2 बार 12

24 = 24

(I) $(3 \times 4) \times 5 =$ ___ $\times$ (___ $\times$ ___)

निम्न रिक्त स्थान भरिए।

निष्कर्ष: पूर्णांकों के लिए युग्म बदलकर गुणन करने पर भी गुणनफल ___________ रहता है। **(समान/असमान)**

घटाव के लिए जांच

कोई भी तीन पूर्णांक लीजिए	पूर्णांकों का घटाव, अलग-अलग युग्म बनाकर			परिणाम
a) -3 , -2 , 1	$[-3-(-2)]-1$	$= -1-1$	$=-2$	
	$(-3)-(-2-1)$	$= -3-(-3)$	$=0$	असमान अंतर
b) ____ , ____ , ____	[________] +___	= __ + __	= __	
	___ + [_______]	= __ + __	= ____	________

निष्कर्ष : पूर्णांकों के लिए घटाव **साहचर्य नहीं** होता है।

गुणन के लिए जांच

कोई भी तीन पूर्णांक लीजिए	पूर्णांकों का गुणन, अलग-अलग युग्म बनाकर			परिणाम
a) -3 , -2 , -1	$[-3\times-2]\times(-1)$	$=6\times-1$	$=-6$	समान गुणफल
	$(-3)\times[(-2)\times(-1)]$	$=-3\times2$	$=-6$	
b) ____ , ____ , ____	[________] × __	= __ × __	= __	
	___ × [_______]	= __ × __	= ____	________

निष्कर्ष: पूर्णांकों के लिए गुणन **साहचर्य** होता है।

निम्न में साहचर्य नियम का प्रयोग कर गुणा कीजिए।

i) $14\times9=(2\times7)\times9=2\times(7\times9)=2\times63=126$

ii) $-18\times7=$ (____ × ____) × __ = __ × (__ × __) = ___ × ___ = _____

iii) $15\times-8=$ (____ × ____) × __ = __ × (__ × __) = ___ × ___ = _____

iv) $-5\times4\times-25=-5\times(4\times-25)=-5\times-100=500$

v) $-1\times5\times-200=$ ____ × (___ × ___) = ___ × (_____) =

रिक्त स्थान भरिए।

i) $(-7 \times 2) \times 5 =$ ____ $\times (2 \times 5)$

ii) $(1 \times -3) \times 4 = 4 \times$ ________

iii) $(a \times b) \times c =$ ____ $\times$ (___ $\times$ ___)

iv) $20 \times -5 \times -1 =$ ____ $\times$ (___ $\times$ ___) = ___ $\times$ 5 = ___

v) $-2 \times 250 \times -2 =$ ____ $\times$ (___ $\times$ ___) = ___ $\times$ ___ = ___

भाग के लिए जांच

कोई भी तीन पूर्णांक लीजिए	पूर्णांकों का घटा, अलग-अलग युग्म बनाकर			परिणाम
a) -8 , -2 , 2	$(-8 \div -2) \div 2$	$= 4 \div 2$	$= 2$	
	$-8 \div (-2 \div 2)$	$= -8 \div -1$	$= 8$	असमान भागफल

निष्कर्ष : पूर्णांकों के लिए भाग साहचर्य नहीं होता है।

निम्न में दाएँ पक्ष और बाँए पक्ष को हल करके देखिए कि दोनों पक्ष बराबर हैं या नहीं (बॉक्स में हाँ या नहीं लिखिए)

(i) $(27+13)+10 = 27+(13+10)$ ☐

(ii) $15+0 = 0+15$ ☐

(iii) $21+29 = 29+21$ ☐

(iv) $2 \times 3 \times 4 = 4 \times 3 \times 2$ ☐

(v) $10 - 0 = 0 - 10$ ☐

(vi) $-3 \times 4 \times (-5) = -5 \times 4 \times (-3)$ ☐

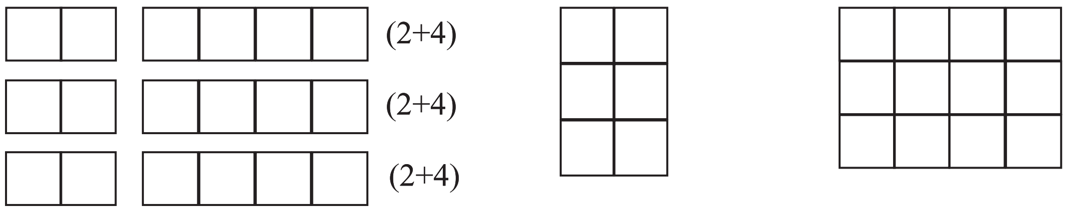
(vii) $17 - 7 + 0 = 0 - 7 + 17$ ☐

(viii) 1 x $-2 \times 3 = 3 \times 2 \times 1$ ☐

वितरण गुण (Distributive law)

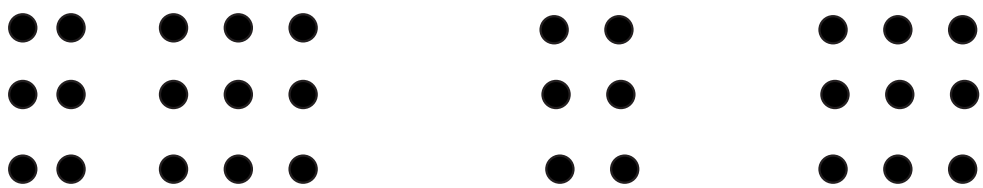
योग पर गुणन का वितरण नियम

1.



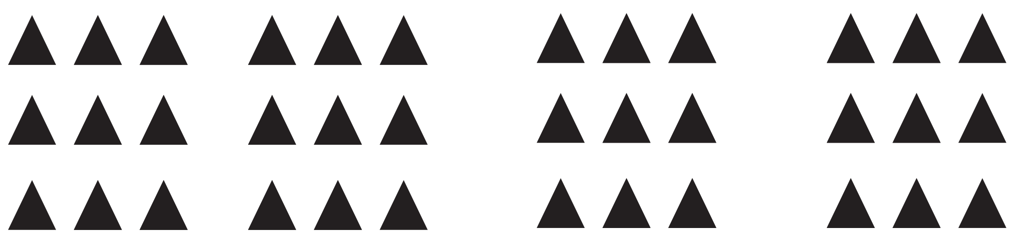
$3 \times (2+4) \quad = \quad 3 \times 2 \quad + \quad 3 \times 4 \quad = 18$

2.



___ × (___ + ___) = ____ × ____ + _____ × _____ = ____

3.



___ × (___ + ___) = ____ × ____ + _____ × _____ = ____

ऊपर दिए गए प्रतिरूप को योग पर गुणन का वितरण नियम कहते हैं।

उदाहरण (a) को देखिए और खाली स्थान भरिए।

a) $16 \times 32 \quad = 16 \times (30 + 2) \quad = (16 \times 30) + (16 \times 2) = 480 + 32 \quad = 512$

b) $19 \times (21)$ = __ × (__ + __) = (___×___) + (___×___) = ___ × ___ = _____

c) 20×43 = __ × (__ + __) = (___×___) + (___×___) = ___ × ___ = _____

पूर्णांकों के लिए वितरण गुण

योग पर गुणन के वितरण नियम का प्रयोग करके गुणा कीजिए तथा रिक्त स्थान भरिए।

उदाहरण: a) $-2 \times 8 = (-2) \times (3 + 5) = [-2 \times 3] + [-2 \times 5] = -6 + (-10) = -16$

उदाहरण: b) $-4 \times -5 = (-4) \times [(-3 + (-2)] = [-4 \times (-3)] + [-4 \times (-2)] = 12 + 8 = 20$

उदाहरण: c) $-3 \times 27 = (-3) \times (30 - 3) = [-3 \times 30] + [-3 \times -3] = -90 + 9 = -81$

d) $3 \times 12 = \_\_\_ \times (\quad + \quad) = [\quad \times \quad] + [\quad \times \quad] = \_\_\_\_ + \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$

e) $-8 \times 17 = \_\_\_ \times (\quad - \quad) = [\quad \times \quad] - [\quad \times \quad] = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$

उदाहरण को देखिए और खाली स्थान भरिए!

उदाहरण: a) $-4 \times 7 + -4 \times 3 = -4 \times (7 + 3) = -4 \times 10 = -40$

b) $2 \times (-4) + 2 \times (-1) = \_\_\_ \times (\_\_\_ + \_\_\_) = \_\_\_ \times \_\_\_ = \_\_\_\_\_$

c) $2 \times (4) + 2 \times (1) = \_\_\_ \times (\_\_\_ + \_\_\_) = \_\_\_ \times \_\_\_ = \_\_\_\_\_$

d) $2 \times (4) + 2 \times (-1) = \_\_\_ \times (\_\_\_ + \_\_\_) = \_\_\_ \times \_\_\_ = \_\_\_\_\_$

e) $2 \times 5 + 2 \times (-5) = \_\_\_ \times (\_\_\_ + \_\_\_) = \_\_\_ \times \_\_\_ = \_\_\_\_\_$

निम्नलिखित तालिका के वर्गों में (हाँ/नहीं) लिखिए।

संक्रियाएँ Operations / गुणधर्म Properties	सभी पूर्णांक			
	योग के लिए Addition	व्यवकलन के लिए Substraction	गुणन के लिए Multiplication	भाग के लिए Division
संवृत Closed for				
क्रमविनिमेय Commutative for				
साहचर्य Associative for				

सोचिए और लिखिए-

(i) 0 से छोटे दो पूर्णांक लिखें _____ , _____

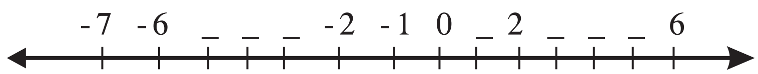
(ii) 0 से बड़े दो पूर्णांक लिखें _____ , _____

(iii) 5 से बड़े दो पूर्णांक लिखें _____ , _____

(iv) 10 से छोटे तीन पूर्णांक लिखें _____ , _____

(v) तीन ऋणात्मक पूर्णांक लिखें _____ , _____ , ______

(vi) निम्न संख्या रेखा पर रिक्त स्थानों की पूर्ति करें।



(vii) $-3 + 2 =$ _________

(viii) $0 + 3 - 1 =$ _________

(ix) $-3 \times -1 =$ _________

(x) $-1 \times -2 \times -3 =$ _________

(xi) $3 \times 2 \times -1 \times 0 =$ __________

(xii) __ $\times 3 = -6$

(xiii) $-2 \times$ ___ $= -10$

(xiv) $-2 \times -7 =$ __________

(xv) __ $\times$ __ $= 10$

(xvi) $-10 \times$ __ $= 10$

(xvii) $-2 \times -5 =$ ___________

(xviii) ___ $\times$ ___ $\times$ ___ $\times$ ___ $= 20$

(xix) $-20 \div 4 =$ ______

(xx) $-100 \div -1 =$ ______

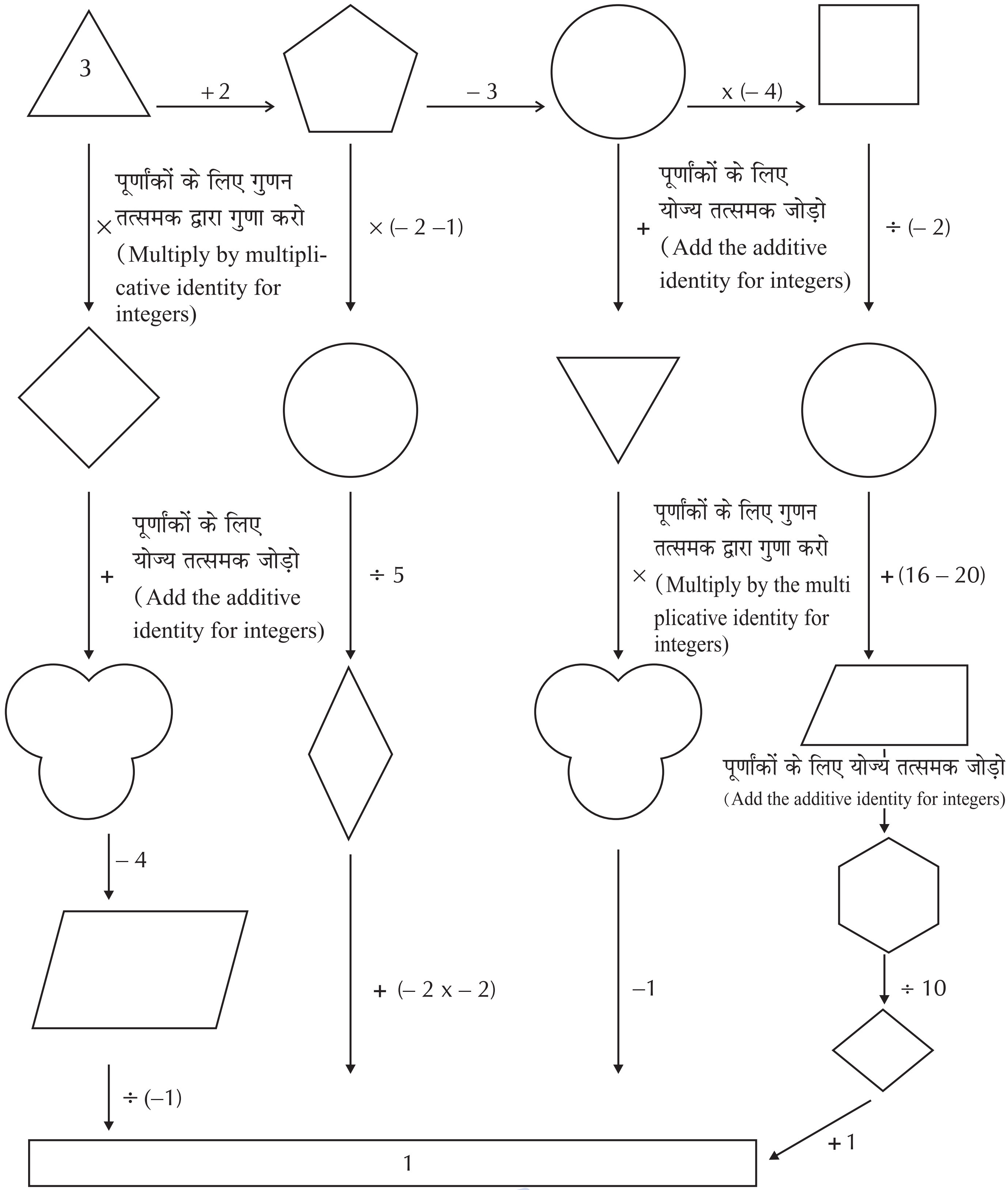
(xxi) $-101 + 1 \div (-99 - 1) =$ ______

(xxii) $(48 - 51 + 3) \div (-39 + 40) =$ ______

(xxiii) $(-2 - 10 + 12) \div (25 - 50) =$ _______

(xxxiv) $50 \div$ ______ $= -1$

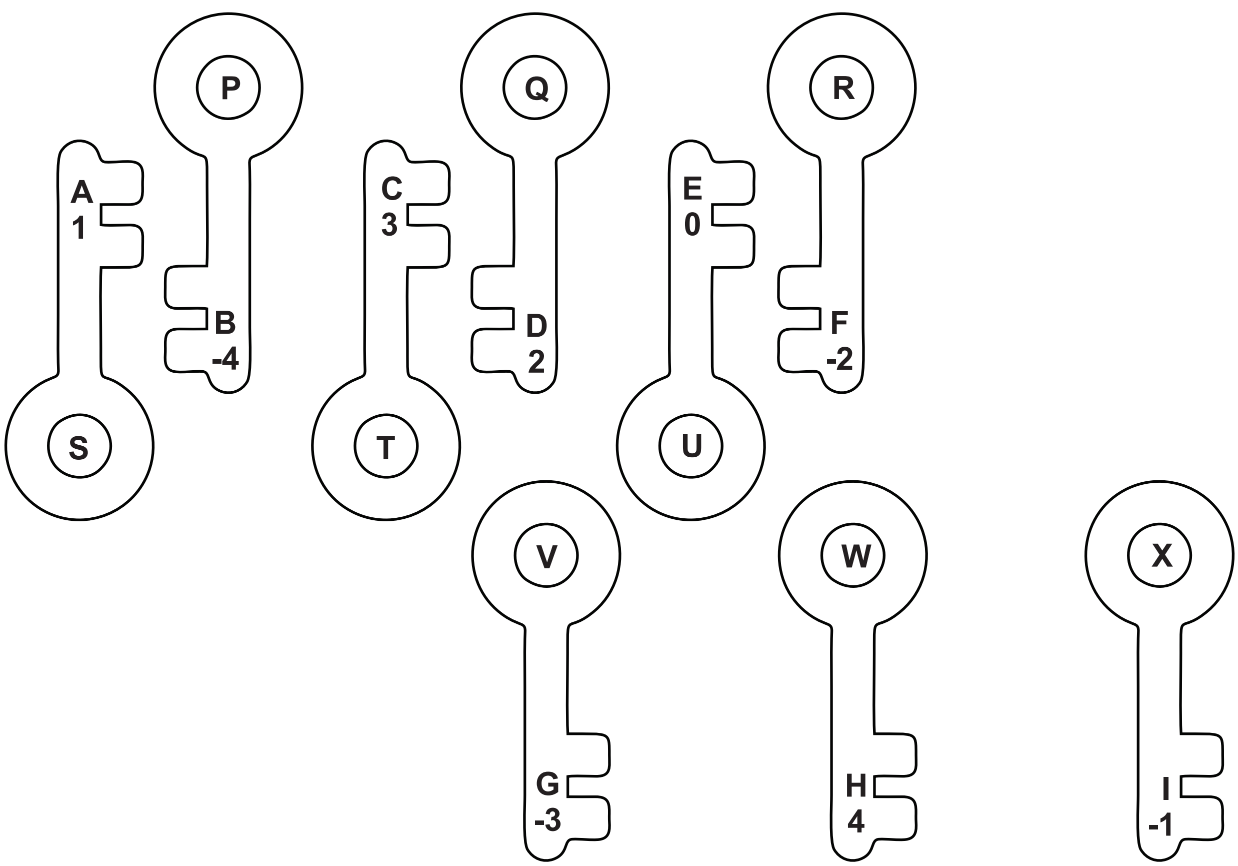
गतिविधिः– पूर्णांकों के गुण व नियमों का उपयोग कर निम्न आकृतियों में उनके बीच तीर के निशान पर दिए गए निर्देशों का उपयोग कर उचित पूर्णांकों से भरें !



गतिविधिः– नीचे दिए गए दरवाजों पर लिखें सही चाबी का चुनाव करें तथा तालिका में दी गई चाबियों के सामने दरवाजों का सही अंग्रेज़ी वर्ण भरें ?

$5 + (-7)$	$4\{(-4+0)\div4\}$	$-1(6-10)$
$-1-2$	$-5-(-5)$	$-5-(-6)$
$-3(-4 \div 4)$	$(-7\times-1)\div(-7)$	$(-12) \div (-6)$

चाबी	दरवाजा
P	
Q	
R	
S	
T	
U	
V	
W	
X	



गतिविधिः– पूर्णांकों के गुण व नियमों का प्रयोग कर निम्न तालिका में प्रत्येक पंक्ति के पूर्णांकों को उनके सामने स्तम्भों के पूर्णांकों में जोड़कर चिन्ह सहित उनके संबंधित वर्गों में लिखिए। जैसा दर्शाया गया है।

+	-10	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	5	12
5			2								
2		-3									
1				-1							
0									3		
-1							0				
-2											10
-11										-6	

गतिविधिः– नीचे पंक्तियों में दिए गए पूर्णांकों का स्तम्भों में दिए गए पूर्णांकों से गुणा कर चिन्ह सहित वर्गों में भरिए जैसा दर्शाया गया है।

×	-15	-7	-5	-3	-1	0	1	3	5	7	17
11				-33							
8								24			
4			-20								
2							2				
0									0		
-2					2						
-5		35									
-7						0					
-9										-63	

गतिविधिः– बाएँ दिए गए तीरों का मान ज्ञात कर उन्हें सामने दिए गए बोर्ड पर सही लक्ष्य वाले पूर्णांकों से मिलाइए।

(a) -3×1

(b) 5×0

(c) $(-14) \div (-7)$

(d) $(-7) + (-4)$

(e) $0 \div (-11)$

(f) $(-1) \times 3$

(g) $-7 + 0$

(h) $11 \div (-1)$

(i) $-2 \times (3 - 4)$

(j) $-7 \div 1$

लक्ष्य बोर्ड

(i) 2

(ii) 0

(iii) -3

(iv) -7

(v) -11

बताइए प्रत्येक लक्ष्य पर कितने तीर लग रहे हैं? (i) .... (ii) ....

(iii) .... (iv) .... (v) ....

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

1. पूर्णांक संख्याओं का परिचय।
2. पूर्णांक संख्याएँ एवं विभिन्न संक्रियाएँ।
3. क्रम विनिमेय, साहचर्य एवं वितरण आदि गुणों की समझ विकसित करना।

अध्याय – 2 भिन्न एवं दशमलव

आइए, अध्यापिका और छात्रों में हो रही बातचीत को सुनते हैं।

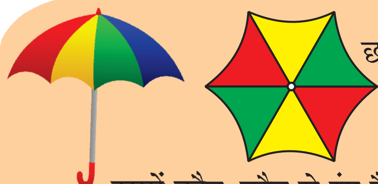
अध्यापिका : बच्चों, आज आपको कैसा लग रहा है? सुबह से ही बारिश हो रही है।

राजा : बहुत अच्छा। गर्मी बहुत अधिक थी, बारिश आने से मज़ा आ रहा है।

अध्यापिका : इतनी बारिश में स्कूल आते हुए तुम लोग भीगे नहीं? मैं तो थोड़ा भीग गई थी।

सुनील : हम भी थोड़ा भीग गए जबकि हमारे पास छाता भी था।

अध्यापिका : तुम्हारे पास तो रंग बिरंगे और बहुत सुन्दर छाते हैं।



छाते का ऊपरी भाग

इसमें कौन–कौन से रंग हैं।

सोमना : हरा, लाल और पीला

अध्यापिका : छाते में कुल भाग कितने हैं?

शमी : छः

अध्यापिका : यदि पूरे छः भागों को एक पूर्ण माने तो यह बताओ कि लाल रंग के भाग इस पूर्ण का कौन सा हिस्सा है? याद करो यह हमने VI में किया था।

रोनी : $\frac{2}{6}$

अध्यापिका : बिल्कुल सही इसे क्या बोलते हैं?

नसीम : भिन्न

अध्यापिका : भिन्न $\frac{2}{6}$ में 2 और 6 क्या है?

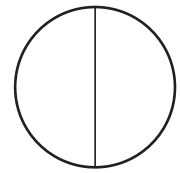
डेविड़ : 6 कुल भाग हैं जिसे हर कहते हैं और इसमें से 2 भाग लिए गए हैं, जिसे अंश कहते हैं।

अध्यापिका : बहुत बढ़िया।

भिन्न एक पूर्ण का भाग है।

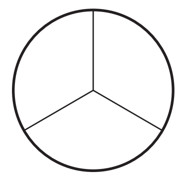
आइए अब हम भिन्न को दोहराते हैं।

1 दी गई आकृति को दो बराबर भागों में बाँटा गया है।



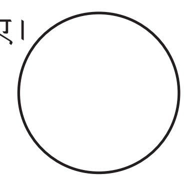
- इसके आधे भाग को छायांकित कीजिए।
- छायांकित भाग को भिन्न के रूप में लिखिए।

2 दी गई आकृति को तीन बराबर भागों में बाँटा गया है।



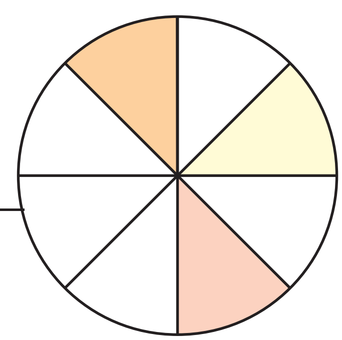
- इसके एक भाग को छायांकित कीजिए।
- आकृति का प्रत्येक भाग $\frac{1}{3}$ (एक तिहाई) कहलाएगा।
- छायांकित भाग को भिन्न रूप में लिखिए। , अंश = ________ , हर = ________
- कितने $\frac{1}{3}$ (एक तिहाई) मिलकर 1 पूर्ण बनेंगे ? ________

3 दी गई आकृति को चार बराबर भागों में बाँटिए तथा इसके किसी भी एक भाग को छायांकित कीजिए।



- छायांकित भाग को भिन्न रूप में लिखिए। , अंश = ________ , हर = ________
- आकृति का प्रत्येक भाग $\frac{1}{4}$ (एक चौथाई) कहलाएगा।
- कितने $\frac{1}{4}$ (एक चौथाई) मिलकर 1 पूर्ण बनेंगे ? ________
- कितने $\frac{1}{4}$ (एक चौथाई) मिलकर पूर्ण के $\frac{1}{2}$ भाग बनेंगे ? = ________

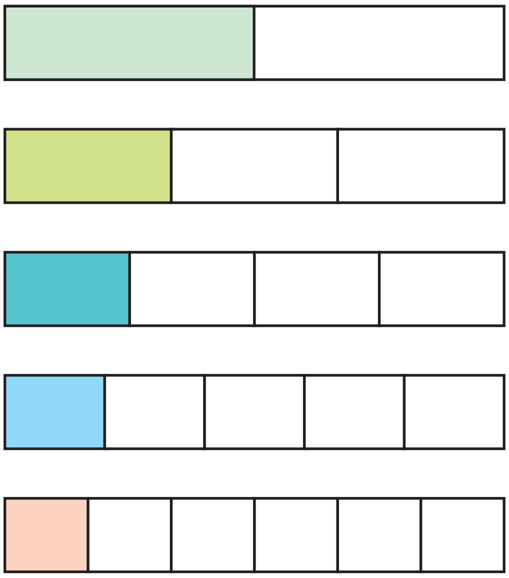
4 हमने एक आकृति को 8 बराबर भागों में बाँटा है।



- आकृति का प्रत्येक भाग $\frac{1}{8}$ (आठवाँ भाग) कहलाएगा।
- छायांकित भाग का भिन्न = , अंश = ________ , हर = ________
- कितने $\frac{1}{8}$ (आठवें भाग) मिलकर, एक पूर्ण बनाते हैं ? ________

भिन्नों की तुलना

छायांकित भाग के लिए भिन्न



____

____

____

____

____

प्राप्त भिन्न संख्याओं को बढ़ते क्रम में लिखिए :- _____, _____, _____, _____, _____

ऊपर दी गई आकृतियों को देखकर उत्तर दीजिए।

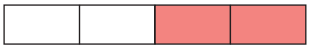
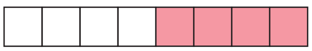
(1) कितने $\frac{1}{4}$ मिलकर, $\frac{1}{2}$ बनाएँगे? ___

(2) कितने $\frac{1}{6}$ मिलकर, $\frac{1}{2}$ बनाएँगे? ___

(3) कितने $\frac{1}{5}$ मिलकर, एक पूर्ण बनाएँगे? ___

(4) कितने $\frac{1}{6}$ मिलकर, एक पूर्ण बनाएँगे? ___

समतुल्य भिन्न (Equivalent Fraction)

आकृति	भिन्न
	______
	______
	______
	______

क्या सभी आकृतियों में छायांकित भाग समान है? ◯ हाँ/नहीं

क्या हम सभी आकृतियों के छायांकित भागों को $\frac{1}{2}$ लिख सकते हैं? ◯ हाँ/नहीं

सभी छायांकित भाग समान हैं तो इनकी भिन्न संख्या भी समान होगी, इसलिए ये सभी भिन्न समतुल्य भिन्न कहलाते हैं।

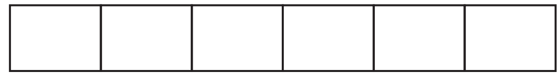
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

आइए समतुल्य भिन्न बनाते हैं।

$\frac{1}{2}$ के समतुल्य भिन्न	$\frac{2}{3}$ के समतुल्य भिन्न	$\frac{4}{5}$ के समतुल्य भिन्न
$\frac{1\times 2}{2\times 2} = \frac{2}{4}$	$\frac{2\times 2}{3\times 2} = \frac{4}{6}$	$\frac{4}{5} =$ ____
$\frac{1\times 3}{2\times 3} = \frac{3}{6}$	$\frac{2}{3} =$ ____	$\frac{4}{5} =$ ____
$\frac{1\times 4}{2\times 4} = \frac{4}{8}$	$\frac{2}{3} =$ ____	$\frac{4}{5} =$ ____
$\frac{1\times}{2\times} =$ ____	$\frac{2}{3} =$ ____	$\frac{4}{5} =$ ____
$\frac{1\times}{2\times} =$ ____	$\frac{2}{3} =$ ____	
$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} =$ ____ $=$ ____	$\frac{4}{6} =$ ____ $=$ ____ $=$ ____ $=$ ____	$\frac{4}{5} =$ ____ $=$ ____ $=$ ____ $=$ ____

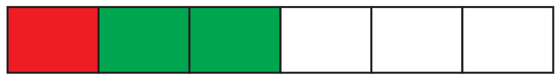
समान हर वाली भिन्न का जोड़ व घटाव

(क) दी गई आकृति में 6 बराबर भाग हैं।
आकृति का प्रत्येक भाग किस भिन्न को दिखाता है?
दी गई आकृति को छायांकित कर जोड़ कीजिए।



उदाहरण

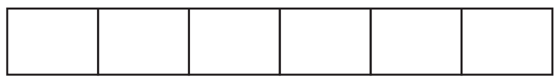
1) $\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$



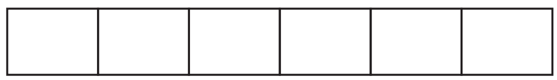
कुल छायांकित भाग = $\frac{3}{6}$

अब आप प्रयास कीजिए

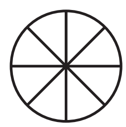
2) $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} =$ ___



3) $\frac{4}{6} + \frac{2}{6} =$ ___

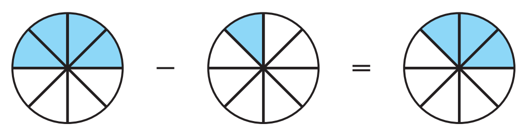


(ख) दी गई आकृति में 8 बराबर भाग हैं।
आकृति का प्रत्येक भाग किस भिन्न संख्या को दिखाता है?
दी गई आकृतियों को छायांकित कर घटाव कीजिए।



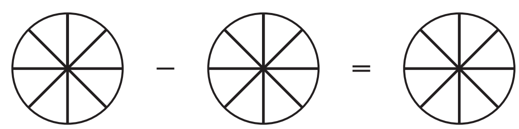
उदाहरण

1) $\frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

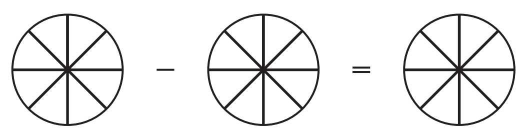


अब प्रयास कीजिए।

2) $\frac{6}{8} - \frac{4}{8} =$ ___



3) $\frac{4}{8} - \frac{3}{8} =$ ___



हल कीजिए

1) $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} =$ ___

2) $\frac{5}{9} - \frac{2}{9} =$ ___

3) $\frac{8}{17} + \frac{3}{17} =$ ___

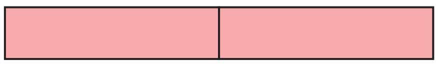
4) $\frac{17}{25} - \frac{7}{25} =$ ___

5) $\frac{7}{30} - \frac{1}{30} =$ ___

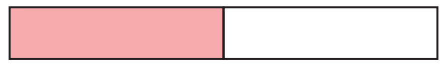
6) $\frac{12}{15} + \frac{3}{15} =$ ___

मिश्रित भिन्न तथा विषम भिन्न
(Mixed Fraction and Improper Fraction)

क) यहाँ हमने एक पूर्ण तथा एक आधे भाग को छायांकित किया है।



एक पूर्ण छायांकित भाग



एक आधा छायांकित भाग

एक पूर्ण छायांकित भाग को हम $\frac{2}{2}$ लिख सकते हैं।
तथा एक आधे छायांकित भाग को हम $\frac{1}{2}$ लिख सकते हैं।

कुल छायांकित भाग $= \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$ एक ऐसी भिन्न संख्या है जिसमें अंश हर से बड़ा है।

जिस भी भिन्न का अंश हर से बड़ा होता है,
उसे विषम भिन्न (Improper Fraction) कहते हैं।

→ **दिए गए भिन्नों में , विषम भिन्नों पर घेरा कीजिए।**

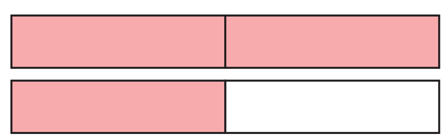
$\frac{4}{7}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{19}{12}$, $\frac{12}{19}$

ख) यह एक पूर्ण तथा एक आधा छायांकित भाग है।

यह मिलकर $\frac{3}{2}$ भाग बनता है।

जिसे हम $1\frac{1}{2}$ के रूप में भी दिखा सकते हैं।

$1\frac{1}{2}$ का मतलब एक पूर्ण तथा एक पूर्ण का आधा भाग।

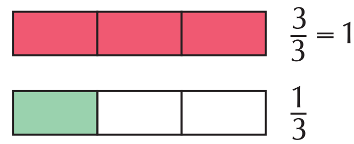
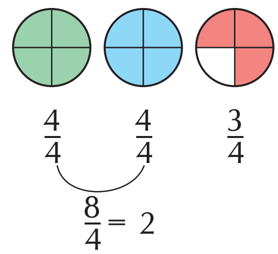
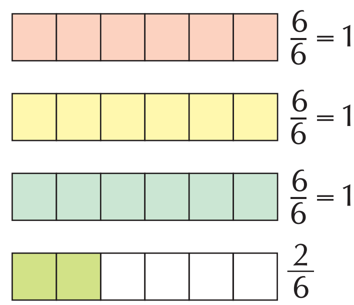


भिन्न को दर्शाने के इस रूप $\left(1\frac{1}{2}\right)$
को हम मिश्रित भिन्न
(Mixed Fraction) कहते हैं।

→ **दिए गए भिन्नों में, मिश्रित भिन्नों पर घेरा कीजिए।**

$\frac{10}{3}$, $4\frac{1}{5}$, $1\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $\frac{4}{9}$

आइए अब हम मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में बदलना सीखते हैं।

मिश्रित भिन्न	विस्तारित रूप	विषम भिन्न	आकृति
$1\frac{1}{3}$	$1+\frac{1}{3}$	$\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$	
$2\frac{3}{4}$	$2+\frac{3}{4}$	$\frac{8}{4}+\frac{3}{4}=$ ____	
$3\frac{2}{6}$	____________	____________	

मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में बदलने की एक और विधि

उदाहरण, विषम भिन्न में बदलिए।

1) $1\frac{1}{3} = \frac{3\times 1+1}{3} = \frac{4+1}{3} = \frac{4}{3}$

2) $3\frac{2}{3} = \frac{3\times 3+2}{3} = \frac{9+2}{3} = \frac{11}{3}$

दिए गए उदाहरण के अनुसार, विषम भिन्न में बदलिए।

क) $2\frac{2}{3}$ = ____ = ____ = ____

ख) $3\frac{1}{4}$ = ____ = ____ = ____

विषम भिन्न में बदलिए।

1) $4\frac{3}{5} = \frac{23}{5}$

2) $5\frac{2}{6} =$

3) $3\frac{1}{7} =$

4) $2\frac{2}{5} =$

5) $7\frac{3}{6} =$

आइए अब हम विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न में बदलना सीखते हैं।

मिश्रित भिन्न में बदलिए।

उदाहरण

(1) $\frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{2}{2}+\frac{1}{2} = 1+\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

(2) $\frac{7}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{4}{4}+\frac{3}{4} = 1+\frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$

(3) $\frac{11}{3} = \frac{3+3+3+2}{3} = \frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3} = 1+1+1+\frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$

दिए गए उदाहरण के अनुसार, मिश्रित भिन्न में बदलिए।

(4) $\frac{5}{3}$ = _______ = _______ = _______ = _______

(5) $\frac{9}{5}$ = _______ = _______ = _______ = _______

प्र० संख्या (3) में हमें $\frac{11}{3}$ को मिश्रित भिन्न में बदलने में परेशानी हुई।

हम ऐसी स्थिति में मिश्रित भिन्न को इस प्रकार से भी ज्ञात कर सकते हैं। जैसे:–

3)11(3
9
2

हमें 11 को 3 से भाग करने से प्राप्त हुआ = 3 पूर्ण तथा 2 भाग 3 के

$\frac{11}{3}$ का मिश्रित भिन्न $= 3\frac{2}{3}$

विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न में बदलने का प्रयास कीजिए।

विषम भिन्न	मिश्रित भिन्न
(1) $\frac{17}{4}$	$4\frac{1}{4}$
(2) $\frac{9}{2}$	
(3) $\frac{11}{4}$	
(4) $\frac{7}{2}$	
5) $\frac{16}{3}$	

4)17(4
16
1

2) 9 (

4)11(

2) 7 (

3)16(

समान तथा असमान भिन्न (Like and Unlike Fraction)

प्र०– दिए गए भिन्नों में, उन भिन्नों पर घेरा कीजिए जिनके हर समान हैं।

$\frac{4}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{2}{4}, \frac{5}{6}$

वे भिन्न जिनके हर समान होते हैं उन्हें समान भिन्न (Like Fraction) कहते हैं।जैसे $\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}$ **आदि**

प्र०– दिए गए भिन्नों में, उन भिन्नों पर घेरा कीजिए जिनके हर समान नहीं हैं।

$\frac{4}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$

वे भिन्न जिनके हर समान नहीं होते हैं उन्हे असमान भिन्न (Unlike Fraction) कहते हैं।

जैसे $\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}$ **आदि**

दिए गए भिन्नों में से समान भिन्नों पर घेरा कीजिए।

(i) $\frac{4}{7}, \frac{5}{3}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$

(ii) $\frac{3}{8}, \frac{2}{7}, \frac{1}{8}, \frac{5}{9}, \frac{4}{8}$

(iii) $\frac{1}{5}, \frac{4}{9}, \frac{6}{5}, \frac{7}{8}, \frac{3}{5}$

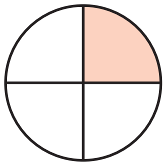
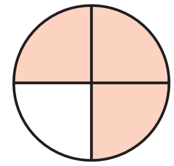
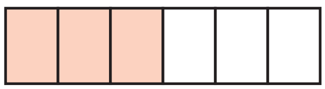
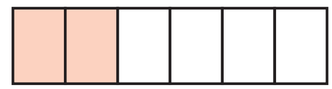
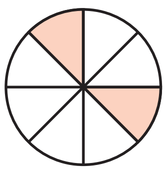
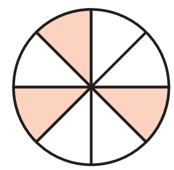
दिए गए भिन्नों में से असमान भिन्नों पर घेरा कीजिए।

(i) $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{5}{3}, \frac{2}{5}, \frac{7}{3}$

(ii) $\frac{2}{9}, \frac{1}{5}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5}$

(iii) $\frac{11}{13}, \frac{4}{7}, \frac{9}{10}, \frac{6}{7}, \frac{5}{7}$

समान भिन्नों की तुलना (<,>,= चिन्हों के प्रयोग द्वारा)

आकृति	छायांकित आकृति का भिन्न रूप		छायांकित आकृति का भिन्न रूप	आकृति
	$\frac{1}{4}$	$\boxed{<}$	$\frac{3}{4}$	
	______	$\square$	______	
	______	$\square$	______	

ऊपर दिए गए प्रश्न में हमने समान हर वाली भिन्न संख्याओं की तुलना की है।

भिन्नों की तुलना कीजिए

(a) $\frac{1}{12} \square \frac{10}{12}$ (b) $\frac{7}{15} \square \frac{6}{15}$ (c) $\frac{11}{75} \square \frac{10}{75}$

भिन्नों को बढ़ते क्रम में लिखिए

(1) $\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}$

बढ़ता क्रम:– ____, ____, ____, ____

(2) $\frac{7}{15}, \frac{4}{15}, \frac{1}{15}, \frac{9}{15}$

बढ़ता क्रम:– ____, ____, ____, ____

भिन्नों को घटते क्रम में लिखिए

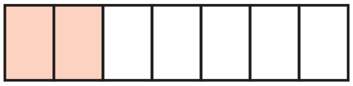
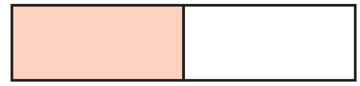
(1) $\frac{13}{20}, \frac{17}{20}, \frac{12}{20}, \frac{9}{20}$

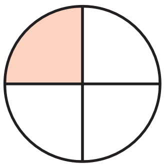
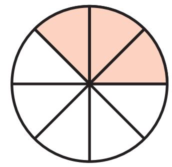
घटता क्रम:– ____, ____, ____, ____

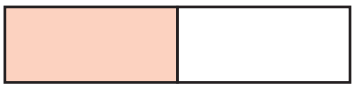
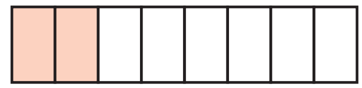
(2) $\frac{4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6}$

घटता क्रम:– ____, ____, ____, ____

असमान भिन्नों की तुलना

 $\frac{2}{6}$ $\square$ $\frac{1}{2}$ 

 $\frac{\quad}{\quad}$ $\square$ $\frac{\quad}{\quad}$ 

 $\frac{\quad}{\quad}$ $\square$ $\frac{\quad}{\quad}$ 

आइए, अब हम बिना आकृतियों की मदद से असमान भिन्नों की तुलना करना सीखते हैं।

उदाहरण 1

$\frac{4}{5}$, $\frac{2}{10}$ की तुलना कीजिए

दोनों भिन्नों के हर समान नहीं हैं।

चरण 1 $\frac{4 \times 2}{5 \times 2}$, $\frac{2 \times 1}{10 \times 1}$

दोनों भिन्नों को समान भिन्न में बदलिए।

चरण 2 $\frac{8}{10} \boxed{>} \frac{2}{10}$

समान भिन्नों की तुलना कीजिए।

उदाहरण 2 $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$ की तुलना कीजिए

दोनों भिन्नों के हर समान नहीं हैं।

चरण 1 $\frac{3 \times 4}{5 \times 4}$, $\frac{3 \times 5}{4 \times 5}$

दोनों भिन्नों को समान भिन्न में बदलिए।

चरण 2 $\frac{12}{20} \square \frac{15}{20}$

समान भिन्नों की तुलना कीजिए।

उदाहरण 3 :- $\frac{4}{8}, \frac{5}{6}$ की तुलना कीजिए

भिन्नों के हर समान नहीं हैं।

$\frac{4 \times 3}{8 \times 3}, \frac{5 \times 4}{6 \times 4}$

भिन्नों को समान हर में बदलिए।

8 के गुणज
= 8, 16, 24, ...
6 के गुणज
= 6, 12, 18, 24, ...
(8 और 6 का उभयनिष्ठ गुणज 24 है।)

भिन्नों की तुलना

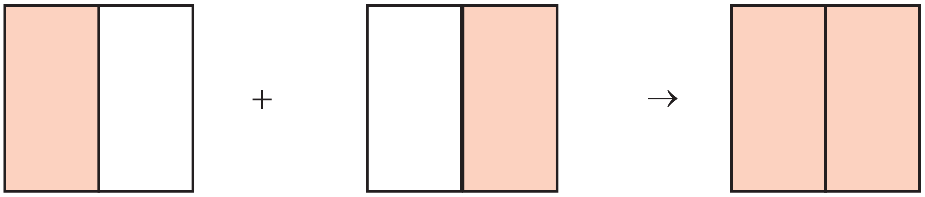
$\frac{12}{24} \boxed{<} \frac{20}{24}$

असमान भिन्नों की तुलना कीजिए

(1) $\frac{4}{20}, \frac{3}{10}$ $\frac{4 \times 1}{20 \times 1}, \frac{3 \times 2}{10 \times 2}$ $\frac{4}{20} \boxed{<} \frac{6}{20}$ $\frac{4}{20} \boxed{>} \frac{3}{10}$	(2) $\frac{5}{4}, \frac{7}{3}$ $\frac{5 \times}{4 \times}, \frac{7 \times}{3 \times}$ __ $\square$ __ $\frac{5}{4} \square \frac{7}{3}$	(3) $\frac{4}{6}, \frac{2}{9}$ $\frac{4 \times}{6 \times}, \frac{2 \times}{9 \times}$ __ $\square$ __ $\frac{4}{6} \square \frac{2}{9}$
(4) $\frac{4}{15}, \frac{3}{15}$ $\frac{4 \times}{15 \times}, \frac{3 \times}{10 \times}$ __ $\square$ __ $\frac{4}{15} \square \frac{3}{10}$	(5) $\frac{5}{8}, \frac{3}{12}$ $\frac{5 \times}{8 \times}, \frac{3 \times}{12 \times}$ __ $\square$ __ $\frac{5}{8} \square \frac{3}{12}$	(6) $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}$ $\frac{4 \times}{5 \times}, \frac{2 \times}{3 \times}$ __ $\square$ __ $\frac{4}{5} \square \frac{2}{3}$

भिन्नों का जोड़

इसी प्रकार, आइए हम कुछ नीचे दी गई आकृतियों में भिन्नों के जोड़ को समझते हैं।

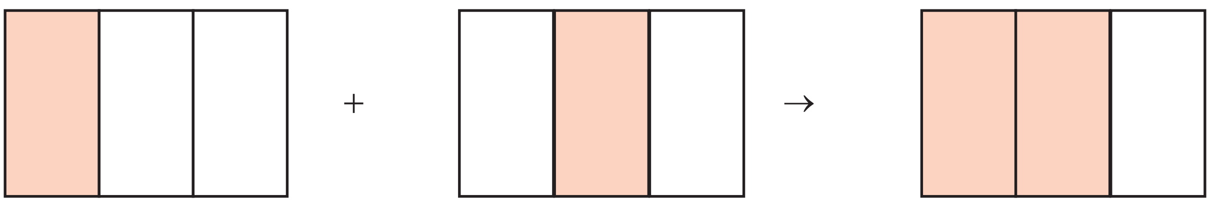


छायांकित भाग   छायांकित भाग   छायांकित भाग

$\frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{2}$

यहाँ हमने कुल दो छायांकित भाग लिए, एक पूर्ण के दो बराबर भागों में से

इसी प्रकार



छायांकित भाग   छायांकित भाग   छायांकित भाग

$\frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3}$

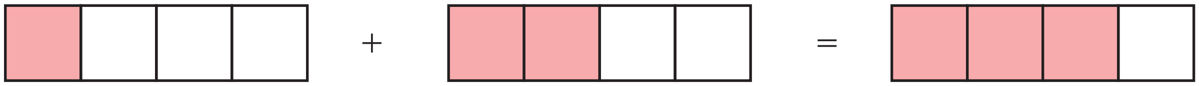
यहाँ हमने दो छायांकित भाग लिए, एक पूर्ण के तीन बराबर भाग में से।

$$\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}}$$

हमने देखा समान भिन्नों को जोड़ने के लिए हमें केवल उनके अंशों को ही जोड़ना पड़ता है तथा हर समान ही रहता है।

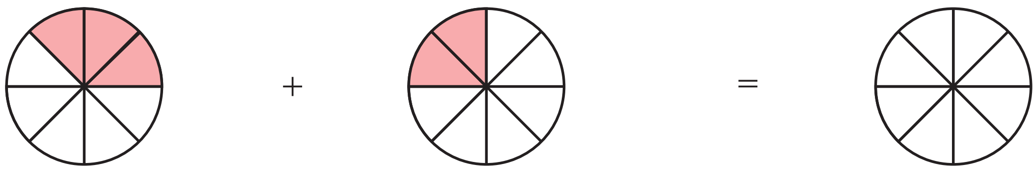
आकृतियों के छायांकित भागों को दिए गए उदाहरण के अनुसार जोड़ कीजिए।

(1)



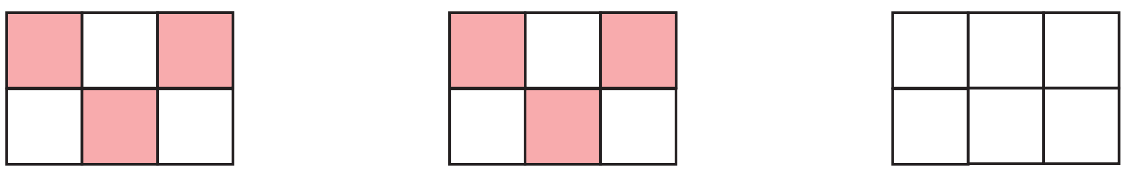
भिन्न रूप : $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

(2)



भिन्न रूप : ________ + ________ = ________

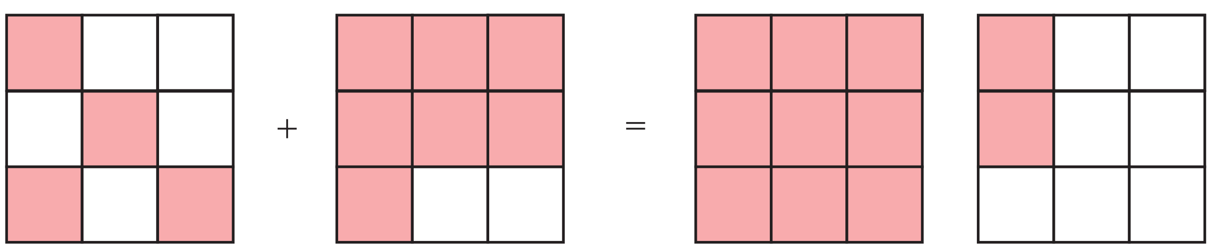
(3)



भिन्न रूप : ________ + ________ = ________

एक विशेष स्थिति जब समान भिन्नों का जोड़ हमें विषम भिन्न मिलता है।

(4)

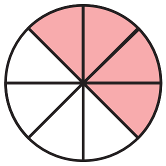
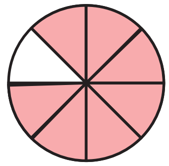
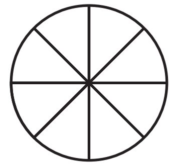
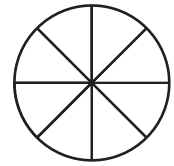


भिन्न रूप : $\frac{4}{9} + \frac{7}{9} = \frac{11}{9}$

यहाँ हमें 11 भाग प्राप्त हुए,
एक पूर्ण के 9 बराबर भागों में से

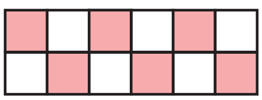
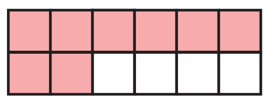
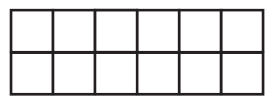
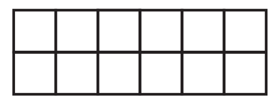
मिश्रित भिन्न $= 1\frac{2}{9}$

छायांकित कीजिए

(5)  +  =  

भिन्न रूप : ________ + ________ = ________

मिश्रित भिन्न = ________

(6)  +  =  

भिन्न रूप : ________ + ________ = ________

मिश्रित भिन्न = ________

आओ गलती ढूँढ़ें

बिल्लू को एक प्रश्न दिया गया जिसमें उसे $\frac{1}{5}$ तथा $\frac{2}{5}$ को जोड़ना था।

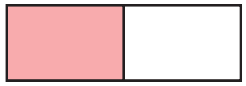
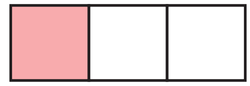
नीचे दिए गए हल में बिल्लू से कुछ गलती हुई है। उस गलती को पहचानिए तथा उस पर गोला कीजिए। दिए गए बॉक्स में हल को ठीक करके लिखिए।

$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \quad \frac{1+2}{5+5} = \frac{3}{10}$

असमान भिन्नों का जोड़

उदाहरण:–

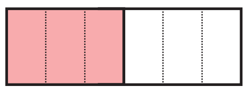
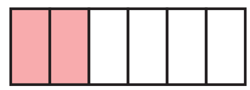
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

 + 

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

यहाँ दोनों आकृतियों में बराबर भाग नहीं हैं, इसलिए हम इन्हें जोड़ नहीं पाएँगे।

आइए आकृतियों को जोड़ने के लिए हम इनको और बराबर भागों में बाँटते हैं।

 + 

$\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$

हमें असमान भिन्नों को जोड़ने के लिए उसके हरों को बराबर करना होगा।

भिन्नों का जोड़ कीजिए

(1) $\frac{4}{5} + \frac{3}{10}$

$\frac{4 \times 2}{5 \times 2} + \frac{3 \times 1}{10 \times 1}$

$\frac{8}{10} + \frac{3}{10} = \frac{11}{10}$

(2) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$

$\frac{2 \times}{3 \times} + \frac{1 \times}{5 \times}$

___ + ___ = ___

(3) $\frac{3}{6} + \frac{2}{4}$

$\frac{3 \times}{6 \times} + \frac{2 \times}{4 \times}$

___ + ___ = ___

(4) $\frac{1}{9} + \frac{2}{6}$

$\frac{1 \times}{9 \times} + \frac{2 \times}{6 \times}$

___ + ___ = ___

(5) $\frac{3}{8} + \frac{1}{4}$

$\frac{3 \times}{8 \times} + \frac{1 \times}{4 \times}$

___ + ___ = ___

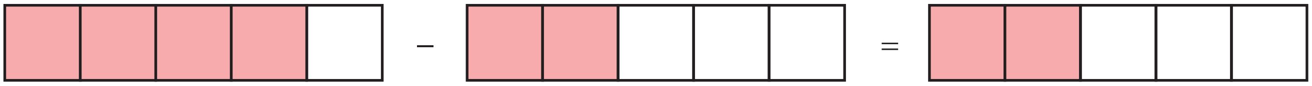
(6) $\frac{1}{2} + \frac{3}{7}$

$\frac{1 \times}{2 \times} + \frac{3 \times}{7 \times}$

___ + ___ = ___

समान भिन्नों का घटाव

उदाहरण



$$\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

यहाँ 4 बराबर भागों में से 2 भाग घटाने के बाद हमारे पास 2 ही भाग शेष हैं, एक पूर्ण के 5 बराबर भागों में से 2 भाग।

घटाव कीजिए

(1) $\frac{6}{7} - \frac{3}{7}$

$= \frac{6-3}{7}$

$= \frac{3}{7}$

(2) $\frac{5}{9} - \frac{1}{9}$

=

=

(3) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$

=

=

जिस प्रकार हम असमान भिन्नों के योग में भिन्नों के हर को समान बनाते हैं, उसी प्रकर हम घटाव में भी समान हर बनाएँगे जैसे:

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$= \frac{1 \times 3}{2 \times 3} - \frac{1 \times 2}{3 \times 2}$

$= \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

2 के गुणज = 2, 4, 6, 8

3 के गुणज = 3, 6, 9, 12

(2 और 3 का उभयनिष्ठ गुणज 6 है।)

भिन्नों का घटाव कीजिए।

(1) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

(3) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

(5) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$

(2) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$

(4) $\frac{6}{7} - \frac{1}{2}$

(4) $\frac{4}{3} - \frac{1}{7}$

नीचे कुछ प्रश्नों को हल करते हुए कुछ त्रुटियाँ की गई हैं। उन त्रुटियों को पहचानकर उन पर गोला कीजिए तथा त्रुटि को साथ दिए गए बॉक्स में सही करके लिखिए।

1) $$\frac{1}{3}+\frac{3}{4} = \frac{1+3}{3} = \frac{4}{3}$$

2) $$\frac{2}{3}+\frac{1}{4} = \frac{2+1}{3+3} = \frac{3}{6}$$

3) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{1}{2+3} = \frac{1}{5}$$

4) $$\frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1-1}{4} = \frac{0}{4}$$

5) $$\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = \frac{1-1}{2-2} = \frac{0}{0}$$

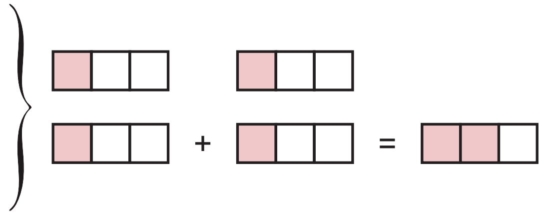
एक भिन्न का पूर्ण संख्या से गुणन

आइए कुछ उदाहरणों को समझते हैं। यहाँ भिन्नों को छायांकित भाग से दर्शाया गया है।

1) $2 \times \frac{1}{3} = 2$ बार $\frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

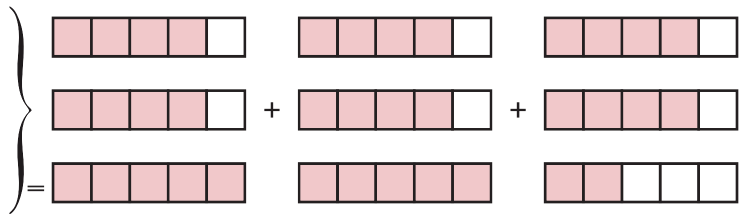
$\boxed{2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}}$



2) $3 \times \frac{4}{5} = 3$ बार $\frac{4}{5}$

$= \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$

$\boxed{3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}}$



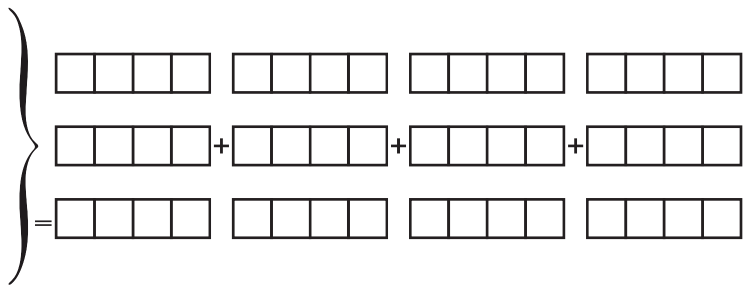
दिए गए उदाहरणों के अनुसार, अब आप प्रयास कीजिए।

3) $4 \times \frac{3}{4} =$ ___ बार ___

$= \frac{\_\_}{\_\_} + \frac{\_\_}{\_\_} + \frac{\_\_}{\_\_} + \frac{\_\_}{\_\_}$

$= \frac{\_\_}{\_\_}$

$\boxed{4 \times \frac{3}{4} = \frac{\_\_}{\_\_}}$

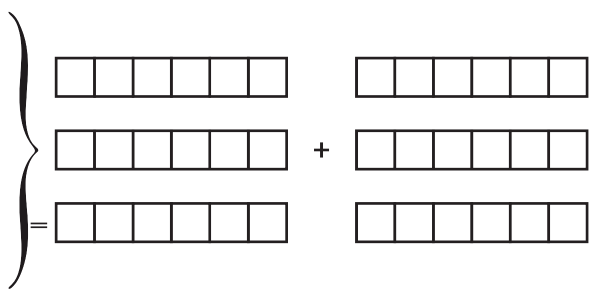


4) $2 \times \frac{5}{6} =$ ___ बार ___

$= \frac{\_\_}{\_\_} + \frac{\_\_}{\_\_} + \frac{\_\_}{\_\_} + \frac{\_\_}{\_\_}$

$= \frac{\_\_}{\_\_}$

$\boxed{2 \times \frac{5}{6} = \frac{\_\_}{\_\_}}$



दिए गए उदाहरणों के अनुसार गुणन कीजिए।

1) $4 \times \frac{5}{7} = \frac{4 \times 5}{7} = \frac{20}{7}$

2) $3 \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5}$

3) $3 \times \frac{4}{9} = \frac{\_\_}{\_\_} = \frac{\_\_}{\_\_}$

4) $2 \times \frac{3}{8} = \frac{\_\_}{\_\_} = \frac{\_\_}{\_\_}$

5) $2 \times \frac{4}{3} = \frac{\_\_}{\_\_} = \frac{\_\_}{\_\_}$

6) $5 \times \frac{2}{7} = \frac{\_\_}{\_\_} = \frac{\_\_}{\_\_}$

आइए दो दोस्तों सौज़ा और मीकू की बातों को सुनते हैं।

सौज़ा

मीकू,
$5 \times \frac{1}{4}$ को हम क्या पढ़ेंगे?

मीकू

इसे हम पढ़ेंगे,
5 बार $\frac{1}{4}$
यानि $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

सौज़ा

अच्छा तो बताओ,
$\frac{1}{4} \times 8$ को हम क्या पढ़ेंगे?
क्या $\frac{1}{4} \times 8$ को हम $\frac{1}{4}$ बार 8 पढ़ सकते है?

मीकू

'$\frac{1}{4}$ बार 8', तो हो ही नहीं सकता।

सौज़ा

हम 4 बार 8 को 8+8+8+8 लिख सकते है
3 बार 8 को 8+8+8 लिख सकते हैं
लेकिन $\frac{1}{4}$ बार 8 को हम 8 के बार-बार योग के रूप में नहीं लिख सकते हैं।

मीकू

ठीक कह रही हो सौज़ा।

सौज़ा

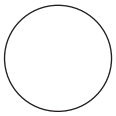
गुणन की परिभाषा :- ''समान संख्या का बार-बार योग'',
$\frac{1}{4} \times 8$ में गुणन की यह परिभाषा काम नहीं कर रही है।

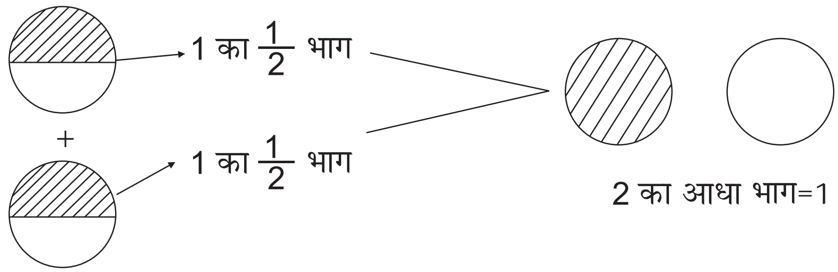
इसका अर्थ यह है कि गुणन की ''समान संख्या का बार-बार योग'' वाली परिभाषा पूर्ण नहीं है तथा यह गुणन की प्रत्येक परिस्थिति में कार्य नहीं करती है।

मीकू

अरे वाह सौज़ा! तुमने तो मुझे बड़ी ही कमाल की बात बताई है।

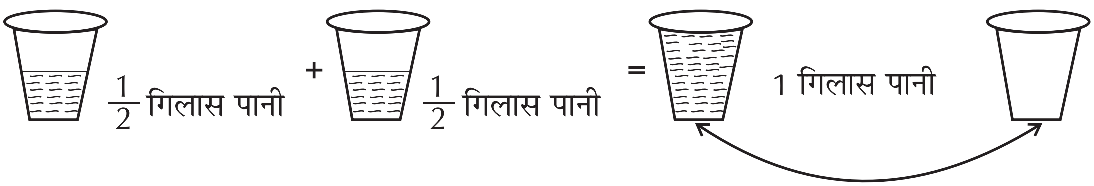
आइए, $\frac{1}{4} \times 8$ को हम एक उदाहरण से समझते हैं।

यदि  को एक पूर्ण मानें तो ,



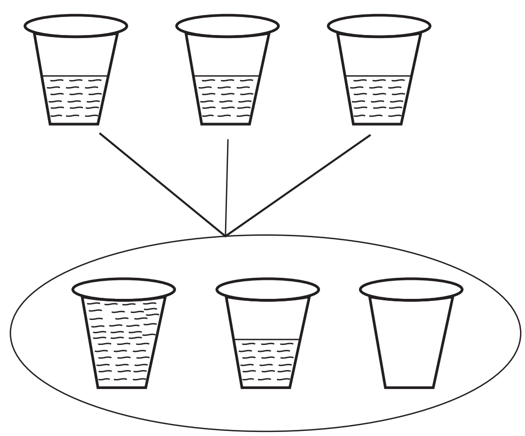
1 का आधा और 1 का आधा मिलकर 2 का आधा यानी 1 बनाते हैं। जैसे आधा गिलास पानी और आधा गिलास पानी मिलकर एक गिलास पानी बनाते हैं।

2 का $\frac{1}{2}$ भाग को हम गणितीय भाषा में $\frac{1}{2}$ x 2 लिखते हैं।



2 का $\frac{1}{2}$ भाग यानि $\frac{1}{2}$ x 2 =1

इसी प्रकार 3 आधा गिलास पानी मिलकर



3 गिलास का आधा यानी $\frac{1}{2} \times 3 = 1\frac{1}{2}$

इसलिए 3 का $\frac{1}{2}$ भाग = $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

इसी तरह 5 का $\frac{1}{2}$ भाग = $\frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

इसी तरह 8 का $\frac{1}{4}$ भाग = $\frac{1}{4} \times 8 = \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}_{1}} = 2$

$8 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$

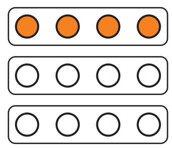
$8 \times \frac{1}{4}$ को हम पढ़ेंगे : 8 बार $\frac{1}{4}$
और $\frac{1}{4} \times 8$ को हम पढ़ेगे : 8 का $\frac{1}{4}$ भाग

$\boxed{\frac{1}{4} \times 8 = 8 \times \frac{1}{4}}$

इनका मान तो बराबर है, लेकिन इनका अर्थ अलग है।

आइए एक और उदाहरण को समझते हैं।

$\frac{1}{3} \times 12$ को हम पढेंगे $\Rightarrow$ 12 का $\frac{1}{3}$ भाग $\Rightarrow$ 12 के 3 बराबर भागो में से 1 भाग।



$= 4$ $\boxed{\frac{1}{3} \times 12 = 4}$

$12 \times \frac{1}{3} =$ 12 बार $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4$

$\boxed{\frac{1}{3} \times 12 = 12 \times \frac{1}{3}}$

यहाँ इनका मान बराबर है, परन्तु इनका अर्थ (क्रम) अलग है।

अभ्यास कीजिए

1) 2 का $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

2) 3 का $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

3) 4 का $\frac{1}{2}$ = ______ = ___

4) 3 का $\frac{1}{3}$ = ______ = ___

5) 4 का $\frac{1}{3}$ = ______ = ___

6) 7 का $\frac{1}{5}$ = ______ = ___

हमने ऊपर उदाहरणों में देखा कि

$\frac{1}{4} \times 8 = 8 \times \frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2} \times 12 = 12 \times \frac{1}{3}$

यानी इनमें गुणन की क्रमविनिमेयता (Cummutativity) लागू होती है।

इसलिए हम 2 का $\frac{1}{2}$ को $2 \times \frac{1}{2}$ भी लिख सकते हैं।
3 का $\frac{2}{5}$ को $3 \times \frac{2}{5}$ भी लिख सकते हैं।

दिए गए उदाहरण के अनुसार गुणन कीजिए

(1)	10 का $\frac{1}{2}$	=	$10 \times \frac{1}{2}$	=	$\frac{10}{2}$	=	5
(2)	15 का $\frac{1}{3}$	=	$15 \times \frac{1}{3}$	=	$\frac{15}{3}$	=	5
(3)	25 का $\frac{1}{5}$	=	______	=	____	=	____
(4)	16 का $\frac{1}{4}$	=	______	=	____	=	____
(5)	20 का $\frac{3}{4}$	=	______	=	____	=	____
(6)	18 का $\frac{2}{3}$	=	______	=	____	=	____

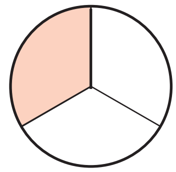
आइए अब हम एक पूर्ण संख्या का मिश्रित भिन्न से गुणन करना सीखते हैं।
दिए गए उदारहण के अनुसार गुणन कीजिए।

(1)	$3 \times 2\frac{1}{4}$	=	$3 \times \frac{9}{4}$	=	$\frac{3 \times 9}{4}$	=	$\frac{27}{4}$
(2)	$5 \times 1\frac{2}{3}$	=	______	=	____	=	___
(3)	$2 \times 4\frac{1}{2}$	=	______	=	____	=	___
(4)	$4 \times 3\frac{2}{3}$	=	______	=	____	=	___

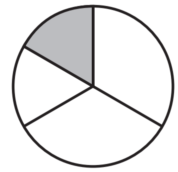
आइए हम भिन्न का भिन्न से गुणन की एक और स्थिति को देखते हैं।

(a) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ का $\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{6}$



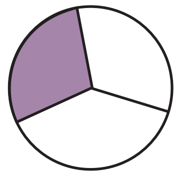
$\frac{1}{3}$



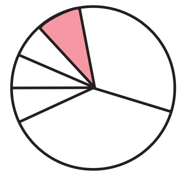
$\frac{1}{3}$ का $\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

(b) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ का $\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{12}$



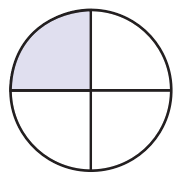
$\frac{1}{3}$



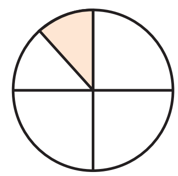
$\frac{1}{3}$ का $\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

(c) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ का $\frac{1}{2}$

= ____

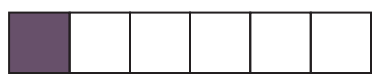


$\frac{1}{4}$

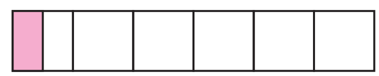


$\frac{1}{4}$ का $\frac{1}{2}$ = ______

(d) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ का $\frac{1}{2}$ = ____



$\frac{1}{6}$



$\frac{1}{6}$ का $\frac{1}{2}$ = ______

दिए गए उदाहरणों से पता चलता है कि भिन्नों के गुणन में अंश, अंश से तथा हर, हर से गुणा होता है।

उदाहरण:- $\frac{4}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4 \times 2}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$

$\frac{2}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{2 \times 1}{7 \times 3} = \frac{2}{21}$

गुणन कीजिए

(1) $\frac{4}{5} \times \frac{1}{7}$

(2) $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$

(3) $\frac{1}{9} \times \frac{5}{2}$

(4) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$

(5) $\frac{4}{11} \times \frac{3}{7}$

(6) $\frac{1}{6} \times \frac{2}{5}$

आइए अब हम कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास करते हैं।

(1) श्वेता ने आधे पिज़्ज़ा का $\frac{1}{4}$ भाग रमेश को दिया। रमेश ने पिज़्ज़ा का कितना भाग खाया ?

(2) नीरज ने 2 कि० ग्रा० चीनी खरीदी। उसकी माँ ने उसे $\frac{1}{2}$ कि० ग्रा० चीनी और दे दी। नीरज के पास अब कुल कितनी चीनी है ?

(3) दीपिका ने एक पट्टी के $\frac{1}{6}$ भाग में लाल रंग किया और $\frac{1}{5}$ भाग में पीला रंग किया। उसने कुल मिलाकर पट्टी के कितने भाग में रंग किया ?

(4) अनुष्का ने सब्जी मार्किट से डेढ़ $\left(1\frac{1}{2}\right)$ किलो आलू खरीदे। आलू का मूल्य 14 रुपये/किलो है। अनुष्का द्वारा दी गई राशि बताओ ?

(5) रमेश के पास कुल 24 कंचे हैं। उसमें से एक चौथाई $\left(\frac{1}{4}\right)$ कंचे उसने माहिरा को दे दिए। तो उसने कुल कितने कंचे माहिरा को दिए।

भिन्नों के गुणन को सरलतम रूप में लिखना

भिन्न के गुणन को सरलतम रूप में लिखिए :-

उदाहरण

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{6} = \frac{2 \times 4}{3 \times 6} = \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{18}_{9}} = \frac{4}{9}$$

हम भिन्नों के गुणन को नीचे दिए गए प्रकार से आसानी से सरलतम रूप में लिख सकते हैं जैसे

(1) $\frac{2}{3} \times \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$

4 और 6 दोनों संख्या 2 से भाग हो रहे हैं।

(2) $\frac{\cancel{6}^{2}}{7} \times \frac{2}{\cancel{3}} = \frac{2 \times 2}{7 \times 1} = \frac{4}{7}$

6 और 3 दोनों संख्या 3 से भाग हो रहे है।

(3) $\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{9}_{3}} \times \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{2 \times 5}{3 \times 3} = \frac{10}{9}$

4 और 6 संख्या 2 से तथा 15 और 9 संख्या 3 से भाग हो रहे हैं।

उदाहरण संख्या (2) और (3) में हमने पहले भिन्न के अंश और दूसरे भिन्न के हर को भाग का प्रयोग कर सरल किया है । हमने ऐसा क्यों किया, आइए समझते हैं।

$$\frac{6}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{6 \times 2}{7 \times 3} = \frac{6 \times 2}{3 \times 7}$$
$$= \frac{6}{3} \times \frac{2}{7}$$

संख्याओं का गुणन क्रमविनिमेय होता है।
इसलिए 7 x 3 = 3x7

भिन्नों को सरलतम रूप में लिखिए

(1) $\frac{8}{9} \times \frac{6}{11} =$

(2) $\frac{3}{10} \times \frac{2}{5} =$

(3) $\frac{3}{7} \times \frac{14}{5} =$

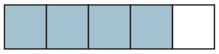
(4) $\frac{7}{8} \times \frac{2}{7} =$

(5) $\frac{8}{11} \times \frac{3}{4} =$

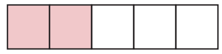
(6) $\frac{5}{12} \times \frac{4}{10} =$

पूर्ण संख्या से भिन्न की भाग

आइए एक उदाहरण को समझते है। हम $\frac{4}{5} \div 2$ करना चाहते हैं।



$\frac{4}{5}$



$\frac{4}{5} \div 2 = \frac{2}{5}$

यहाँ हम $\frac{4}{5}$, छायांकित भागों को 2 बराबर भागों में बाँट रहे हैं।

इस प्रकार से

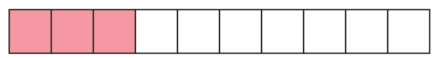
$$\frac{4}{5} \div 2 = 4 \times \frac{1}{5} \div 2 = \frac{4}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{4 \times 1}{5 \times 2}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{2}{5}$$

यहाँ हमने $\frac{4}{5}$ को 2 के व्युत्क्रम से गुणा किया है।

$\frac{9}{10}$



$\frac{9}{10} \div 3 = \frac{3}{5}$

यहाँ भी हम $\frac{9}{10}$ छायांकित भागों को 3 बराबर भागों में बाँट रहे है।

इस प्रकार से

$$\frac{9}{10} \div 3 = 9 \times \frac{1}{10} \div 3 = \frac{9}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{9 \times 1}{3 \times 10}$$

$$\frac{9 \times 1}{10 \times 3} = \frac{9}{10} \times \frac{1}{3}$$

$$\frac{9}{10} \div 3 = \frac{9}{10} \times \frac{1}{3}$$
$$= \frac{3}{10}$$

यहाँ हमने $\frac{9}{10}$ को 3 के व्युत्क्रम से गुणा किया है।

भिन्न को पूर्ण संख्या से भाग करने के लिए, उस भिन्न को पूर्ण संख्या के व्युत्क्रम से गुणा कर दीजिए।

अभ्यास कीजिए

(1) $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{5} \div 3 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \underline{\qquad} = \underline{\quad}$

(3) $\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \underline{\qquad} = \underline{\quad}$

(4) $\frac{6}{8} \div 2 = \frac{6}{8} \times \frac{1}{2} = \underline{\qquad} = \underline{\quad}$

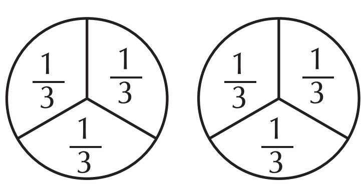
भिन्न से पूर्ण संख्या की भाग

$8 \div 2$ का एक अर्थ यह भी है कि 2 कितनी बार जुड़कर या मिलकर 8 बनाता है।

$2 + 2 + 2 + 2$ उ० $\boxed{4}$

1) इसी प्रकार $2 \div \frac{1}{3}$ का अर्थ होगा कि कितने $\frac{1}{3}$ मिलकर 2 पूर्ण बनाएँगे ?

आइए, आकृति बनाकर जाँचते हैं।



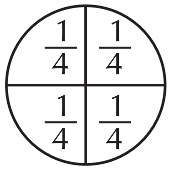
$2 \div \frac{1}{3} = 2 \times 3$

यदि हम $\frac{1}{3}$ को 6 बार मिलाएँ तो 2 पूर्ण बनते हैं।

इसलिए $2 \div \frac{1}{3} = 6$

$2 \times \frac{1}{3}\left(\text{का व्युत्क्रम}\right) = 2 \times 3 = 6$

2) $1 \div \frac{1}{4} \Rightarrow$ कितने $\frac{1}{4}$ मिलकर 1 पूर्ण बनाएँगे ?________

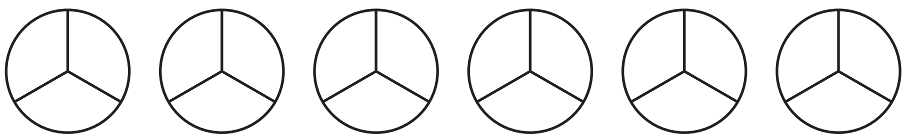


$1 \div \frac{1}{4} = 1 \times 4$

$= 4$

$1 \times \frac{1}{4}$(का व्युत्क्रम) $= 1 \times 4 = 4$

3) $6 \div \frac{1}{3} \Rightarrow$ कितने $\frac{1}{3}$ मिलकर 6 पूर्ण बनाएँगे ?________

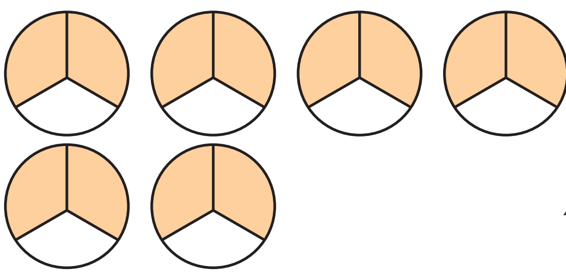


$6 \div \frac{1}{3} = 6 \times 3$

$= 18$

$6 \times \frac{1}{3}$ का व्युत्क्रम $= 6 \times 3 = 18$

4) $4 \div \frac{2}{3} \Rightarrow$ कितने $\frac{2}{3}$ मिलकर 4 पूर्ण बनाएँगे ? ________



$4 \div \frac{2}{3} = \_\_ \times \_\_ = \_\_$

पूर्ण संख्या को एक भिन्न से भाग करने के लिए
उस पूर्ण संख्या को उस भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा कर दीजिए।

दिए गए उदाहरणों के अनुसार, हल कीजिए

(1) $6 \div \frac{2}{5} = \overset{3}{\cancel{6}} \times \frac{5}{\cancel{2}} = 15$

(2) $9 \div \frac{3}{4} = \overset{3}{\cancel{9}} \times \frac{4}{\cancel{3}} = 12$

(3) $3 \div \frac{1}{2} =$

(4) $8 \div \frac{1}{4} =$

(5) $5 \div \frac{1}{5} =$

(6) $7 \div \frac{1}{7} =$

उदाहरणः-

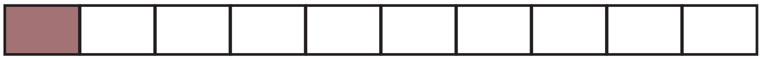
$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$	$\frac{1}{2} \div \frac{7}{3}$
$\frac{2}{3} \times (\frac{4}{5}$ का व्युत्क्रम$)$	$\frac{1}{2} \times (\frac{7}{3}$ का व्युत्क्रम$)$
$\frac{\cancel{2}^{1}}{3} \times \frac{5}{\cancel{4}_{2}} = \frac{1 \times 5}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$	$\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{1 \times 3}{2 \times 7} = \frac{3}{14}$

अब आप प्रयास कीजिए।

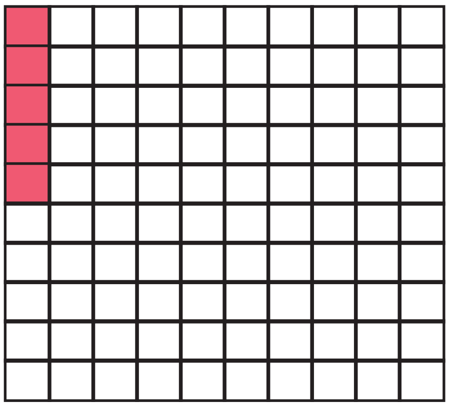
(1) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}$	(2) $\frac{5}{4} \div \frac{1}{3}$	(3) $\frac{4}{9} \div \frac{3}{5}$
(4) $\frac{8}{15} \div \frac{3}{4}$	(5) $\frac{4}{3} \div \frac{2}{3}$	(6) $\frac{1}{7} \div \frac{2}{3}$

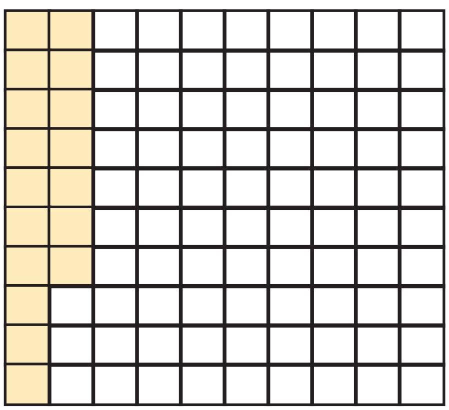
हमने कक्षा VI में दशमलव संख्याओं के बारे में पढ़ा था। आइए दशमलव संख्याओं को दोहराते हुए, इसे और अधिक समझने का प्रयास करते हैं।

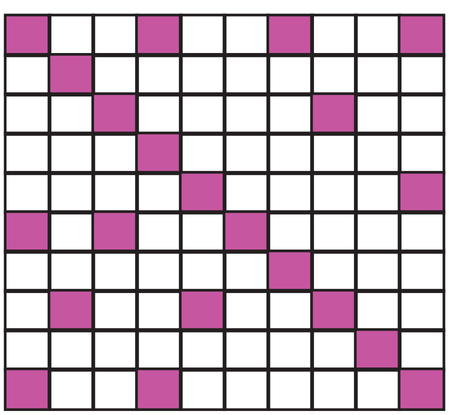
नीचे दिए गए चित्रों में छायांकित भाग को दशमलव रूप में उनके सामने लिखिए।

(i)  ________

(ii)  ________

(iii)  ________

(iv)  ________

(v)  ________

दशमलव संख्याओं को भिन्न रूप में बदलना

आइए हम कुछ उदाहरणों को समझने का प्रयास करते हैं।

(1) 4.7 = 4 पूर्ण तथा 7 दशांश = $4 + \frac{7}{10} = 4\frac{7}{10} = \frac{47}{10}$

4.7 को हम $\frac{47}{10}$ भी लिख सकते हैं।

इसी प्रकार,

(2) 4.75 = 4 पूर्ण, 7 दशांश तथा 5 शतांश है।

$= 4 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$ **(भिन्न में बदलना।)**

$\frac{4\times100}{1\times100} + \frac{7\times10}{10\times10} + \frac{5}{100}$ **(सभी भिन्नों का हर समान करना।)**

$\frac{400}{100} + \frac{70}{100} + \frac{5}{100} = \frac{475}{100}$ **(भिन्नों का योग)**

4.75 को हम $\frac{475}{100}$ भी लिख सकते है।

दायें से जितने अंकों के बाद दशमलव है, उसी के आधार पर हम 10 के गुणज से संख्या को भाग करेंगे जैसे 4.7 में दायें से 1 अंक बाद दशमलव है तो हम संख्या का दशमलव हटाकर उसे 10 से भाग करेंगे। 4.75 में दायें से 2 अंक बाद दशमलव है तो हम संख्या का दशमलव हटाकर उसे 100 से भाग करेंगे। 0.475 में दायें से 3 अंक बाद दशमलव है तो हम संख्या का दशमलव हटाकर उसे 1000 से भाग करेंगे।

$4.7 = \frac{47}{10}$

$4.75 = \frac{475}{100}$

$0.475 = \frac{475}{1000}$

दशमलव संख्याओं को भिन्न रूप में बदलिए

(1) 3.7 =

(2) 1.49 =

(3) 34.8 =

(4) .48 =

(5) 3.78 =

(6) 1.478 =

प्र० दशमलव संख्याओं को बढ़ते क्रम में लिखिए।

0.1001, 1.1101, 1.1010, 0.01010, 1.10, 0.110, 0.0100, 0.0110

________, ________, ________, ________, ________, ________, ________, ________

प्र० दो दशमलव संख्याओं 2.5 व 0.03 का योग(जोड़)
दो छात्रों मनदीप तथा साहिल ने निम्न प्रकार किया

(i) मनदीप द्वारा किया गया जोड़

2.5 + 0.03

$$\begin{array}{r} 2.5 \\ +\ 0.03 \\ \hline 2.08 \\ \hline \end{array}$$

(ii) साहिल द्वारा किया गया जोड़

2.5 + 0.03

$$\begin{array}{r} 2.5 \\ +\ 0.03 \\ \hline 2.53 \\ \hline \end{array}$$

दोनों में किसने सही हल किया? (अपनी कक्षा में चर्चा कीजिए)

दी गई दशमलव संख्याओं का जोड़ व घटाव कीजिए।

(i) 0.45 + .26

(ii) 0.03 + 30.6

(iii) 3.06 - 2.7

(iv) 5.75 - 5.05

(v) 0.79 + 0.017

(vi) 0.95 + 0.003

दशमलव संख्याओं का गुणन

दशमलव संख्याओं का 10, 100 और 1000 से गुणन

1) $2.3 \times 10 = \frac{23}{10} \times 10 = 23$

(23 को हम 23.0 भी लिख सकते हैं) →

2) $2.3 \times 100 = \frac{23}{10} \times 100 = 230$

(230 को हम 230.0 भी लिख सकते हैं) →

3) $2.3 \times 1000 = \frac{23}{10} \times 1000 = 2300$

(2300 को हम 2300.0 भी लिख सकते हैं) →

हमने देखा कि

दशमलव संख्या को 10 से गुणा करने पर दशमलव एक अंक दायें ओर लग जाता है।

दशमलव संख्या को 100 से गुणा करने पर दशमलव दो अंक दायें ओर लग जाता है।

दशमलव संख्या को 1000 से गुणा करने पर दशमलव तीन अंक दायें ओर लग जाता है।

आइए हम कुछ और उदाहरणों को ध्यानपूर्वक समझते हैं।

(1) $4.4 \times 1000 = 4400$

(2) $3.94 \times 10 = 39.4$

(3) $.404 \times 100 = 40.4$

(4) $1.141 \times 1000 = 1141$

क्या हम, 4.4 को 4.4000 भी लिख सकते हैं ?

अपनी कक्षा में चर्चा कीजिए।

गुणन कीजिए

(a) $3.84 \times 10 =$ _____

(b) $1.923 \times 100 =$ _____

(c) $72.25 \times 10 =$ _____

(d) $7.7 \times 100 =$ _____

(e) $0.42 \times 10 =$ _____

(f) $0.479 \times 100 =$ _____

(g) $273.1 \times 1000 =$ _____

(h) $3.1 \times 1000 =$ _____

दशमलव संख्या का एक पूर्ण संख्या से गुणन

इसे आप चित्र-1 (जो कि अगले पृष्ठ पर है), द्वारा समझने का प्रयास करिए।

उदाहरण :- 1) 3×0.5 (3 बार 0.5) $= 0.5+0.5+0.5 = 1.5$

2) $2 \times 0.15 = 0.15+0.15 = 0.30$

यहाँ गुणन का अर्थ समान संख्या का बार-बार जोड़ के रूप में लिया गया है।

अब आप प्रयास कीजिए।

(1) $3 \times 0.3 = 0.3+0.3+0.3 = 0.9$

(2) $2 \times 0.8 =$ ____________ $=$ ___

(3) $4 \times 0.12 =$ ____________ $=$ ___

(4) $5 \times 1.15 =$ ____________ $=$ ___

नीचे दिए गए उदाहरण को अपनी कक्षा में साथियों के साथ चर्चा करके समझने का प्रयास कीजिए।

$$\begin{array}{r} 4.35 \\ \times \quad 8 \\ \hline 34.80 \\ \hline \end{array}$$

अब आप प्रयास कीजिए।

(1) $\begin{array}{r} 2.87 \\ \times 3 \\ \hline \\ \hline \end{array}$	(2) $\begin{array}{r} 5.61 \\ \times 9 \\ \hline \\ \hline \end{array}$	(3) $\begin{array}{r} 8.88 \\ \times 5 \\ \hline \\ \hline \end{array}$	(4) $\begin{array}{r} 9.03 \\ \times 4 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

आइए कुछ उदाहरणों को समझने का प्रयास करते हैं।

1) राजीव सब्जी मंडी में सब्जी लेने जाता है। उसने 2kg सीताफल 15 रु/प्रति कि.ग्रा. की दर से लिया। उसने कितनी राशि खर्च की ?

हल : 2×15 रु $= 30$ रु

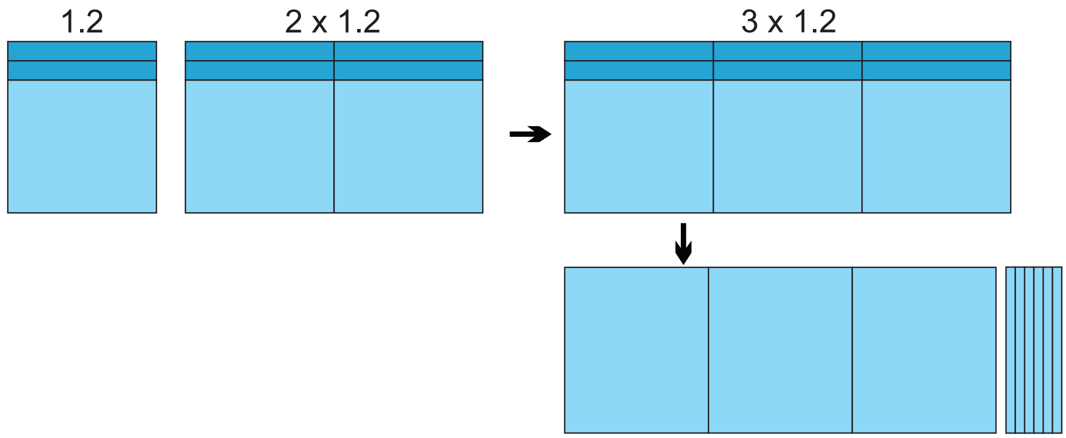
2) उसने 1.5 kg टमाटर 20.50 रु प्रति कि. ग्रा. की दर से लिया। उसने दुकानदार को कितनी राशि दी ?

हल : 1.5×20.50 रु

दशमलव की गुणा

(1) पूर्ण संख्या की दशमलव संख्या से गुणा

3 x 1.2



(चित्र-1)

(2) दशमलव संख्या का दशमलव संख्या से गुणा

3.1 x 1.2

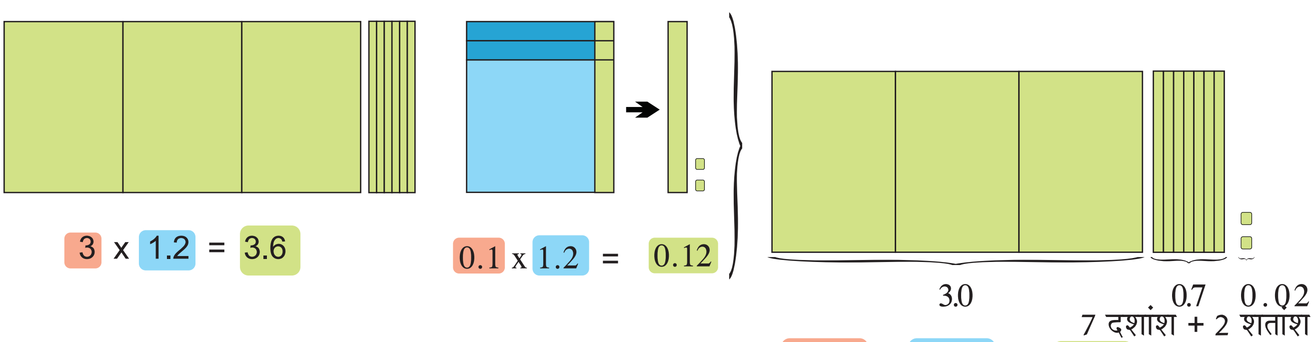
चूकि दशमलव भी पूर्णांकों की तरह वितरण नियम
संतुष्ट करते है इसलिए

3.1 x 1.2

= (3 + 0.1) x 1.2

= (3 x 1.2 + 0.1 x 1.2) = (3.60 + 0.12 = 3.72)

$$\begin{array}{r} 3.6 \\ +\ 0.12 \\ \hline 3.72 \\ \hline \end{array}$$



(चित्र-2)

3.1 x 1.2 = 3.72

यहाँ हमें दशमलव संख्या का दशमलव संख्या से गुणन की आवश्यकता हुई । इसे आप पिछले पृष्ठ पर चित्र-2 से समझने का प्रयास करिए।

दशमलव संख्याओं का गुणन

हमने भिन्नों का गुणन सीख लिया है। भिन्नों के गुणन सहायता से हम दशमलव संख्याओं का गुणन करना सीखते हैं।

(1) $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1 \times 1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0.01$

(2) $0.5 \times 0.3 = \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{5 \times 3}{10 \times 10} = \frac{15}{100} = 0.15$

(3) $0.7 \times 0.2 =$ ________ = ________ = ______ = _____

(4) $0.2 \times 0.5 =$ ________ = ________ = ______ = _____

(5) $1.2 \times 3.4 = \frac{12}{10} \times \frac{34}{10} = \frac{12 \times 34}{10 \times 10} = \frac{408}{100} = 4.08$

आइए नीचे दिए गए उदाहरण को अपनी कक्षा में साथियों के साथ चर्चा करके समझने का प्रयास कीजिए।

उदाहरण 1 :

$$\begin{array}{r} 1.2 \\ \times\, 3.4 \\ \hline 48 \\ 36\times \\ \hline 4.08 \\ \hline \end{array}$$

उदाहरण 2 :

$$\begin{array}{r} 4.5 \\ \times\, 8.6 \\ \hline 270 \\ 360\times \\ \hline 38.70 \\ \hline \end{array}$$

अब आप प्रयास कीजिए।

(1) 2.5×0.5

$$\begin{array}{r} 2.5 \\ \times\, 0.5 \\ \hline 125 \\ 00\times \\ \hline 1.25 \\ \hline \end{array}$$

(2) 1.3×2.4

$$\begin{array}{r} 1.3 \\ \times\, 2.4 \\ \hline \end{array}$$

(3) 11.2×0.5

(4) 1.03×0.03

(5) 4.21×1.4

(6) 57.2×0.9

10, 100 और 1000 से भाग

पैटर्न को ध्यानपूर्वक देखिए और समझिए।

(1) $7.5 \div 10 = \frac{75}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{75}{100} = 0.75$

(2) $7.5 \div 100 = \frac{75}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{75}{1000} = 0.075$

(3) $7.5 \div 1000 = \frac{75}{10} \times \frac{1}{1000} = \frac{75}{10000} = 0.0075$

क्या हम संख्याओं को 10, 100 अथवा 1000 से भाग करने का कोई नियम पता कर पाए ?
अध्यापक व साथियों के साथ चर्चा कीजिए।

प्राप्त नियम

$47.5 \div 10 = 4.75$ ⟶ संख्या को 10 से भाग करने पर दशमलव एक अंक बायीं ओर लगता है।

$47.5 \div 100 = .475$ ⟶ संख्या को 100 से भाग करने पर दशमलव दो अंक बायीं ओर लगता है।

$47.5 \div 1000 = .0475$ ⟶ संख्या को 1000 से भाग करने पर दशमलव तीन अंक बायीं ओर लगता है।

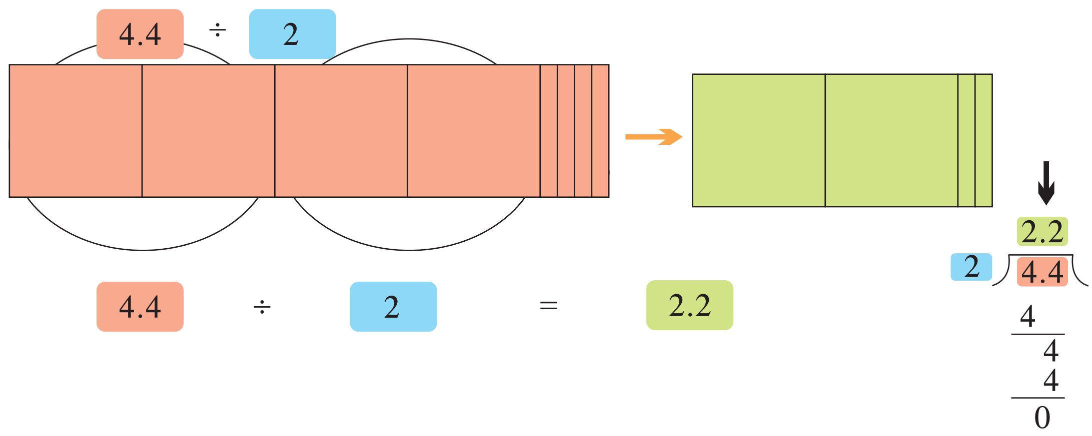
भाग कीजिए

(1) $3.4 \div 10 =$ ____	(4) $2.43 \div 10 =$ ____	(7) $0.14 \div 10 =$ ____
(2) $2.9 \div 100 =$ ____	(5) $4.93 \div 100 =$ ____	(8) $0.25 \div 100 =$ ____
(3) $8.2 \div 1000 =$ ____	(6) $7.21 \div 1000 =$ ____	(9) $0.39 \div 1000 =$ ____

पूर्ण संख्या से दशमलव की भाग

आइए से दशमलव संख्या का पूर्ण संख्या से भाग को एक चित्र द्वारा समझने का प्रयास करते हैं।

दशमलव संख्या का पूर्ण संख्या से भाग



आइए कुछ उदाहरणों को समझते हैं।

उदाहरण : 8.2 ÷ 2 को हम इस प्रकार हल कर सकते हैं।

2)8.2(4.1
8
2
2
0

(8 इकाई का 2 से भाग करने पर 4 इकाई मिली और 2 दशांश को 2 से भाग करने पर 1 दशांश मिलेगा।)

8.2 = 8 इकाई +2 दशांश

8.2 ÷ 2 = 4 इकाई +1 दशांश

= 4.1

उदाहरण : 3.5 ÷ 5

5)3.5(.7
3.5
0

(3 इकाई तो 5 से भाग जाएगा नहीं। इसलिए हमें इकाई को दशांश में बदलना होगा। 3 इकाई = 30 दशांश होता है। इसलिए हमारे पास अब कुल 35 दशांश हो गए। 35 दशांश भाग 5 बराबर 7 दशांश होता है।)

3.5 = 3 इकाई + 5 दशांश = 30 दशांश + 5 दशांश

$3.5 \div 5 = \dfrac{35 \text{ दशांश}}{5}$ = 7 दशांश = 0.7

अब आप प्रयास कीजिए।

(1) $4.6 \div 2$ $2\overline{)4.6}($ (2) $8.2 \div 5$ $5\overline{)8.2}($ (3) $17.2 \div 4$ $4\overline{)17.2}($

(4) $18.8 \div 4$ $4\overline{)18.8}($ (5) $13.5 \div 5$ $5\overline{)13.5}($ (6) $3.44 \div 8$ $8\overline{)3.44}($

हम दशमलव संख्याओं के भाग को भाजक के व्युत्क्रम का प्रयोग करके भी कर सकते है। कुछ इस प्रकार से–

(1) $8.2 \div 2$ $= 8.2 \times$ (2 का व्युत्क्रम) $= \frac{\overset{41}{\cancel{82}}}{10} \times \frac{1}{\cancel{2}_1} = \frac{41 \times 1}{10 \times 1} = \frac{41}{10} = 4.1$

(2) $3.5 \div 5$ $= 3.5 \times$ (5 का व्युत्क्रम) $= \frac{\overset{7}{\cancel{35}}}{10} \times \frac{1}{\cancel{5}_1} = \frac{7 \times 1}{10 \times 1} = \frac{7}{10} = 0.7$

(3) $4.9 \div 5$ $= 4.9 \times$ (5 का व्युत्क्रम) $= \frac{49}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{49 \times 1}{10 \times 5} = \frac{49}{50} = \frac{49 \times 2}{50 \times 2} = \frac{98}{100} = 0.98$

(भिन्न के हर में 10 का गुणज लाने का प्रयास करते हैं।)

ऊपर दिए गए उदाहरणों के अनुसार सवालों को हल करने का प्रयास कीजिए।

(1) $6.8 \div 2$

(4) $2.7 \div 3$

(2) $5.2 \div 4$

(5) $9.3 \div 3$

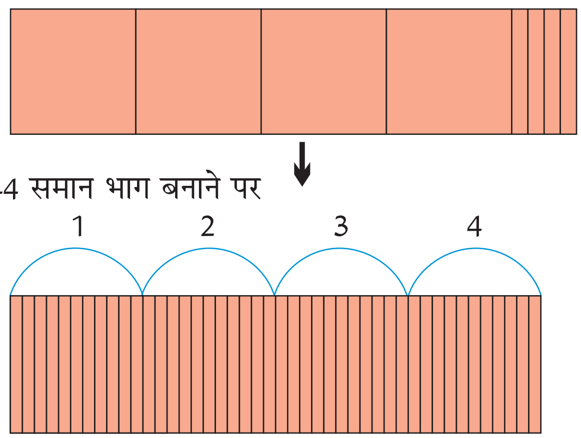
(3) $3.6 \div 3$

(6) $7.2 \div 9$

दशमलव संख्या की दशमलव संख्याओं से भाग

आइए एक चित्र द्वारा दशमलव संख्या की दशमलव संख्या से भाग समझने का प्रयास करते हैं।

$4.4 \div 1.1$



$4.4 \div 1.1$

$= 4.4 \div 1.1$

$= \dfrac{4.4}{1.1}$

$= 4$

$1.1 \overline{)4.4}$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 1.1\overline{)4.4} \\ -4.4 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

$4.4 \div 1.1 = 4$

आइए हम देखते हैं कि राजू और सलमा 39.3 को 0.3 से भाग के हल तक कैसे पहुँचते हैं।

सलमा का तरीका	**राजू का तरीका**
$= 39.3 \div 0.3 \quad = \dfrac{39.3}{0.3}$	$= 39.3 \div 0.3 \quad = \dfrac{393}{10} \div \dfrac{3}{10}$
$= \dfrac{39.3 \times 10}{0.3 \times 10}$	$= \dfrac{393}{10} \times \dfrac{10}{3} = \dfrac{393}{10} \times \dfrac{10}{3}$
$= \dfrac{\cancel{393}^{131}}{\cancel{3}_{1}} = 131$	$= \dfrac{\cancel{393}^{131}}{\cancel{3}_{1}} = 131$

हमने देखा, सलमा और राजू दोनों ने अलग-अलग तरीकों से सवाल को हल किया। दोनों स्थितियों में हम एक ही उत्तर तक पहुँचे, परन्तु दोनों के तरीकों में अन्तर था। हम भी किसी भी सवाल को अलग-अलग तरीकों से हल कर सकते हैं। आइए एक और उदाहरण देखते हैं।

सलमा का तरीका	**राजू का तरीका**
$= 4.65 \div 1.5 = \dfrac{4.65}{1.5}$	$= 4.65 \div 1.5 = \dfrac{465}{100} \div \dfrac{15}{10}$
$= \dfrac{4.65 \times 100}{1.5 \times 100}$	$= \dfrac{465}{\cancel{100}_{10}} \times \dfrac{\cancel{10}^{1}}{15} = \dfrac{465}{150}$
$= \dfrac{\cancel{\cancel{465}}^{\cancel{155}\ 31}}{\cancel{\cancel{150}}_{\cancel{50}\ 10}} = \dfrac{31}{10} = 3.1$	$= \dfrac{\cancel{\cancel{465}}^{\cancel{155}\ 31}}{\cancel{\cancel{150}}_{\cancel{50}\ 10}} = \dfrac{31}{10} = 3.1$

पीछे दिये गए दोनों प्रश्नों में हमने देखा कि पहले हमने दशमलव संख्याओं को पूर्णांकों में बदला, जिससे हमें भाग करने में आसानी हुई।

अब यदि हमें 46.5 को 0.15 से भाग करना हो तो आप कैसे करेंगे? प्रयास कीजिए।

$46.5 \div 0.15$

आइए अब और प्रश्नों का अभ्यास करते हैं।

(1) $22.5 \div 1.5$

(2) $2.5 \div 0.5$

(3) $15 \div 2 \div 0.8$

(4) $3.96 \div 0.5$

(5) $2.31 \div 0.3$

(6) $33.725 \div 0.25$

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

1. भिन्न की समझ एवं संक्रियाएँ
2. दशमलव की समझ एवं संक्रियाएँ
3. भिन्न एवं दशमलव में संबंध।

अध्याय –3 आँकड़ों का प्रबंधन

कहानी में गणित

पिकनिक-रिपोर्ट (Local Tour)

बच्चों को विद्यालय की तरफ से पिकनिक पर ले जाया जाना तय हुआ। विद्यालय में आज पिकनिक पर जाने की तैयारियाँ बड़े जोर शोर से चल रही थी। कक्षा अध्यापक कल के प्रोग्राम के बारे में जानकारी दे रहे थे। सभी बच्चे बहुत खुश थे।

राधाः सुनो-सुनो। कल हमारी कक्षा लाल किला देखने जाएगी। कक्षा अध्यापिका ने बताया है कि सातवीं कक्षा लाल किला, छठी कक्षा इंडिया गेट, आठवीं कक्षा प्रगति मैदान, नवीं कक्षा कुतुबमीनार, दसवीं कक्षा मुगल गार्डन तथा 1 से 5 तक की कक्षाएँ चिड़ियाघर जाएँगी। बाद में सभी को चिल्ड्रन पार्क में खेलने का भी मौका मिलेगा।

कहानी में दिए गए आँकड़ों को सारणीबद्ध कीजिए।

क्र. स.	कक्षा	पिकनिक का स्थान
1	I	चिड़ियाघर
2	II	
3	III	
4	IV	
5	V	
6	VI	
7	VII	
8	VIII	
9	IX	
10	X	

सारणी में आँकड़ों को समझना तथा व्याख्या करना आसान होता है।

सारणी से आसानी से पता चल सकता है कि कौन सी कक्षा कहाँ पिकनिक पर जाएगी।

पिकनिक का दिन

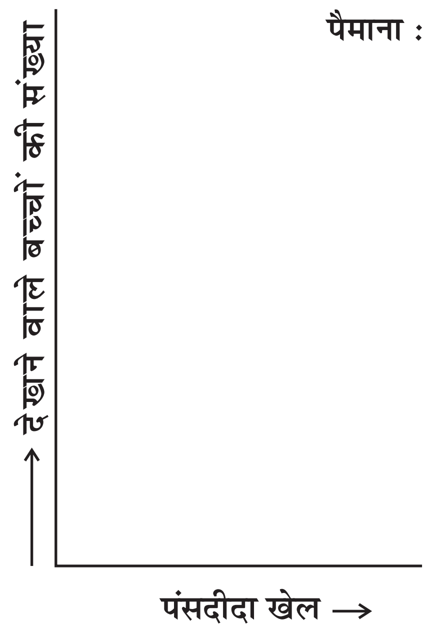
सुबह-सुबह सभी कक्षाएँ अपने-अपने गन्तव्य स्थानों के लिए रवाना हो गईं। कक्षा सात के बच्चे भी लाल किला घूमते हुए चिल्ड्रन पार्क में पहुँचें।

चिल्ड्रन पार्क पँहुचते ही सभी बच्चों ने खेलने का प्रोग्राम बना लिया। लड़कों ने क्रिकेट तथा फुटबॉल के सामान पर कब्जा किया तो लड़कियों ने बैडमिन्टन तथा लूडो पर अपना अधिकार जमाया। देखते ही देखते सभी बच्चे दो भागों में बँट गए। कुछ ने खेलों में भाग लिया तथा कुछ ने खेलों को देखने का आनन्द उठाया।

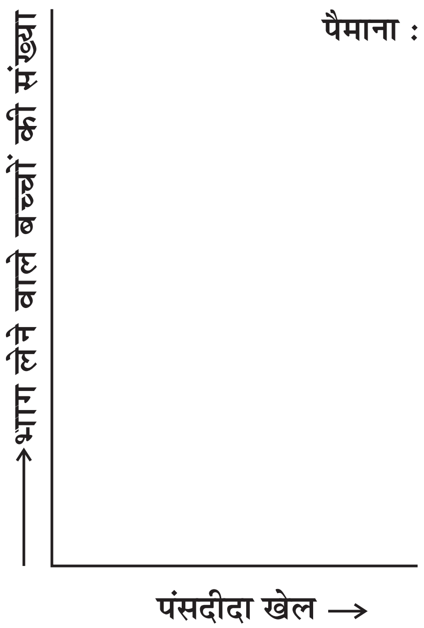
<u>दोहरा दंड आलेख खींचना तथा व्याख्या</u>

नीचे दी गई सारणी के दंड आलेख बनाइए

पसंदीदा खेल	क्रिकेट	बैडमिन्टन	फुटबॉल	साफ्टबॉल
देखने वाले बच्चों की संख्या	124	47	51	43
भाग लेने वाले बच्चों की संख्या	62	32	32	25



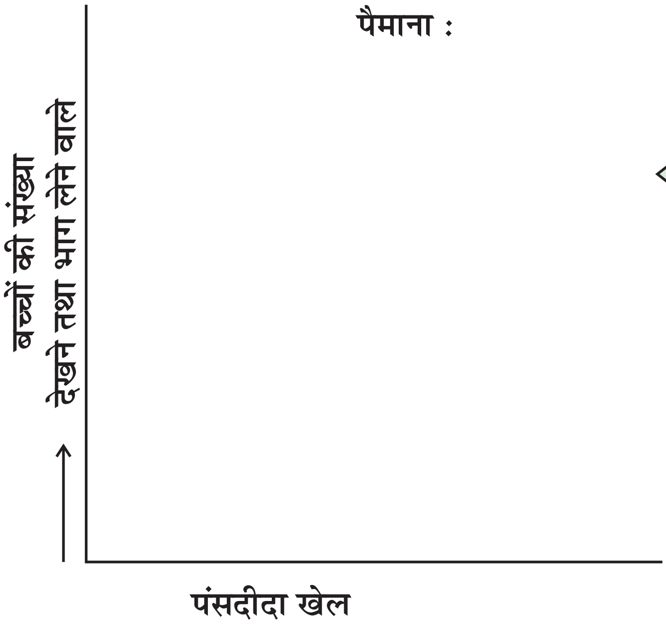
दंड आलेख - I



दंड आलेख - II

ऊपर बनाए गए दण्ड आलेख – I तथा दंड आलेख – II को एक ही दंड आलेख में खींचा जा सकता है। (दोहरा दंड आलेख)

(दोहरा दंड आलेख)



दोहरे दंड आलेख से दो वस्तुओं की तुलना की जा सकती है। कि दोनों में से कौन सी बेहतर है। (कौन सा खेल बच्चे अधिक पसंद करते है अथवा खेलना या भाग लेना आदि।)

Sa_1 तथा SA_2 के रिजल्ट की तुलना करके निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि किए गए सुधारों का क्या फर्क पड़ा (SA_1 के बाद और आगे क्या किया जाए।)

प्रसार या परिसर

खेल के दौरान सातवीं कक्षा में मोहन ने 6 पारियों में 37, 34, 50, 46, 60 तथा 55 रन बनाए।

उपरोक्त बॉक्स में से छाँटकर नीचे दिए गए बॉक्स भरिए।

मोहन द्वारा एक पारी में बनाए गए सबसे कम रनों की संख्या – ☐

सबसे अधिक रनों की संख्या – ☐

सबसे अधिक रन तथा सबसे कम रनों का अन्तर – ☐

यह अन्तर ही परिसर कहलाता है।

सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के अन्तर से प्रेक्षणों के प्रसार या परिसर का अनुमान लगाया जा सकता है।

केन्द्रीय प्रवृत्तियाँ

1) औसत(अंकगणितीय) माध्य

2) माध्यक

3) बहुलक

1) **माध्य**

मोहन के द्वारा 6 पारियों में बनाए गए रनों 37, 34, 50, 46, 60 तथा 55 का औसत

$$\frac{37 + 34 + 50 + 46 + 60 + 55}{6} = \frac{282}{6} = 47$$

रनों का औसत 47 हैं, परन्तु 6 पारियों में किसी भी पारी में मोहन ने 47 रन नहीं बनाए।

$$\frac{34 + 60}{2} = 47$$

सबसे कम संख्या = 34 दोनों का मध्य मान 47 हैं।

सबसे अधिक संख्या = 60

या (47), 6 पारियों (37, 34, 50, 46, 60, 55) के सभी मानों का प्रतिनिधि मान है। इसे माध्य कहा जाता है।

माध्य सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के बीच में स्थित होता है। इसलिए इसे केन्द्रीय प्रवृत्ति कहते हैं।

आँकड़ों की विभिन्न व्याख्या के लिए विभिन्न केन्द्रीय प्रवृत्तियों की या प्रतिनिधि मानों की आवश्यकता होती है।

2) बहुलक

लंच-टाइम (Lunch - Time) :

लंच के दौरान सभी बच्चे एक स्थान पर एकत्रित हो गए।

मारिया:हमें खाने में आलू की सब्जी और पूड़ी मिलने वाली है। मैम पूछ रही है कि कौन कितनी-कितनी पूड़ियाँ खाएगा?

25 विद्यार्थी में से प्रत्येक ने आवश्यक पूड़ियाँ की संख्या इस प्रकार बताई

2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 4, 4, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 5, 2, 2, 3, 2, 4

उपरोक्त बताई गई पूड़ियाँ की संख्या में **सबसे अधिक बार आने वाली संख्या ही बहुलक है।**

जैसे पूड़ियाँ की संख्या का बहुलक 2 है।

बहुलक × बच्चों की संख्या(विद्यार्थी) = 2 × 25

= 50

अत: अध्यापिका ने 50 पूड़ियाँ मँगवाईं।

अत: बहुलक निर्णय लेने के लिए प्रयोग किया जा सकता है।

बहुलक आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षणों को दर्शाता है।

बड़े आँकड़ों का बहुलक, आँकड़ों को सारणीबद्ध करके तथा मिलान चिन्हों का प्रयोग करके आसानी से निकाला जा सकता है।

बहुलक का प्रयोग करके अध्यापिका ने निर्णय लिया कि कुल कितनी पूड़ियाँ मगवाई जाएँ।

दुकानदार ज्यादा बिकने वाली चीज़ों को अपनी दुकान मे अधिक मात्रा में रखता है।
(वह बहुलक का प्रयोग करता है।)

जैसे जूतों की दुकान पर यदि 7 नम्बर का जूता अधिक बिकता है तो दुकानदार 7 नम्बर का जूता स्टॉक में अधिक रखेगा।

3) माध्यक

टीमें बाँटना:

लाल किले से बाहर निकलते हुए बच्चों को भार (वजन) तौलने की मशीन दिखाई दे गई। उस पर चढ़कर सातवीं कक्षा के 15 बच्चों ने अपना भार ज्ञात किया। उनका भार(kg) में इस प्रकार था।

38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47

अध्यापिका: **वीर और लारा इन 15 बच्चों की दो टीमें बनानी हैं। पर मेरी दो शर्तें इस प्रकार है।**

1) **दोनों टीमों में बच्चों की संख्या बराबर हो।**
2) **एक टीम में 40 कि॰ ग्रा॰ (kg) से कम भार के बच्चे तथा दूसरी टीम में 40 कि॰ ग्रा॰ (kg) से अधिक भार के बच्चे हो।**

रीमा : **माध्य निकालकर हम टीमें बाँट सकते हैं।**
महेश : **बहुलक निकालकर भी टीमों को बाँटा जा सकता है।**
अध्यापिका : **मेरी शर्तों के लिए हमें माध्यक का प्रयोग करना होगा।**

चलो करके देखें

1) **माध्य के तरीके** – $32 + 35 + 36 + 37 + 38 + 38 + 38 + 40 + 42 + 43 + 43 + 43 + 45 + 47 + 50 = \frac{656}{15} = 43.73$

यदि भार(kg) 43 से कम	यदि भार 43 कि० ग्रा० (kg) से अधिक
38, 35, 37, 32, 40, 36, 38, 38, 42	45, 50, 43, 43, 47, 43
टीम – 1 में 9 बच्चे	टीम – 2 में 6 बच्चे

अध्यापिका की शर्त (1) और (2) पूरी नहीं हुईं (संख्या भी बराबर नहीं)

2) **बहुलक का प्रयोग** करके टीम बाँटना 38 तथा 43 (दो बहुलक)

38, 35, 37, 40, 32, 36, 38, 38	43, 43, 42, 45, 47, 50, 43
टीम – 1 (38 बहुलक) 8 बच्चे	टीम – 2 (43 बहुलक) 7 बच्चे

यहाँ भी वही, शर्त (1) और (2) दोनों पूरी नहीं हुईं

3) **माध्यक द्वारा टीमें विभाजन:**
सभी भारों (kg) को आरोही या अवरोही क्रम में लगा कर मध्य संख्या निकालना

आरोही क्रम : $\boxed{32, 35, 36, 37, 38, 38, 38,}$ 40, $\boxed{42, 43, 43, 43, 45, 47, 50}$

टीम – 1 7 बच्चे

टीम – 2 7 बच्चे

अध्यापिका ने इसे माध्यक (Refree) बनाया

अवरोही क्रम : $\boxed{50, 47, 45, 43, 43, 43, 42,}$ 40, $\boxed{38, 38, 38, 37, 36, 35, 32}$

टीम – 2 7 बच्चे

टीम – 1 7 बच्चे

माध्यक (Refree)

माध्यक एक प्रकार का प्रतिनिधि मान है। यह उस मान को दर्शाता है, जो प्रेक्षणों के मध्य (बीच) में होता है। (आरोही या अवरोही क्रम में लगाने के बाद)

आधे प्रेक्षण माध्यक से ऊपर होते हैं तथा आधे प्रेक्षण माध्यक से नीचे होते हैं।

ज़रूरी नहीं कि माध्यक और बहुलक के लिए एक ही मान मिलेगा।

यहाँ हम केवल उन ही स्थितियों को लेंगे, जहाँ प्रेक्षणों की संख्या विषम है।

अब खुद करके देखिए।

अध्यापक ने कविता का परीक्षा-परिणाम (Report Card) निम्न प्रकार से सारणीबद्ध किया है।

रोल नं0 6		**परीक्षार्थी का नाम - कविता**	
विषय	FA I + FA II	SA I	**कुल प्राप्तांक**
हिन्दी	15	18	33
अंग्रेज़ी	14	12	26
गणित	16	11	27
विज्ञान	13	13	26
सा. ज्ञान	14	16	30
संस्कृत	17	20	37

1. **तालिका को पढ़कर उत्तर दीजिए :**

- कविता ने SA I में किन-किन विषयों में 15 से अधिक अंक प्राप्त किए हैं?----- ---- -----
- SA I में गणित और अंग्रेज़ी के अंकों में कितना अंतर है?...........
- किस विषय में कविता के प्राप्तांक सबसे अधिक है?...........
- SA I में गणित में 20 अंक प्राप्त करने के लिए कविता को और कितने अंकों की आवश्यकता होगी?.....................

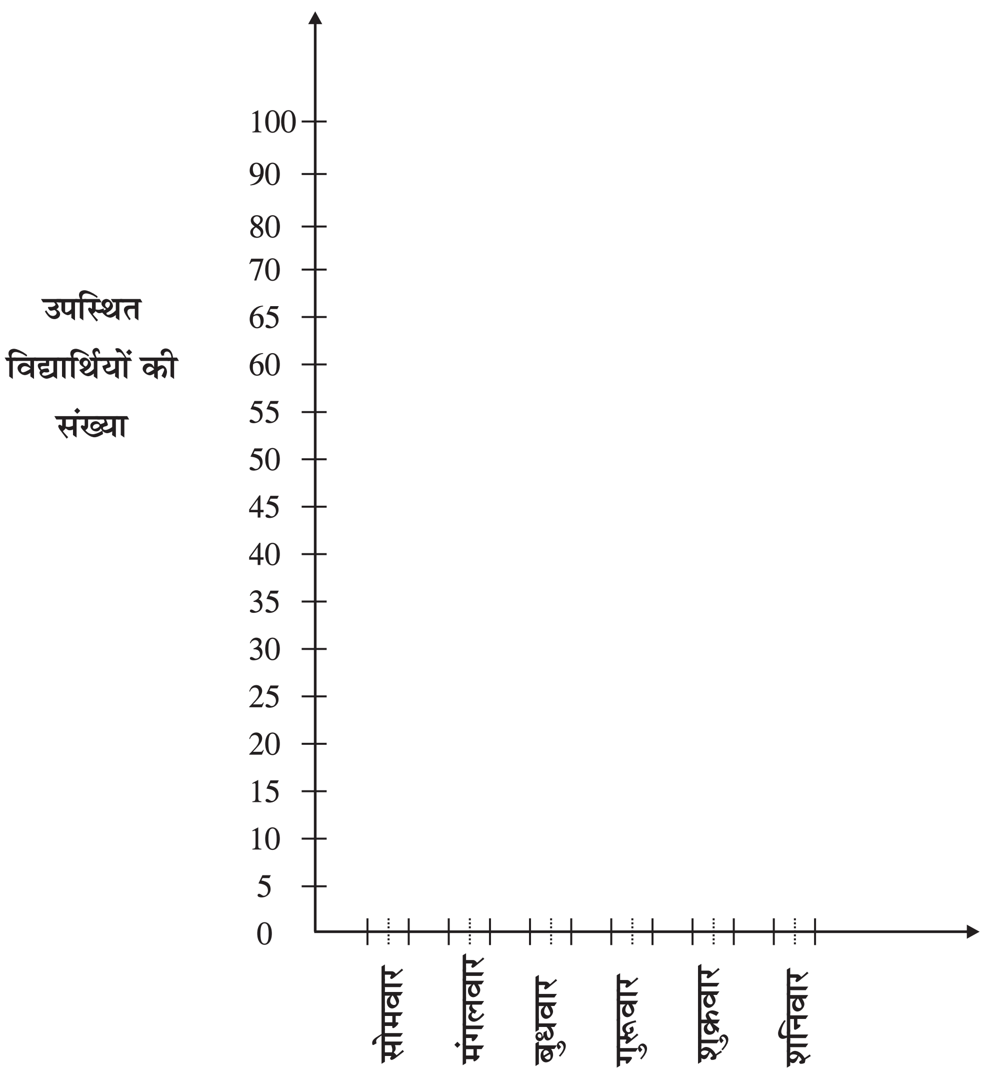
मॉनिटर डायरी का प्रयोग करके :

2. आपकी कक्षा में पिछले सप्ताह उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या को दर्शाती हुई तालिका को पूरा कीजिए।

तालिका 1

दिन	कक्षा में कुल छात्र	उपस्थित छात्रों की संख्या	अनुपस्थित छात्रों की संख्या
सोमवार			
मंगलवार			
बुधवार			
गुरूवार			
शुक्रवार			
शनिवार			

<u>उपरोक्त सारणी को दंड आलेख द्वारा दर्शाइए</u>

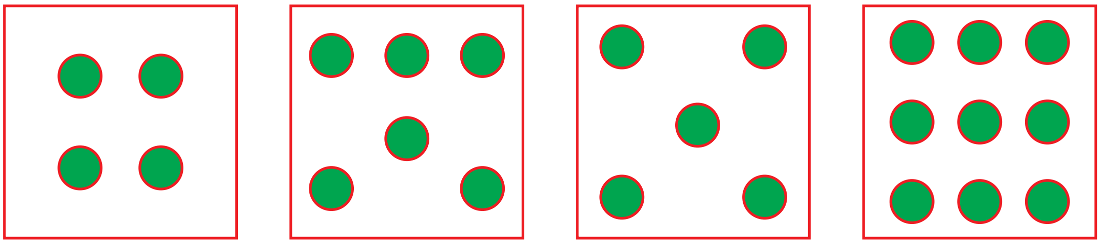


सारणी 1 को चित्रालेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए

 = 10 विद्यार्थी

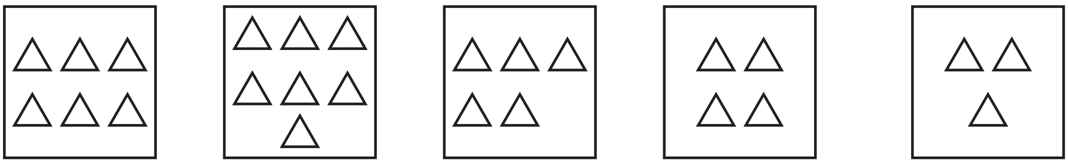
दिन	अनुपस्थित छात्रों की संख्या
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	
गुरूवार	
शुक्रवार	
शनिवार	

4) नीचे कुछ बॉक्स हैं। इनमें कुछ बटन हैं।



एक दूसरे बॉक्स में से बटन लेकर, सभी बॉक्स की बटनों की संख्या बराबर कीजिए तथा नीचे दिए गए बॉक्स में दर्शाइए।

5) नीचे बॉक्स में त्रिभुजों की आकृतियाँ बनी हुई हैं। एक दूसरे बॉक्स में से त्रिभुज लेकर सभी खाली बॉक्सों में त्रिभुज की संख्या बराबर कीजिए।



6) नीचे दिए गए प्रश्नों पर विचार कीजिए तथा अपने साथियों के साथ इसकी चर्चा कीजिए:-

-आप प्रतिदिन कितने घंटे पढ़ते हैं? ___________

-आप प्रतिदिन कितने घंटे सोते है? ___________

हम प्रतिदिन अलग-अलग घंटों की पढ़ाई करते हैं तथा अलग-अलग समय तक सोते हैं।

⇓

ऊपर दिए गए प्रश्नों का उत्तर देने के लिए आपने जाने अनजाने औसत (Average) का प्रयोग किया है।

सारणी को देखकर उत्तर दीजिए

दिन	आपके पढने का समय
सोमवार	4 घंटे
मंगलवार	3 घंटे
बुधवार	5 घंटे
गुरूवार	4 घंटे

प्र० :- आपके प्रतिदन पढ़ने का औसत समय क्या है?

उ० :-

7) ताहिरा ने 10 दिनों के अन्दर कुछ मूर्तियाँ तैयार कीं। उसकी बनाई मूर्तियों का प्रतिदिन औसत ज्ञात कीजिए। औसतन ताहिरा ने प्रत्येक दिन कितनी मूर्तियाँ बनाईं?

4, 6, 5, 5, 6, 3, 4, 4, 7, 5

8)

पारी	खिलाड़ी द्वारा बनाए गए रन
1	20
2	30
3	35
4	35

प्र० :- खिलाड़ी द्वारा एक पारी में बनाए गए रनों का औसत क्या है?

उ० :-

(9) नीचे थैलियों में कुछ कंचे हैं क्या हम सब थैलियों के कंचों को इकट्ठा करके बराबर बाँट सकते हैं?

8 कंचे　　7 कंचे　　5 कंचे　　4 कंचे

आओ करें

$8+7+5+4 = 24$

अब इन 24 कंचों को चारों थैलियों में बराबर बाँटें तो :

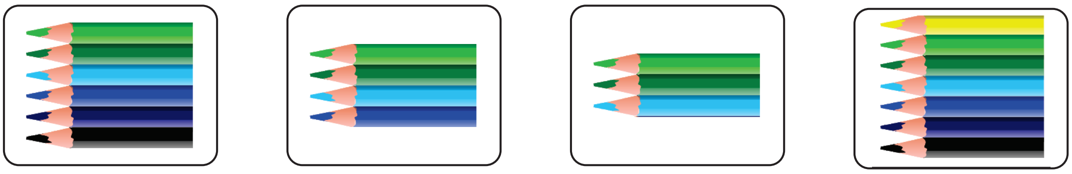
$24 \div 4 = 6$

प्रत्येक थैली में कंचे = 6

कंचों का औसत = 6

(10) नीचे दिए गए बॉक्सों की पेंसिलों को बराबर बाँटिए।

बॉक्स 1　　बॉक्स 2　　बॉक्स 3　　बॉक्स 4



6　　4　　3　　7

चारों बॉक्सों में कुल पेंसिलें = ____________

चारों बॉक्सों में सारी पेंसिलें बराबर बाँटने पर

प्रत्येक बॉक्स में अब पेंसिलें = ____________

पेंसिलों का औसत = ____________

(11) निम्न संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए:-

15, 20, 16, 18, 14

(12) राजू दुकानदार ने एक सप्ताह की आय को खाते में इस प्रकार लिखा

रविवार = 350 ₹　　　गुरूवार = 280 ₹

सोमवार = 275 ₹　　　शुक्रवार = 320 ₹

मंगलवार = 300 ₹　　　शनिवार = 375 ₹

बुधवार = 325 ₹

राजू की प्रतिदिन आय का औसत ज्ञात कीजिए।

(13) **संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए :**

10, 6, 9, 5, 8, 3, 7, 12, 4 __,__,__,__,__,__,__,__,__

उपरोक्त आँकड़ों में:-

➢ सबसे छोटी संख्या कौन सी है? __________

➢ सबसे बड़ी संख्या कौन सी है? __________

➢ सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्या का अन्तर क्या है?

(14) **दिए हुए आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखिए तथा उसका परिसर ज्ञात कीजिए:-**

(i) 7, 4, 41, 21, 34, 15, 19, 39

__, __, __, __, __, __, __, __,

परिसर = ____________

(ii) 8, 12, 10, 9, 40, 32, 48, 25

__, __, __, __, __, __, __, __,

परिसर = ____________

(15) **आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में लिखिए।**

8, 9, 10, 4, 19, 3, 15

__, __, __, __, __, __, __, __,

इन सबके बिलकुल बीच में स्थित संख्या कौन सी है? __________

(16) **उत्तर दीजिए :**

(i) 10, 8, 6, 12, 9, 7, 13 का माध्यक ज्ञात कीजिए।

आँकड़ों को किसी भी क्रम में व्यवस्थित कीजिए __, __, __, __, __, __, __, __, __, __, __, __,

माध्यक = _________

(ii) 15, 35, 26, 28, 32, 38, 40, 19, 20 का माध्यक ज्ञात कीजिए

आँकड़ों को किसी भी क्रम में व्यवस्थित __, __, __, __, __, __, __, __, __, __, __, __, __,

माध्यक = __________

(17) आओ राजू दुकानदार की आय एक बार फिर से देखें और उसका माध्यक बताने का प्रयास करें।

दिन	रविवार	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरूवार	शुक्रवार	शनिवार
आय (₹ में)	350	275	300	325	280	320	375

(18) क्या अब ताहिरा की बनी मूर्तियों का भी माध्यक निकला जा सकता है?

दिन (क्रम)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
मूर्तियों की संख्या	4	6	5	5	6	3	4	4	7	5

उत्तर :-

हमें यह जाँचना है कि गणित विषय में कक्षा के विद्यार्थियों का प्रदर्शन कैसा है, तो आप यह कैसे ज्ञात करोगे तथा किस प्रकार प्रदर्शित करोगे ?

(19) अपनी कक्षा में गणित विषय में हुए पिछले यूनिट टेस्ट के अंकों को ध्यान में रखते हुए निम्न सारणी को पूरा कीजिए।

प्राप्त अंक	विद्यार्थियों की संख्या

आओ अब दी गयी तालिका को पूरा करने के बाद कुछ प्रश्नों पर विचार करें।

प्र० :- 5 अंक, कितने विद्यार्थियों ने प्राप्त किए? ________

प्र० :- कितने विद्यार्थियों ने 8 से अधिक अंक प्राप्त किए? ________

प्र० :- कौन से अंक, सबसे ज़्यादा बार विद्यार्थियों ने प्राप्त किए?________

(20) तालिका में देखकर उत्तर दीजिए।

अंक	बारंबारता (अंक कितनी बार आया है।)
3	2
4	3
5	2
6	2
7	1
8	1

प्र०:- किस अंक की बारंबारता सबसे अधिक है? __________

अत: अंकों का बहुलक __________ है।

प्र०:- दिए गए आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करें

(i) 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8

(ii) 8, 8, 9, 9, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13, 14

(21) 20 बच्चों के भार नीचे दिए गए हैं। इनका बहुलक ज्ञात कीजिए।

30, 31, 32, 33, 33, 34, 36, 36, 36, 37, 38, 38, 39, 40, 40, 41, 42, 43, 44

(22) यदि दिए गए आँकड़ो में 30 भी शामिल कर लिया जाए तो बहुलक में क्या बदलेगा?

31, 46, 69, 69, 67, 67, 46, 67

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

बच्चों ने सीखाः-

1) दैनिक जीवन में आँकड़ों का महत्व

2) आँकड़ों का प्रबन्धन करके तरह-तरह की रिपोर्ट तैयार की जा सकती है।

3) आँकड़ों के संग्रह, रिकॉर्डिंग और प्रस्तुतीकरण से हमें अपने अनुभवों को संगठित करने तथा आंकड़ों से निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है।

4) आँकड़ों को इकट्ठा करने से पहले हमें यह जान लेना चाहिए कि इनका प्रयोग किस प्रकार करना है।

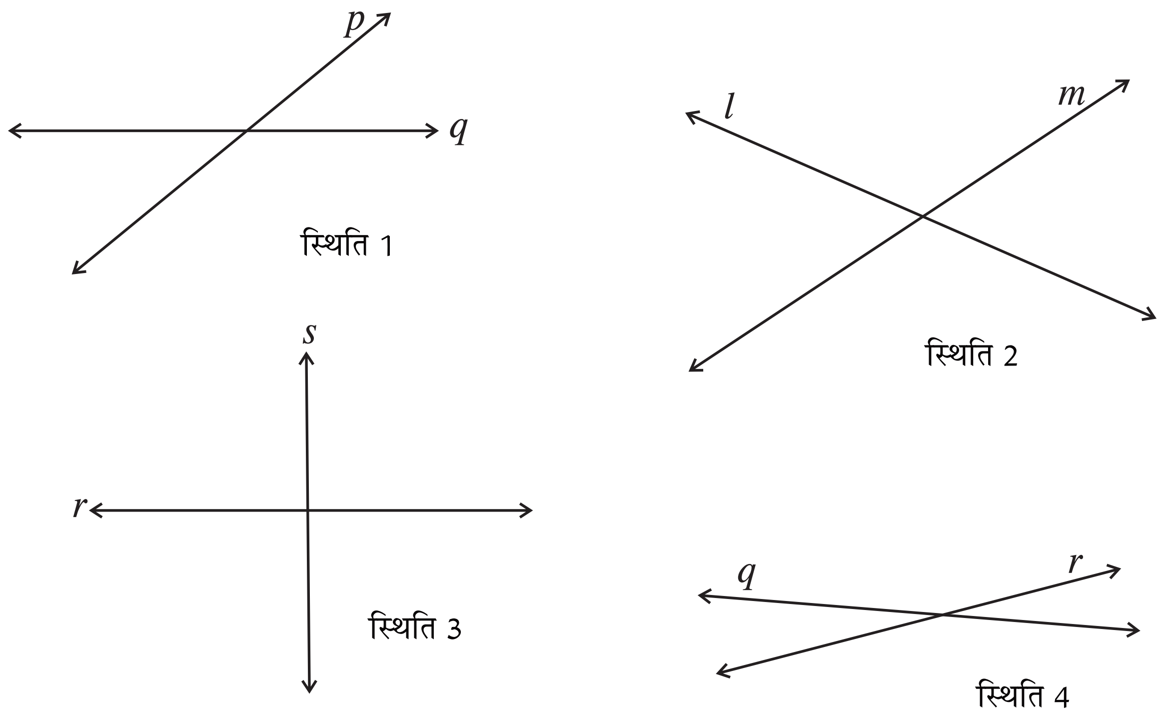
5) एकत्रित किए गए आँकड़ों को उपयुक्त सारणी में संगठित किया जाता है। ताकि सरलता से समझ आ जाए तथा उनकी व्याख्या की जा सके।

6) औसत, माध्य, बहुलक तथा माध्य आँकड़ों के प्रतिनिधि मान हैं तथा उनकी केन्द्रीय प्रवृति को दर्शाते हैं।

7) दोहरे दण्ड आलेख खींचना तथा उनकी व्याख्या।

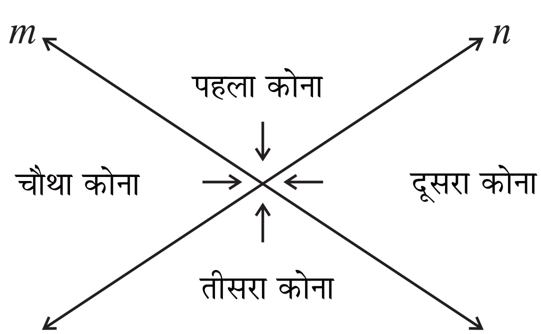
अध्याय 4 – रेखाएँ एवं कोण

अपनी आँखें बंद करके सोचिए कि दो रेखाएँ एक-दूसरे को काट रहीं हैं। अब जो आपने सोचा, उसे कॉपी पर बनाएँ। आप देखेंगे कि दो रेखाएँ किसी भी तरह एक-दूसरे को काटें तो कुछ निम्न प्रकार की स्थितियाँ उभरती हैं।



क्या आपकी बनाई गई आकृतियाँ ऊपर दी गई आकृतियों से भिन्न हैं? यदि हाँ, तो अपने दोस्तों से इस बारे में चर्चा करें।

ऊपर दी गई आकृतियों में हम देखते हैं कि जहाँ रेखाएँ एक-दूसरे को काटती हैं, उस बिंदु के आसपास चार कोने बन गए हैं। क्या आप उन कोनों को देख सकते हैं? यदि नहीं, तो अपने दोस्तों एवं अध्यापक की मदद लें।

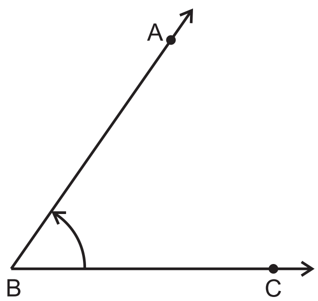


इन्हीं कोनों में हम कोण देख सकते हैं। हम यह भी कह सकते हैं कि जब दो रेखाएँ/ रेखाखंड/ किरण एक-दूसरे को काटते (प्रतिच्छेद) हैं, तो कोण बनते हैं। कोणों को हम दो रेखाओं के एक-दूसरे से झुकाव द्वारा भी समझते हैं।

क्या आप अपने आसपास ऐसे कोणों को ढूँढ़ सकते हैं ? ऐसे कोणों को ढूंढ़ें और उन्हें अपनी कॉपी में बनाएँ।

कोण बनाने के लिए हम एक ही बिंदु से दो अलग-अलग दिशाओं में किरण ले सकते हैं। आप भी अलग-अलग तरह के कोण बनाएँ और अपने दोस्तों को दिखाएँ।

कोणों का नामकरण



हम दी गई आकृति में देख सकते हैं कि दो किरणें $\overrightarrow{BA}$ तथा $\overrightarrow{BC}$ एक कोण बना रही हैं। इसको हम $\angle ABC$ या $\angle CBA$ या फिर $\angle B$ के नाम से जानते हैं।

कोणों का मापन

जिस प्रकार हम लंबाई को स्केल की सहायता से नापते हैं, वज़न के लिए तराजू का इस्तेमाल करते हैं, उसी प्रकार कोण के लिए चाँदा (कोणमापक) का इस्तेमाल होता है। जैसे लंबाई को मीटर या से.मी. में, वज़न को किलोग्राम या ग्राम में मापा जाता है, उसी प्रकार कोण को डिग्री में मापते हैं। आपने पुरानी कक्षा में चाँदे (protractor) का इस्तेमाल सीखा होगा। यदि नहीं, तो अपने अध्यापक से इसके इस्तेमाल के बारे में चर्चा करें।

अपने क्लासरूम में आप कहाँ-कहाँ समकोण देखते हैं ?

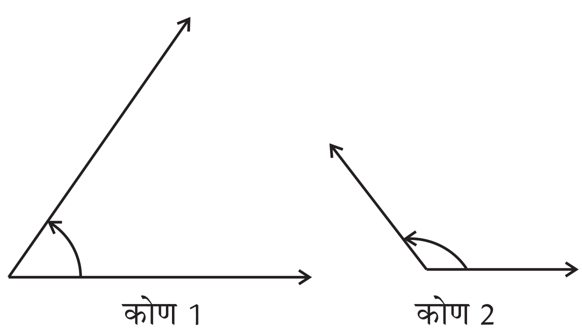
____

____

कोण को हम दो रेखाओं के झुकाव से भी समझते हैं।

क्या हम कोणों के माप के आधार पर उनका वर्गीकरण जानते हैं जैसे न्यूनकोण, अधिककोण, समकोण। अपने साथियों एवं अध्यापक से इसके बारे में चर्चा करें।

क्या हम नीचे दिए गए कोणों में बता सकते हैं कि किस कोण की माप ज्यादा है ?



अपने अध्यापक से चर्चा करें कि क्या कोण की भुजाओं के छोटा या बड़ा होने से कोण की माप में कोई अंतर आता है ?

हम जानते हैं कि कोणों का वर्गीकरण न्यून कोण, अधिक कोण, समकोण, ऋजुकोण, प्रतिवर्ती कोण व सम्पूर्ण कोण के रूप में निम्न प्रकार किया जाता है।

कोण- न्यूनकोण, समकोण, अधिक कोण, ऋजु कोण, प्रतिवर्ती कोण व संपूर्ण कोण

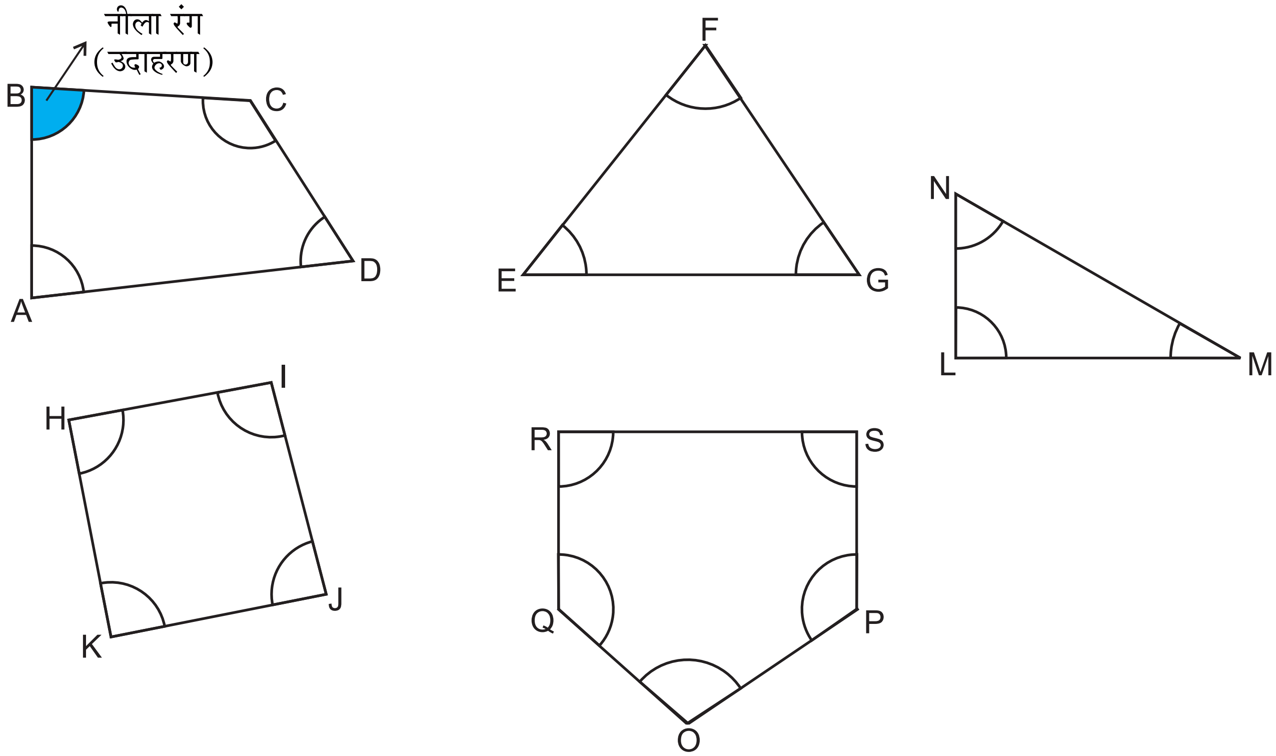
कोण केवल 90°,180° या 360°के ही नहीं होते

- कुछ कोण 90° से कम भी हो सकते है और कुछ 90° से अधिक।
- कुछ कोण 180° से कम भी हो सकते है तथा कुछ 180° से अधिक।

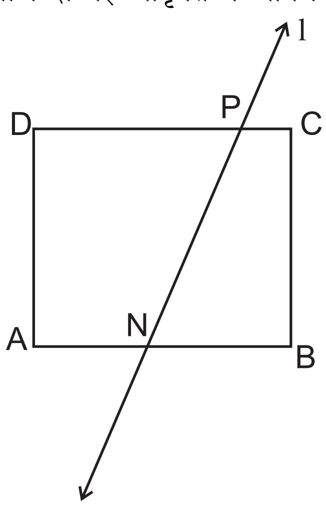
क्र.सं.	कोण	माप	नाम
(1)	90° से कम	89°, 88° … 1° इत्यादि	न्यूनकोण
(2)	90°	90°	समकोण
(3)	90° से अधिक तथा 180° से कम	91° … 179° इत्यादि	अधिककोण
(4)	180°	180°	ऋजुकोण (सरल कोण)
(5)	180° से अधिक तथा 360° से कम	181°… 359° इत्यादि	प्रतिवर्ती कोण
(6)	360°	360°	सम्पूर्ण कोण

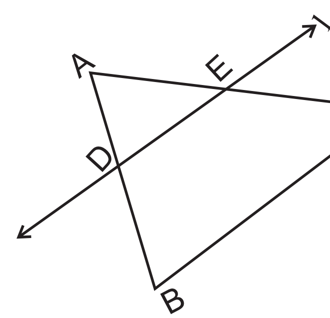
आओ कोणों को पहचानें

निम्नलिखित आकृतियों में बने कोणों में **न्यूनकोण** के लिए नीला, **समकोण** के लिए पीला तथा **अधिककोण** के लिए लाल रंग भरें।

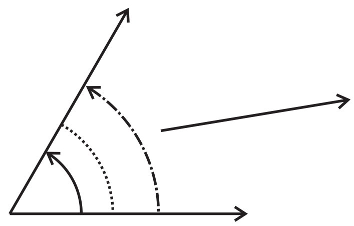


नीचे दी गई आकृति में आप कितने कोण ढूँढ़ सकते हो? उन सभी के नाम लिखो।



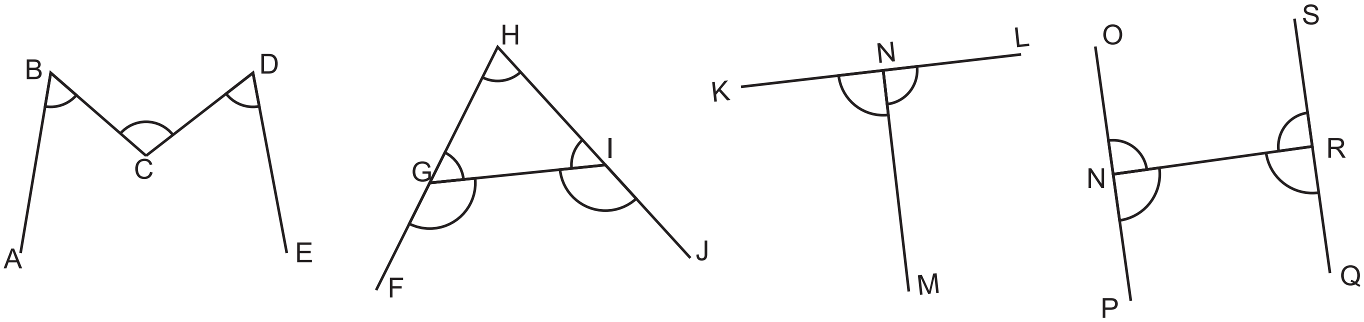


कोण की माप को हम घुमाव से भी दिखाते हैं। इस घुमाव को दिखाने के लिए हम चाप का इस्तेमाल करते हैं।

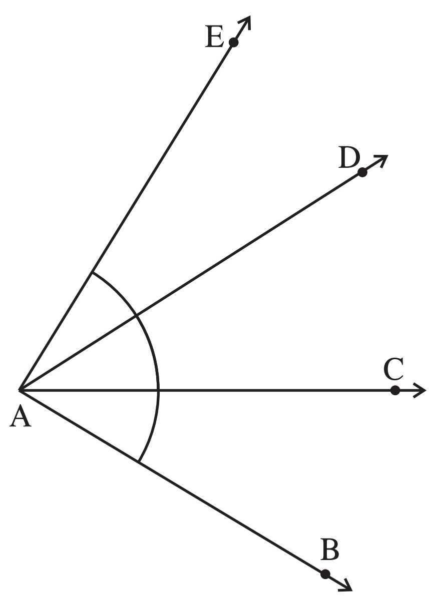


दी गई आकृति में हम देख सकते हैं कि एक ही कोण को दिखाने के लिए हम अलग-अलग त्रिज्या वाली चाप का प्रयोग कर सकते हैं।

नीचे दिए गए प्रत्येक alphabet के कोणों को मापो और लिखो।



नीचे दी गई आकृति में कितने कोण बन रहे हैं? उन सभी कोणों के नाम लिखो।



1. ______________________
2. ______________________
3. ______________________
4. ______________________
5. ______________________
6. ______________________

आओ एक रोल प्ले पढ़ते हैं इसे अपने अध्यापक की मदद से खेलते हैं।

आओ कोणों को जानें।

(8 छात्र)

क्लास में टीचर लकड़ी के विभिन्न लंबाइयों के कुछ स्केल लेकर बच्चों के साथ खेल कराता है. स्केल्स को लेकर तरह-तरह की मुद्राओं में आकृति बनवाने की कोशिश करता है सभी आँखें बंद करके दायरे में चारों ओर बैठ जाते हैं और जो-जो निर्देश दिए जाते हैं उन्हें ध्यानपूर्वक सुनते हुए एक्शन करते हैं।)

विनोद (टीचर): सभी के हाथ में तरह तरह की लंबाइयों के स्केल हैं. आप कल्पना कीजिये कि कोई दो स्केल आपस में एक दूसरे को काटते हैं. तो कैसी आकृति उभरती है ?

मनोज: सर ये प्रतिच्छेदी रेखाओं की तरह एक दूसरे को काटती हैं।

विनोद: हाँ, ये ठीक है। कोई भी दो या दो से ज़्यादा रेखाएं एक दूसरे को आगे-पीछे बढ़ाने पर या तो काटेंगी या नहीं काटेंगी। जब काटेंगी तो प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाएँगी, और अगर नहीं काटेंगी तो वे समांतर रेखाएँ कहलाएँगी।

आलम : कितना आगे पीछे बढ़ाएँ सर ?

विनोद : जितना भी बढ़ा सकते हो।

(छात्रों को आँख खोलने को कहा जाता है। वे आँख खोलते हैं। छात्रों को अब दीवार पर लगे खाली चाट्र्स के पास जाने को कहा जाता है और कल्पना में बनाई गई आकृतियों को चार्ट के ऊपर बनाने को कहा जाता है।)

विनोद : जब दो रेखाएं एक-दूसरे को काटती हैं, तो उनके बीच में बनने वाला झुकाव क्या कहलाता है ?

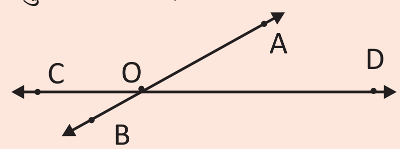
असलम : कोण सर।

विनोद : बिल्कुल सही, दो रेखाओं के काटने पर उन रेखाओं के बीच के झुकाव को कोण कहते हैं। क्या आप अपने शरीर के किसी हिस्से से कोण बनाकर दिखा सकते हैं।

(ममता अपनी उँगलियों से कोण बनाने का इशारा करती है। असलम कुहनियों का इस्तेमाल करते हुए दोनों हाथों से कोण बनाने का इशारा करता है। व्योमेश अपनी टांगों से कोण बनता हुआ खड़ा होता है। विनोद सर सभी बच्चों को बारी-बारी से देखते हुए चलते हैं)

ममता: सर, योगासन एवं व्यायाम करते समय हमारा शरीर अलग-अलग तरह से झुकता है उससे भी अनेक कोण बनते हैं।

विनोद: बिल्कुल सही, आप अगर ध्यान से देखें तो पता चलेगा कि इन कोणों को बनाने में दो किरणों का इस्तेमाल हुआ है जो एक बिंदु पर मिलती हैं।



मनोज: जिस तरह चार्ट पर बने एक चित्र में AB और CD रेखाएं एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं तो उसमें से अगर AOD भाग को अलग करके देखें तो क्या यही कोण कहलाएगा ?

विनोद: बिल्कुल सही मनोज।

ग़ज़ल : जिस बिंदु पर वे दोनों किरणें मिलती हैं, उस बिंदु को क्या कहते हैं सर ?

विनोद : इस बिंदु को **शीर्ष** कहा जाता है। और उन किरणों को जिनसे कोण बना है कोण बनाने वाली भुजाएँ कहा जाता है। अच्छा बताओ, ऊपर की आकृति में शीर्ष कौन सा होगा ?

विप्लव : O, सर

विनोद : और भुजाएँ ?

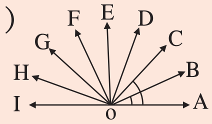
आलम : OA और OD

विनोद : बिल्कुल ठीक।

ग़ज़ल : सर कोण तो छोटे-बड़े भी होते हैं। है न ?

विनोद : क्या बात है ग़ज़ल, तुमने तो मेरे मुँह की बात छीन ली। कोणों को समझने के लिए हमें ये भी समझना होगा कि कोई चीज़ कैसे बढ़ती है।

(विनोद सर चार्ट की ओर इशारा करते हैं।)



अच्छा अगर हम किरण OA से होते हुए OB और OC की ओर बढ़ते हैं तो देखते हैं कि तमाम किरणों का OA से झुकाव धीरे धीरे बढ़ रहा है।

आलम : ये तो बहुत सारे कोण बन रहे हैं।

विनोद :सही कहा तुमने आलम, इनमें छोटे–बड़े किस्म के बहुत से कोण बन रहे हैं। किसी भी खास कोण को जानने के लिए क्या हम कोई नाम दे सकते हैं ताकि हम अलग अलग कोणों को पहचान सकें।

ग़ज़लः कोण तो कोण हैं सर, उन्हें नाम देने की क्या ज़रूरत ?

विप्लवः ज़रूरत क्यों नहीं! अरे भाई जिस तरह अलग–अलग इंसानों को हम नाम देकर पुकारते हैं, उसी तरीके से इन कोणों को भी नामों से पुकारा जाना चाहिए, जिनमें कोई छोटा है कोई बड़ा।

विनोद : बिल्कुल सही कहा विप्लव ने। इन कोणों की खास पहचान के लिए हम उन्हें नाम देंगे।

आलम : सर इन्हें हम नाम कैसे देंगे ?

विनोदः अभी जानते हैं आलम। कई बार तुम बहुत जल्दी करते हो।

मनोजः हाँ सर, आज लंच पीरियड में इसने एक पूड़ी एक साथ अपने मुँह में रख ली थी।

आलमः सर इसने शर्त लगाई थी कि अपना लंच कौन जल्दी खत्म करेगा।

विनोदः ये ग़लत बात है आलम कि तुम शर्त में जल्दी–जल्दी खाना खाते हो। इससे हमें कोई भी नुकसान हो सकता है। खाने और पढ़ने के समय पूरी तरह इत्मीनान रखना चाहिए। बहरहाल कोणों के बारे में जानें ...

आलम : यस सर!

विनोदः तो ऊपर की इस आकृति में किरण OA और OB से एक कोण बन रहा है। इस कोण का क्या नाम होगा ?

विकासः (जो काफी देर चुपचाप बैठा था) मैं बताऊँ सर ?

विनोदः अरे वाह! विकास, शाबाश, बताओ!

विकासः सर इसे कहेंगे कोण AOB, कोण को दर्शाने का चिन्ह $\angle$ है, इसलिए इसे $\angle$AOB लिखा जाएगा।

आलम : मगर सर मैं तो इसे कोण BOA पढ़ूंगा।

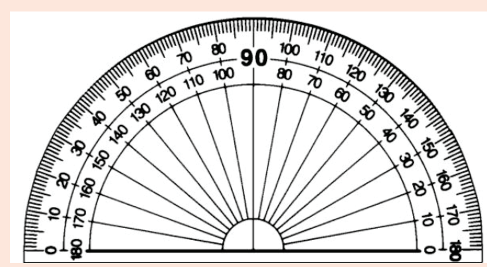
विनोदः तुम दोनों ही सही हो विकास और आलम। हम इसे कोण AOB और BOA दोनों ही पढ़ सकते हैं।

मनोज : सर अगला कोण है BOC, है न सर ?

विनोदः बिल्कुल सही मनोज। अब क्या इन दोनों कोणों को मिलाकर हम एक कोण बनाकर पढ़ सकते हैं ?

आलमः कोण $\angle$AOC या $\angle$COA।

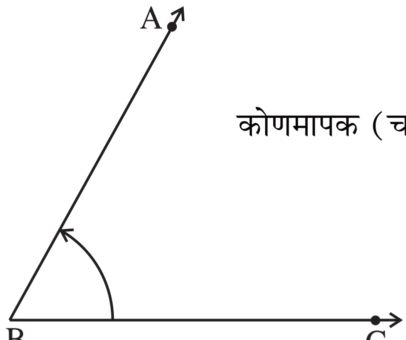
विनोदः बहुत अच्छे। इन कोणों को ही मापने के लिए हमने चांदा बनाया। जो 0 से 180 अंश/डिग्री में विभाजित होता है। इसके ज़रिए हम कोणों का सही माप न केवल जान सकते हैं बल्कि बना भी सकते हैं।



अब हम तमाम कोणों को बनाकर नाप सकते हैं और बना सकते हैं। क्या हम इसके लिए घर पर बार–बार अभ्यास (प्रक्टिस) करेंगे ?
(सभी बच्चे हँसते हुए यस सर, यस सर कहते हैं। विनोद सर भी उतनी ही गर्माहट के साथ सबको गले लगाते हैं।)

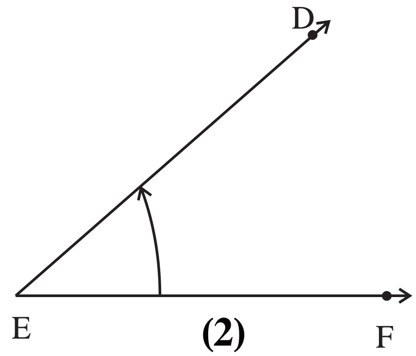
आइए, कोण मापते हैं

नीचे दिए गए कोणों को कोणमापक की सहायता से मापें और लिखें।



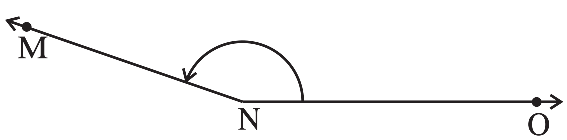
(1)

कोणमापक (चाँदे) से माप = 60°



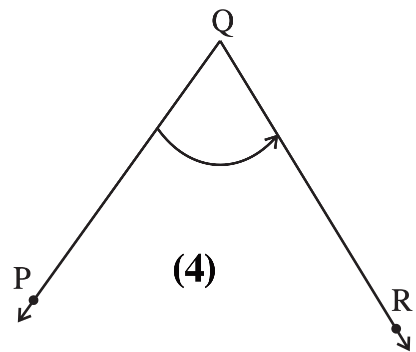
(2)

माप = ____



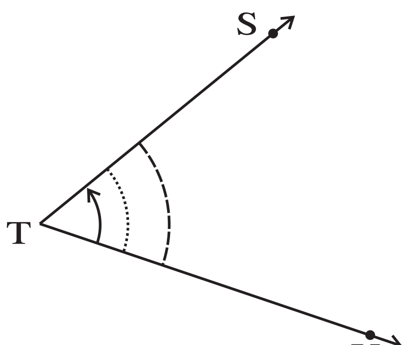
(3)

माप = ____



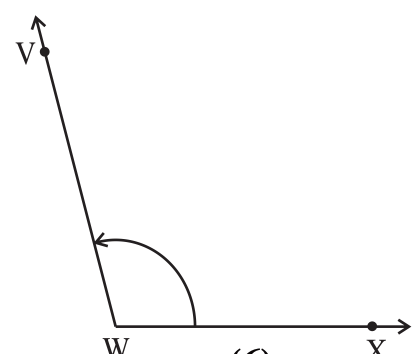
(4)

माप = ____



(5)

माप = ____



(6)

माप = ____

आकृति 5 में हम देखते हैं कि कोण STU में तीन अलग–अलग चाप लगी हैं। क्या इन चाप के अलग–अलग होने से कोण के मान में भी अंतर आता है? अपने अध्यापक से चर्चा करें।

विद्यार्थी ज्यामिति बॉक्स से दोनों सैट स्केयर निकालकर उनके सिरों पर बने कोणों की चर्चा अपने अध्यापक से करें।

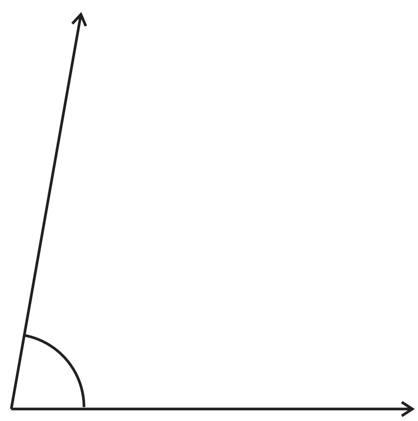
पूरक कोण

जब दो कोणों का योग 90° हो तो उन्हें एक-दूसरे का पूरक कोण कहते हैं, जैसे (63°, 27°), (46°, 44°), (1°, 89°), (40°, 50°), (45°, 45°) इत्यादि पूरक कोण युग्म हैं।

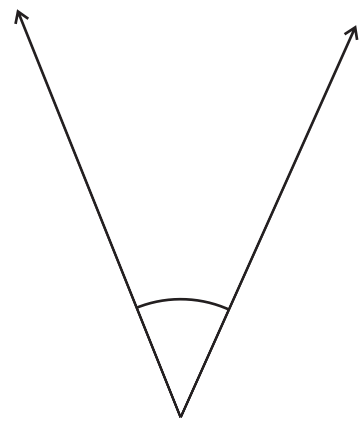
संपूरक कोण

जब दो कोणों का योग 180° हो तो उन्हें एक-दूसरे का संपूरक कोण कहते हैं, जैसे (10°, 170°), (90°, 90°), (100°, 80°) संपूरक कोण युग्म हैं।

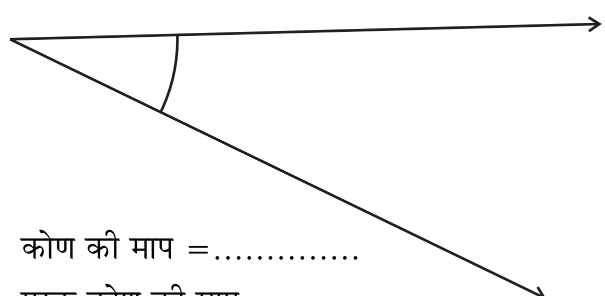
अब निम्नलिखित कोणों को मापो तथा उनके पूरक व संपूरक कोण बताओ।



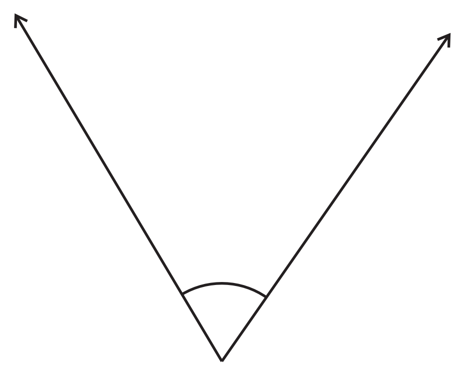
कोण की माप = 80°
पूरक कोण की माप = 10° (90°-80°)
संपूरक कोण की माप = 100° (180°-80°)
80° और 10° एक दूसरे के पूरक कोण है तथा
100° और 80° एक दूसरे के संपूरक कोण हैं।



कोण की माप =.............
पूरक कोण की माप =.............
संपूरक कोण की माप =.............



कोण की माप =.............
पूरक कोण की माप =.............
संपूरक कोण की माप =.............



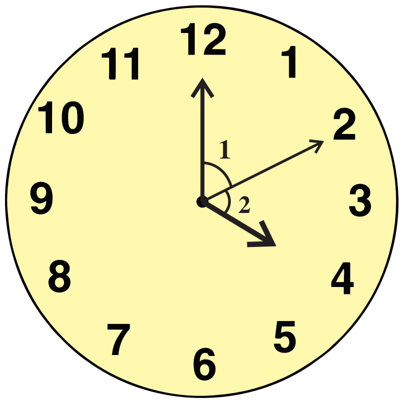
कोण की माप =.............
पूरक कोण की माप =.............
संपूरक कोण की माप =.............

अपने समूह में चर्चा करें:-

(1) कौन से दो समान माप के कोण एक दूसरे के पूरक कोण हैं?

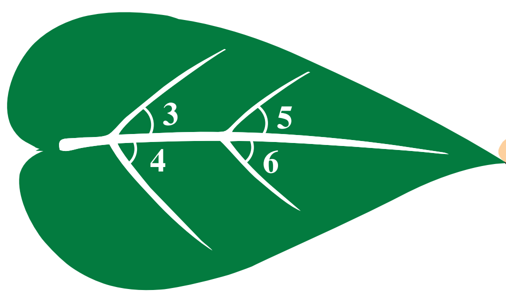
(2) कौन से दो समान माप के कोण एक दूसरे के संपूरक कोण हैं।

नीचे दी गई घड़ी में क्या हम बता सकते हैं कि कितना समय हुआ है? ____________



अब हम घंटे और सेकंड की सुई के बीच के कोण तथा सेकंड और मिनट की सुई के बीच कोणों को देखते हैं।

$\angle 1$ तथा $\angle 2$ में कौन सी सुई कॉमन (उभयनिष्ठ) है?
आपका उत्तर ____________



$\angle 3$ तथा $\angle 4$ में क्या कोई भुजा कॉमन (उभयनिष्ठ) है? सोचिए।

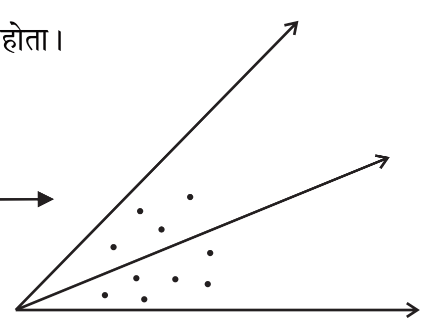
ऊपर हम देखते हैं कि कोणों के तीनों जोड़ों ($\angle 1,\angle 2$) ($\angle 3,\angle 4$) ($\angle 5,\angle 6$) में

- $\angle 1,\angle 2$ में शीर्ष उभयनिष्ठ है।
- $\angle 3,\angle 4$ में शीर्ष उभयनिष्ठ है।
- $\angle 5,\angle 6$ में भी शीर्ष उभयनिष्ठ है।
- एक भुजा दोनों में उभयनिष्ठ है
- जो भुजाएँ उभयनिष्ठ नहीं हैं, वे भुजाएँ उभयनिष्ठ भुजा के एक-दूसरे की उल्टी तरफ हैं।

ऐसे कोणों के युग्म को आसन्न कोण कहते हैं।

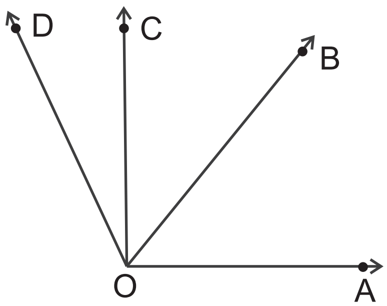
आसन्न कोणों के अभ्यंतर में कोई बिंदु उभयनिष्ठ नहीं होता।

हम देख सकते हैं कि यहाँ आकृति में दिए गए आसन्न कोणों में कोई भी बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है।



आओ पहचानें

नीचे दी गई आकृतियों में हम आसन्न कोणों के कितने जोड़े बना सकते हैं? उनके नाम लिखें।



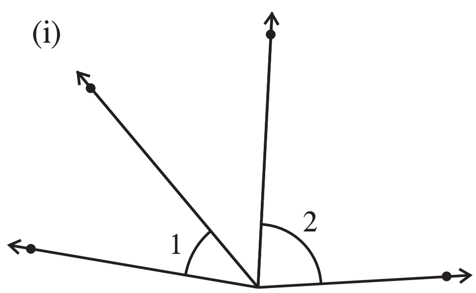
____

____

____

नीचे दी गई आकृतियों में बताएँ कि $\angle 1$ तथा $\angle 2$ आसन्न कोण हैं या नहीं। कारण भी लिखें।

(i)



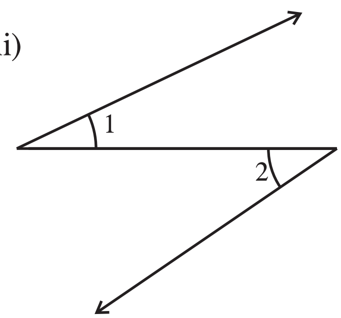
क्या कोण 1 और कोण 2 में-

शीर्ष उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)__________

भुजा उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)__________

क्या कोण 1 और कोण 2 आसन्न कोण हैं (हाँ/नहीं)__________

(ii)



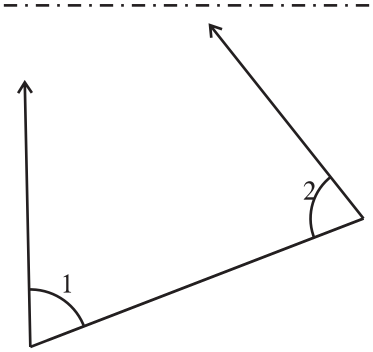
क्या कोण 1 और कोण 2 में-

शीर्ष उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)__________

भुजा उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)__________

क्या कोण 1 और कोण 2 आसन्न कोण हैं (हाँ/नहीं)__________

(iii)



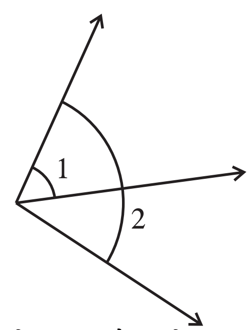
क्या कोण 1 और कोण 2 में-

शीर्ष उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)__________

भुजा उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)__________

क्या कोण 1 और कोण 2 आसन्न कोण हैं (हाँ/नहीं)__________

(iv)



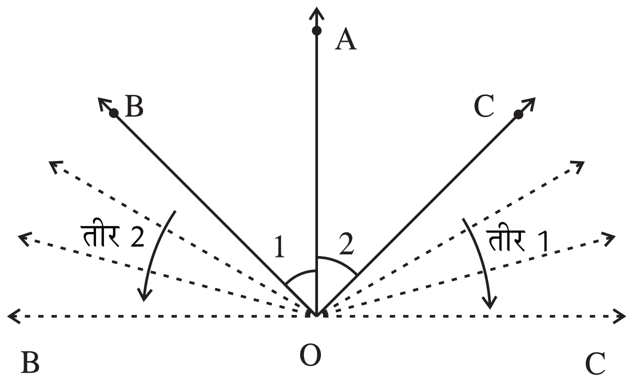
क्या कोण 1 और कोण 2 में-

शीर्ष उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)__________

भुजा उभयनिष्ठ है (हाँ / नहीं)__________

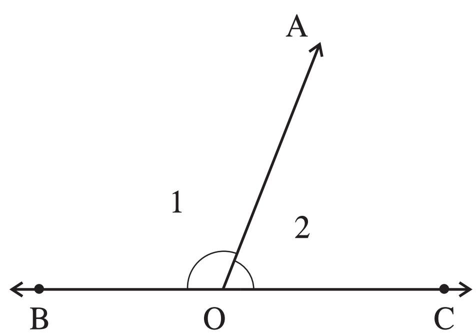
क्या कोण 1 और कोण 2 आसन्न कोण हैं (हाँ/नहीं)__________

आओ कुछ सोचें



ऊपर हम देखते हैं कि किरण OC को तीर 1 की दिशा में घुमाएँ तथा किरण OB को तीर 2 की दिशा में घुमाएँ तो एक स्थिति ऐसी होगी जब $\overrightarrow{OC}$ तथा $\overrightarrow{OB}$ एक-दूसरे की विपरीत दिशा में होंगी। मतलब BOC एक सरल रेखा होगी।

कुछ इस तरह



इस स्थिति में आसन्न कोण 1 और 2 को रैखिक युग्म भी कह सकते हैं।

इन दोनों कोणों का योग 180° होता है।

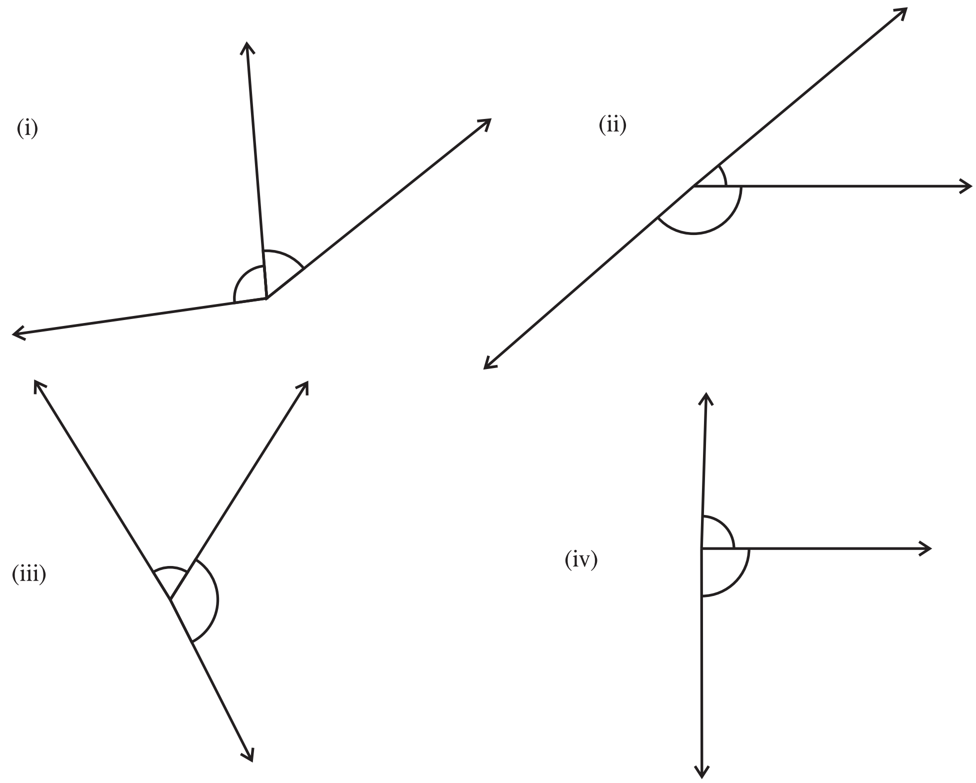
ऊपर दी गई आकृति में कोण 1 तथा कोण 2 को मापें तथा उनका योग ज्ञात करें।

$\angle$**1** = ________________________

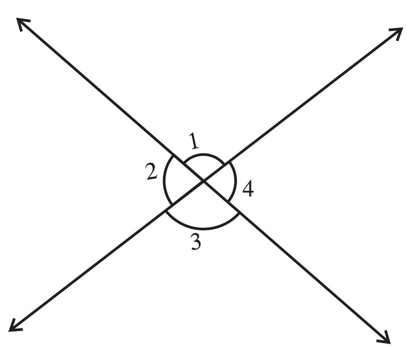
$\angle$**2** = ________________________

$\angle$**1** + $\angle$**2** = ____________________

नीचे दी गई आकृति में देखकर बताएँ कि कौन से आसन्न कोण एक रैखिक युग्म बनाते हैं?



नीचे दी गई आकृति में कोणों को चाँदे से मापें।



$\angle 1$ = ______

$\angle 2$ = ______

$\angle 3$ = ______

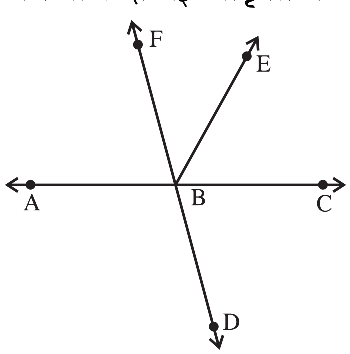
$\angle 4$ = ______

क्या $\angle 1$ तथा $\angle 3$ का मान बराबर है?

क्या $\angle 2$ तथा $\angle 4$ का मान बराबर है?

कोणों के इन युग्मों ($\angle 1$, $\angle 3$) तथा ($\angle 2$, $\angle 4$) को, हम शीर्षाभिमुख या उर्ध्वाधर सम्मुख कोण कहते हैं। शीर्षाभिमुख कोण हमेशा बराबर होते हैं।

अब नीचे दी गई आकृति में बताएँ



1) कोई तीन आसन्न कोणों के जोड़े __________ __________ __________

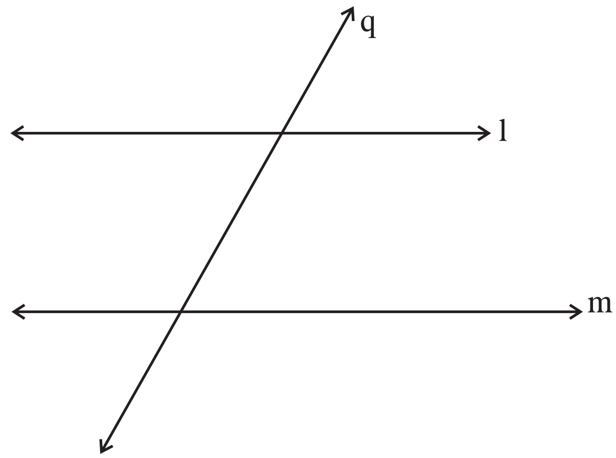
2) कोई दो रैखिक युग्म __________ __________ __________

3) शीर्षाभिमुख उर्ध्वाधर सम्मुख कोण के दो जोड़े __________ __________

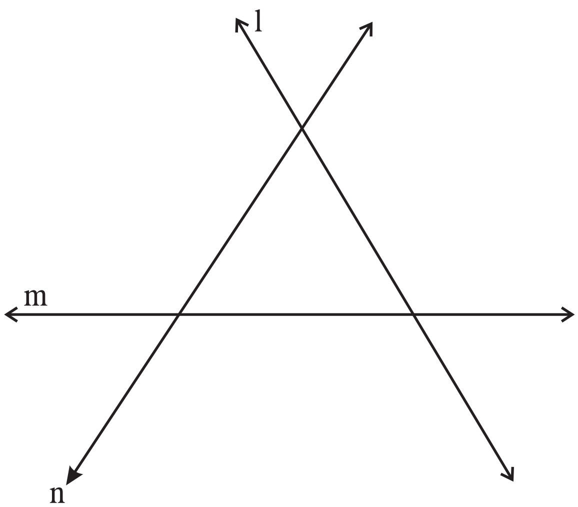
आओ, तिर्यक छेदी रेखाओं के बारे में जानें

ऐसी रेखा जो दो अथवा दो से अधिक रेखाओं को अलग–अलग बिंदुओं पर काटे उसे **तिर्यक छेदी रेखा** कहते हैं।

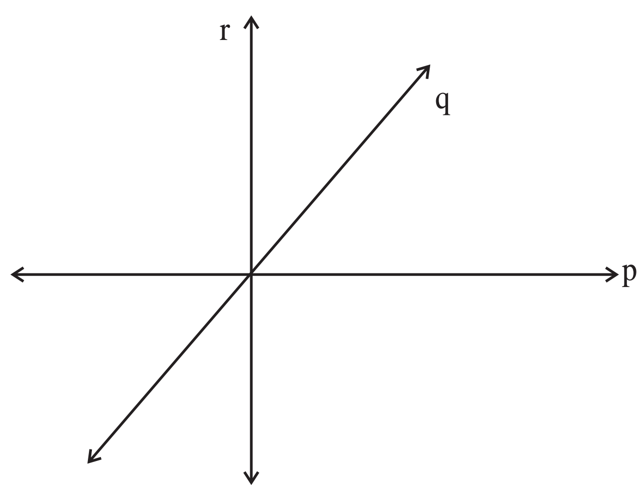
जैसे नीचे दी गई आकृति में रेखा **q** तिर्यक छेदी रेखा है। क्योंकि यह रेखा **l** तथा रेखा **m** को दो अलग–अलग बिंदुओं पर काटती है।



क्या हम बता सकते हैं कि नीचे दी गई आकृति में कौन–कौन सी रेखाएँ तिर्यक छेदी रेखाएँ हैं?

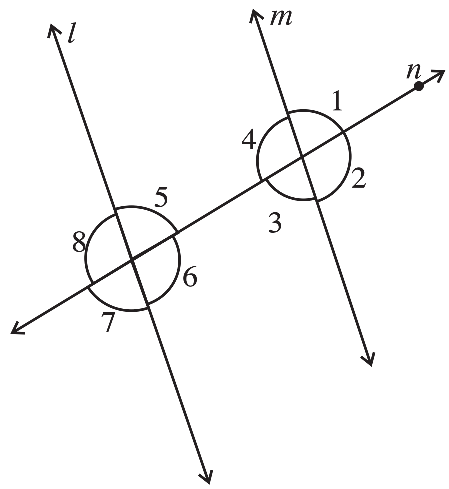


आपका उत्तर ____________________



आपका उत्तर ____________________

एक तिर्यक रेखा जब दो रेखाओं को अलग-अलग बिंदुओं पर काटती है तो आठ कोण बनते हैं।

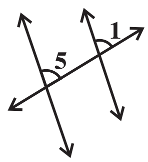


इन कोणों को हम कुछ विशेष नाम देते हैं।

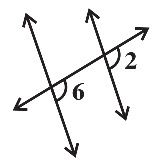
अन्तः कोण (Interior Angles) - $\angle 4, \angle 3, \angle 5, \angle 6$

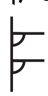
बाह्य कोण (Exterior Angles) - $\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$

संगत कोण के जोड़े (युग्म) $\rightarrow$ $\angle 1$ और $\angle 5$

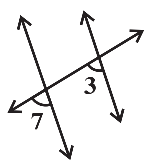


$\angle 2$ और $\angle 6$

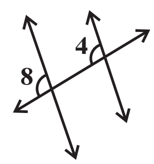


को आकृति  की पहचान द्वारा ढूँढ़ें।

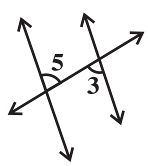
$\angle 3$ और $\angle 7$



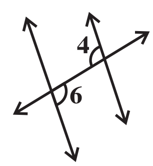
$\angle 4$ और $\angle 8$



एकांतर अंतः कोणों के युग्म $\rightarrow$ $\angle 3$ और $\angle 5$

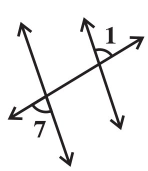


$\angle 4$ और $\angle 6$

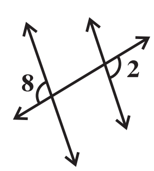


को आकृति  की पहचान द्वारा ढूँढ़ें।

एकांतर बाह्य कोण $\rightarrow$ $\angle 1$ और $\angle 7$



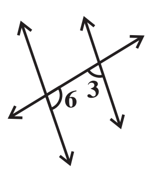
$\angle 2$ और $\angle 8$



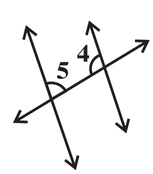
Pair of Alternate Exterior Angles

तिर्यक रेखा के एक ओर

के अन्तः कोणों का युग्म $\rightarrow$ $\angle 3$ और $\angle 6$

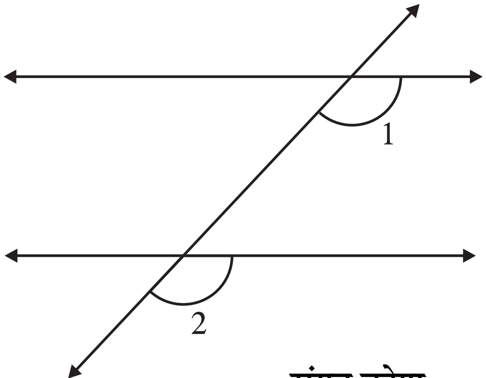


$\angle 4$ और $\angle 5$



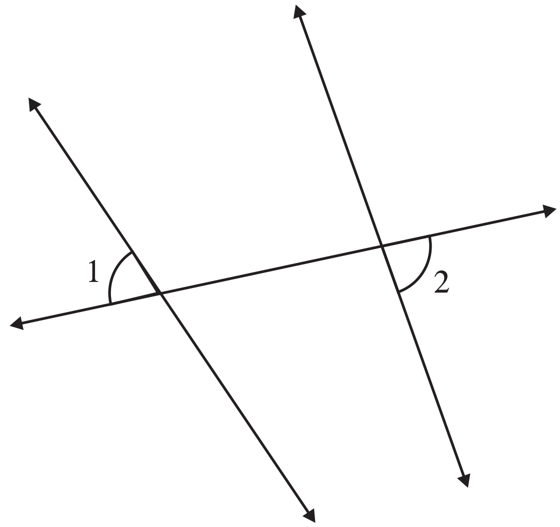
(Pair of Co-interior Angles)

पीछे दी गई तालिका के आधार पर नीचे दी गई आकृतियों में बने कोण 1 तथा कोण 2 के युग्म के विशिष्ट नाम लिखें।

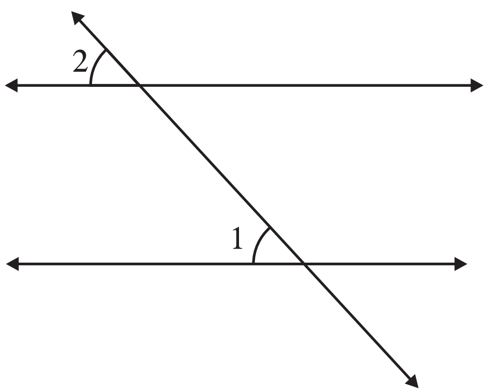


संगत कोण

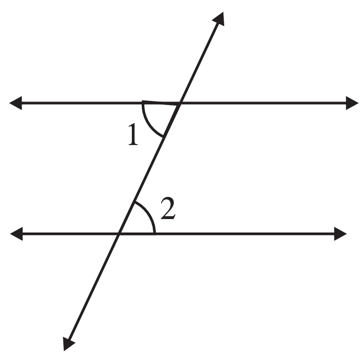
(Corresponding Angles)



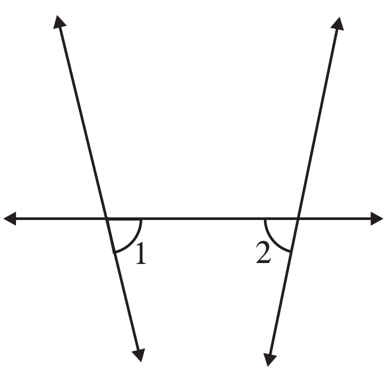
....



....

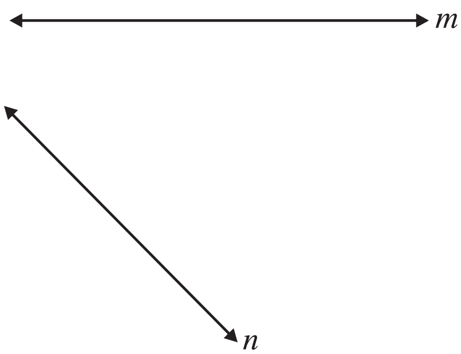


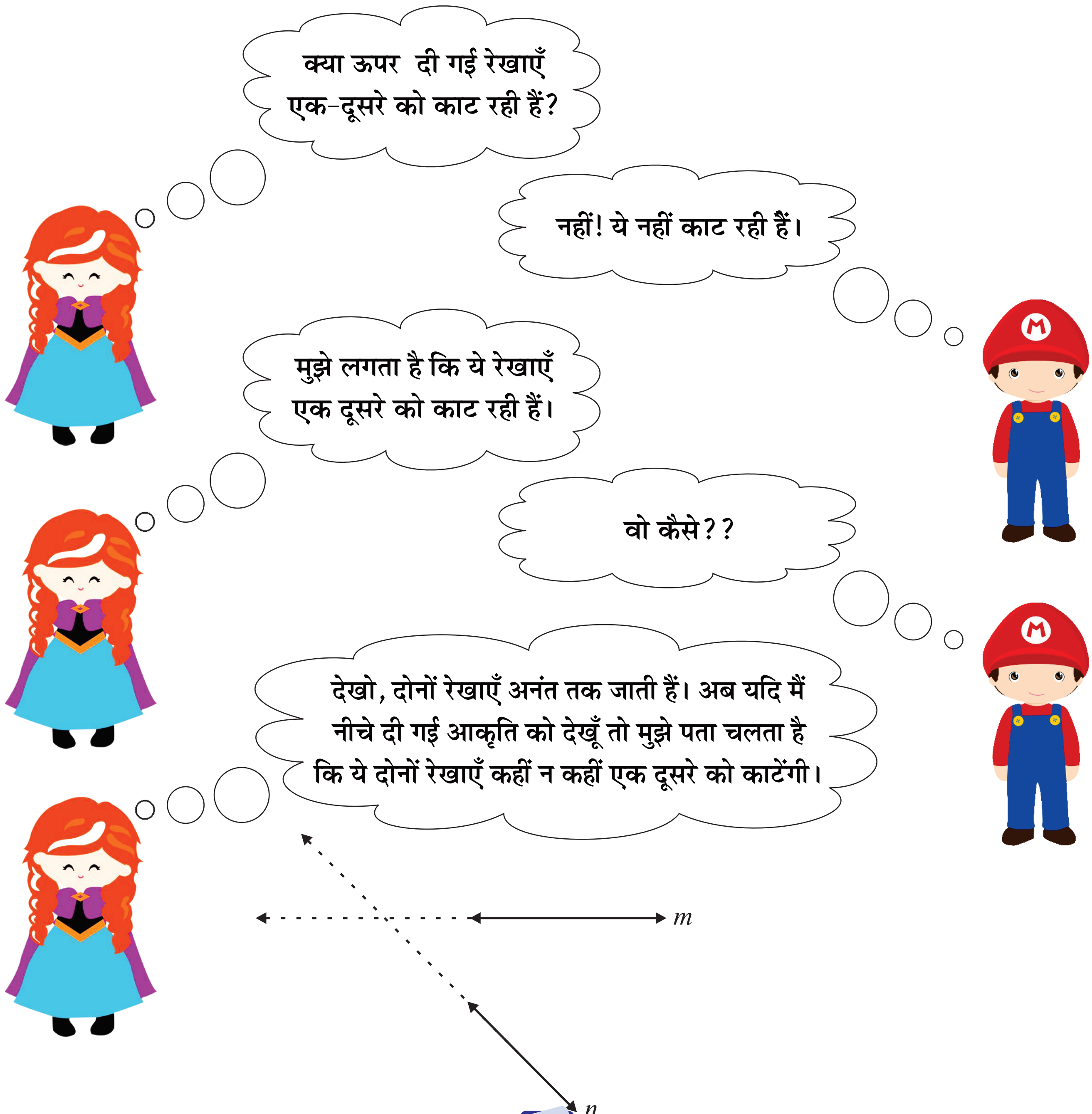
....



....

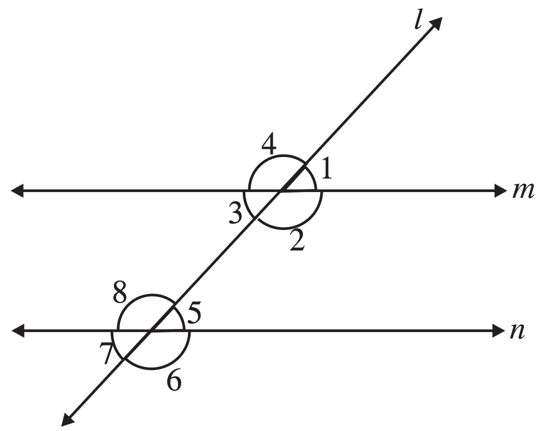
नीचे दी गई रेखाएँ क्या प्रतिच्छेदी रेखाएं हैं?





नीचे दी गई आकृति में दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद कर रही है।

इस प्रकार बने कोणों को मापें तथा उनका मान लिखें।



$\angle 1$ = ___	$\angle 2$ = ___	$\angle 3$ = ___	$\angle 4$ = ___
$\angle 5$ = ___	$\angle 6$ = ___	$\angle 7$ = ___	$\angle 8$ = ___

क्या $\angle 1$, $\angle 3$, $\angle 5$, $\angle 7$ बराबर हैं?

क्या $\angle 2$, $\angle 4$, $\angle 6$, $\angle 8$ बराबर हैं?

हम देखते है कि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा के काटने पर बनने वाले :

$\longrightarrow$ संगत कोण बराबर होते हैं।

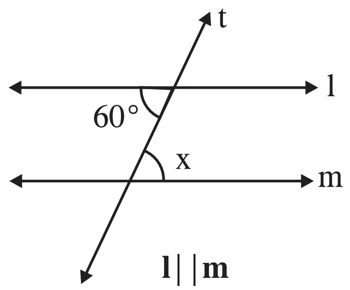
$\longrightarrow$ अंत: एवं बाह्य एकांतर कोण बराबर होते हैं।

$\longrightarrow$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने कोणों का योग 180° होता है।

दो रेखाओं के समांतर होने को गणितीय रूप में चिन्ह || से दिखाते हैं।

आओ करें

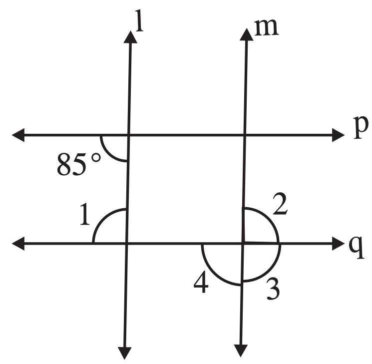
(i)



l||m

x का मान ज्ञात करो— ________

(iv)



l||m तथा p||q है।

$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ का मान ज्ञात करो।

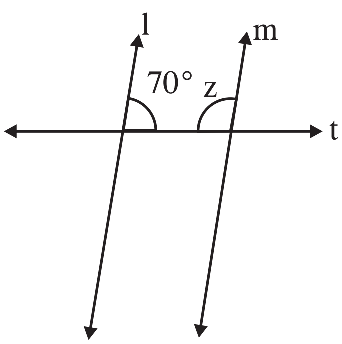
$\angle 1 =$ ________

$\angle 2 =$ ________

$\angle 3 =$ ________

$\angle 4 =$

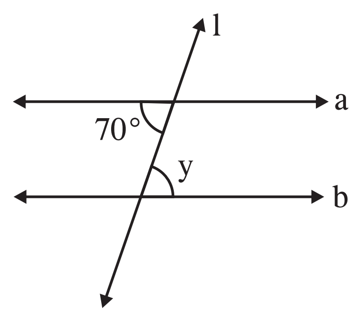
(ii)



l||m है।

z = ?

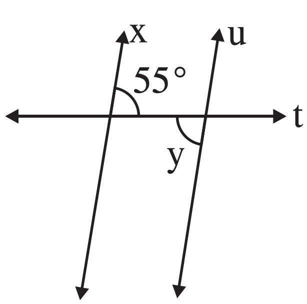
(v)



a||b

y = ?

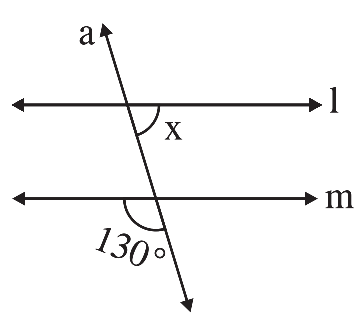
(iii)



x||u है।

y = ?

(vi)



l||m

x = ?

Learning outcomes अधिगम सम्प्राप्ति

पाठ के अन्त में बच्चे जान जाएंगे:

1. रेखा, रेखा खण्ड तथा किरण में अन्तर।
2. दो पूरक कोणों का योग 90° होता है।
3. दो सम्पूरक कोणों का योग 180° होता है।
4. दो आसन्न कोणों का एक ही शीर्ष होता है तथा उनकी एक भुजा उभयनिष्ठ होती है।
5. एकांतर एवं संगत कोणों के अनुप्रयोग।

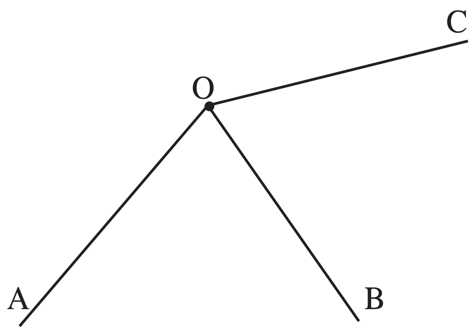
अध्याय 5 – त्रिभुज और उसके गुण

दोस्तो, पिछली कक्षा में हमने त्रिभुज के बारे में जाना था। आइए, आगे बढ़ने से पहले नीचे दी गई आकृतियों को देखें और यह बताएँ कि किस आकृति में त्रिभुज बन रहा है।

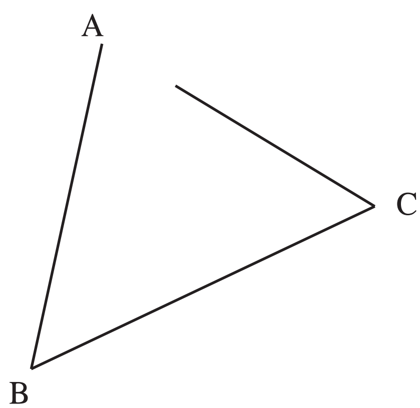
मज़ेदार बात यह है कि सभी आकृतियाँ तीन–तीन रेखाखंडों से मिलकर बनी हैं।

क्या आकृति त्रिभुज है (हाँ या नहीं)

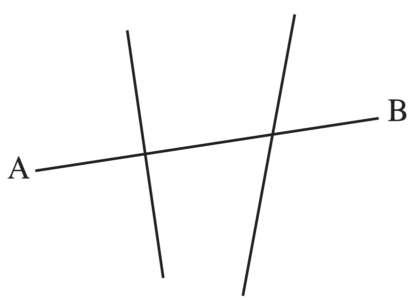
(i)



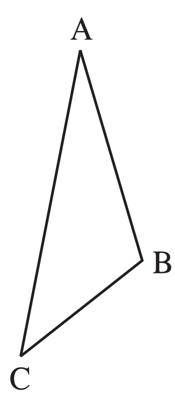
(ii)



(iii)

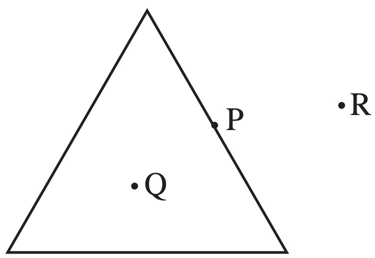


(iv)



पीछे दी गई आकृतियों के आधार पर क्या हम सोच सकते हैं कि एक त्रिभुज कब बना है तथा त्रिभुज की पहचान कैसे करेंगे?

आओ, अब त्रिभुज के अंदर के भाग के बारे में सोचें। नीचे दिए गए त्रिभुज में रंग भरें।



दिए गए त्रिभुज के बाहर के भाग के बारे में सोचें।

यदि हमसे त्रिभुज के बाहर के भाग में रंग भरने के लिए कहा जाए तो हम कहाँ-कहाँ रंग भरेंगे? अपने साथियों एवं अध्यापक से चर्चा करें।

त्रिभुज के अंदर के बंद भाग को अभ्यंतर भाग तथा बाहर वाले भाग को बहिर्भाग कहते हैं।

अब बताएँ।

बिंदु Q कहाँ स्थित है? : त्रिभुज के अन्दर (अभ्यंतर)

बिंदु R कहाँ स्थित है? : त्रिभुज के ______

बिंदु P कहाँ स्थित है? : त्रिभुज के ______

क्या हम सोचकर बता सकते हैं कि एक त्रिभुज के अभ्यंतर भाग में कितने कोण होते हैं?

हम देख सकते हैं कि त्रिभुज के
तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ और तीन कोण होते हैं।

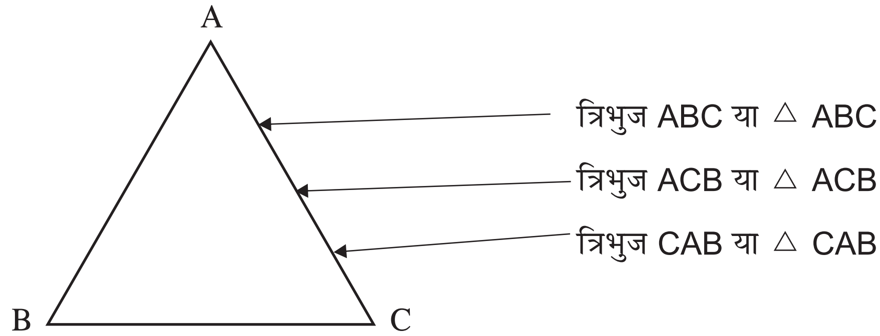
त्रिभुज = त्रि+भुज = तीन भुजाओं वाली बन्द आकृति

त्रिकोण = त्रि+कोण = तीन कोणों वाली बन्द आकृति

आइए, त्रिभुज का उसके शीर्ष बिंदुओं के नामों की सहायता से उसका नामकरण करते हैं।

जैसे:-

△ चिन्ह
त्रिभुज को दर्शाता है।

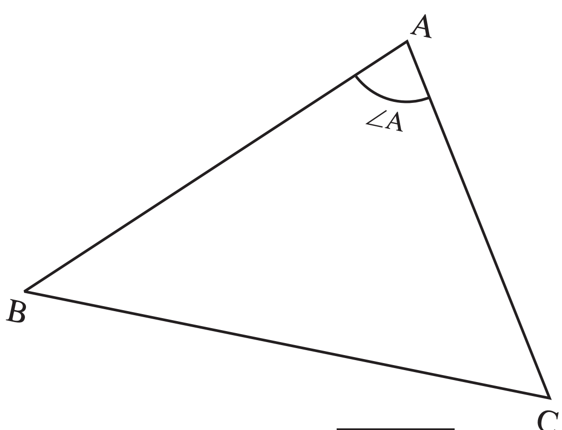


हम देखते है कि त्रिभुज को 6 नाम से संबोधित कर सकते हैं।

क्या त्रिभुज के और भी नाम हो सकते हैं?
लिखने का प्रयास कीजिए।

त्रिभुज ________ या ________
________ या ________
________ या ________

आइए, त्रिभुज को समझते हैं।



ΔABC में कितने कोण हैं? ☐

कोणों के नाम लिखो -

(1) $\angle$A या $\angle$BAC या $\angle$CAB

(2) __________

(3) __________

ΔABC में कितनी भुजाएँ हैं? ☐

भुजाओं के नाम लिखने का प्रयास करते हैं -

(1) AB या BA (भुजा AB या BA)

(2) __________

(3) __________

आइए एक रोल प्ले पढ़ते हैं। इसे अपने अध्यापक की मदद से खेल सकते हैं।

8 छात्र

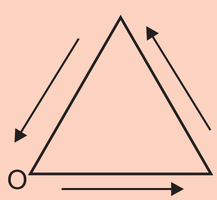
है प्रीत जहाँ की रीत सदा, ज्योमेट्री पढ़ने वाले हैं
बिंदु पढ़ा है कोण पढ़ा अब त्रिभुज समझने वाले हैं ......

(7 बच्चे आँख बंद करके अपनी जगह पर बैठ जाते हैं। टीचर की हिदायतों के मुताबिक बच्चे प्रतिक्रिया व्यक्त करते हैं।

पवन (टीचर): सभी ध्यानपूर्वक कल्पना करें। एक लम्बा रास्ता चलता ही जाता है, चलता ही जाता है। एक दूसरा रास्ता बाएँ से आकर उससे मिलता है। वो भी आगे चलता ही जाता है, चलता ही जाता है। थोड़ी दूरी पर बाईं ओर एक और रास्ता उससे मिलता है और अगर हम वहीं पहुँच जाते हैं जहाँ से चले थे। इसके क्या मायने हैं?

शबनम : इसके मायने ये है कि लौटकर हम वहीं आ गए जहाँ से चले थे मतलब अपने घर आ गए। (सभी हँसते है।)

पवन : बिल्कुल सही। अब अपनी आँखें खोल लीजिए और इधर चार्ट पर देखिए। इसे हम ऐसे समझ सकते हैं।



विकास: अरे वाह! ये तो एक बंद आकृति बन गई।

पवन: हाँ, तो इस बंद आकृति में कितनी भुजाएँ हैं?

हरी: (झिझकते हुए) **3**

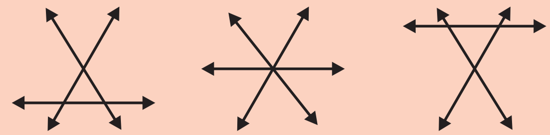
पवन: बिल्कुल सही हरी। जिन रास्तों पर हम चले वो तीन ही तो थे, जिनसे हमारी इस आकृति की भुजाएँ बनीं।

(एक बार फिर से बच्चों को आँखें बंद करने को कहा जाता है।)

पवन: अब माना कि तीन रेखाएँ हैं जो एक दूसरे को काटती हैं। सोचकर देखो! इस सूरत में कैसी–कैसी आकृतियाँ बनेंगी?

कुछ देर बाद कई बच्चे बंद आँखों के साथ ही हाथ उठाते हैं। पवन सभी बच्चों को आँखें खोलने के लिए कहता है।)

पवन: अब बच्चे चार्ट पेपर पर आकर उन आकृतियों को बनाने की कोशिश करें जो उन्होंने बंद आँखों से बनती हुई महसूस कीं।



(बच्चे चार्ट पेपर पर विभिन्न आकृतियाँ बनाते हैं। सामान्यतौर पर तीन तरह की आकृति उभरकर आती हैं।)

पवन: अब इन तीनों आकृतियों में पहली और तीसरी आकृति में बंद आकृति बन रही हैं। ठीक। इन दोनों ही आकृतियों में क्या खास बात है?

सुलेख: सर ये दोनों ही बंद हैं।

बिपाशा: ये दोनों ही तीन भुजाओं से बनी हैं।

पवन: शाबाश सुलेख और बिपाशा। तुम दोनों को मैंने पहली बार क्लास में बोलते हुए देखा है।

आमिर: सर इसका नाम मैं बताऊँ?

पवन: किसका नाम?

आमिर: इस आकृति का।

पवन: हाँ हाँ बताओ।

आमिर: त्रिभुज।

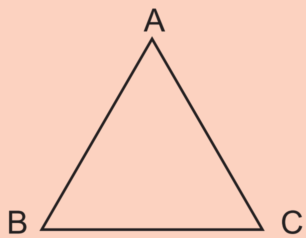
पवन: अरे वाह! तुमने इसका नाम कैसे जाना?

आमिर: सर मेरे बड़े भैया ने मुझे बताया था?

पवन: अच्छा, और क्या बताया तुम्हारे बड़े भैया ने?

आमिर: उन्होंने ये भी बताया कि **तीन भुजाओं से घिरी बंद आकृति को त्रिभुज कहते हैं।**

पवनः शाबाश आमिर, तुमने सही कहा। त्रिभुज दरअसल **त्रि** और **भुज** दो शब्दों से जुड़कर बना है। कोई **त्रि** का मतलब बता सकता है?
(कई बच्चे एक साथ हाथ उठाते हैं। पवन बिपाशा को बताने के लिए कहते हैं।)
बिपाशाः त्रि का मतलब होता है तीन।
हरीः और तीन भुजाएँ होती हैं इसीलिए इसे त्रिभुज कहते हैं।
पवनः क्या बात है!! बहुत बढ़िया हरी।

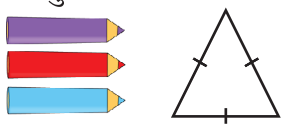


अच्छा, इस आकृति में त्रिभुज का नाम क्या होगा?
सुलेख : त्रिभुज ABC
पवनः बिल्कुल सही। इसकी भुजाएँ कौन-कौन सी हैं?
हरीः भुजा AB, भुजा BC, भुजा CA
पवनः इसमें शीर्ष कितने हैं?
बिपाशाः सर ये शीर्ष क्या होते हैं?
पवनः ''शीर्ष वे बिंदु होते हैं जिन पर दो भुजाएँ एक दूसरे से मिलती हैं।''
बिपाशाः तो इसके शीर्ष हुए सर .. A, B और C
पवनः गिरि तुम शुरू से ही चुपचाप बैठे हो। क्या तुम बता सकते हो कि इस त्रिभुज में कितने कोण बन रहे हैं। कोणों के नाम क्या- क्या हैं?
गिरिः तीन सर।
शबनमः अरे भाई सर तो एक ही हैं ....कोण तीन हैं।
(हँसी का ठहाका फूटता है।)
पवनः हाँ हाँ शबनम, गिरि का मतलब यही था। है न गिरि?
गिरिः यस सर।
पवनः अच्छा तो अब कोणों के नाम बताओ?
गिरिः कोण A, कोण B और कोण C
पवनः बहुत बढ़िया गिरि। इन कोणों को और स्पष्ट करने के लिए हम कह सकते हैं कोण BAC, कोण ABC और कोण BCA
पवनः अब मुझे ये बताओ कि कोई भी बंद आकृति बनाने के लिए कम से कम कितनी भुजाओं की ज़रूरत होती है?
(बच्चे कुछ देर सोचते हैं।)
शबनमः सर तीन की, तीन से कम में तो बंद आकृति बन ही नहीं सकती।
पवनः बिल्कुल सही। अब क्यों न हम सब स्पोर्ट्स रूम में चलकर त्रिभुज आकृतियों को पहचानें?
गिरिः हम कैरम बोर्ड भी खेलेंगे।
पवनः बिल्कुल बिल्कुल, चलो।
हरीः सर आप भी हमारे साथ खेलेंगे न?
पवनः क्यों नहीं! मैं भी बहुत दिनों से कैरम नहीं खेला, मेरी भी प्रैक्टिस हो जाएगी। तुम्हें पता है, मैं अपने स्कूल के दिनों में कैरम चैंम्पियन था। मैं तुम्हें इस खेल की कुछ ख़ास ट्रिक्स बता सकता हूँ।
हरी : यस सर, यस सर ...हम भी सीखेंगे।
बिपाशाः सर प्लीज मेरे साथ भी खेलिएगा।
पवनः बच्चो, कैरम खेलते समय आपने ध्यान दिया होगा कि हम स्ट्राइकर से त्रिभुज का अनुसरण करते हुए बाधित गोटी निकाल सकते हैं।
ठीक है मेरे बच्चो, अब चलो। (सभी का प्रस्थान)

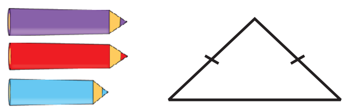
त्रिभुजों को उनके कोणों तथा भुजाओं की विशेषताओं के आधार पर बाँटा जा सकता है।

भुजाओं के आधार पर

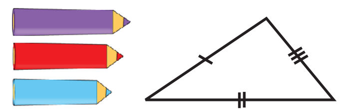
समबाहु त्रिभुज
(तीनों भुजाओं की माप बराबर)



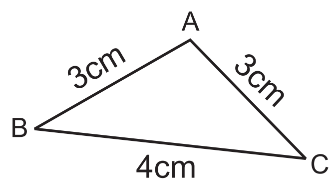
समद्विबाहु त्रिभुज
(किन्हीं दो भुजाओं की माप बराबर)



विषमबाहु त्रिभुज
(तीनों भुजाओं की अलग-अलग माप)

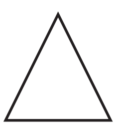


उदाहरण: नीचे दिए गए त्रिभुज में हम देख सकते हैं इसकी दो भुजाओं AB तथा AC की लंबाई बराबर हैं, इसलिए यह समद्विबाहु त्रिभुज होगा।

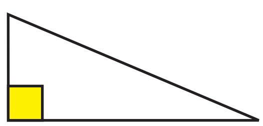


कोण के आधार पर

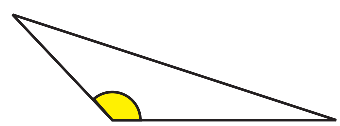
न्यूनकोण त्रिभुज
(तीनो कोण 90° से कम)



समकोण त्रिभुज
(कोई भी एक कोण 90° के बराबर)

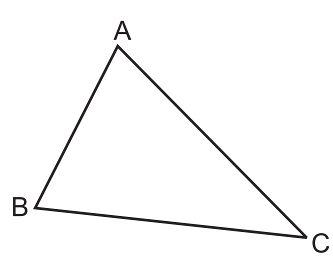


अधिककोण त्रिभुज
(कोई एक कोण 90° से ज्यादा)

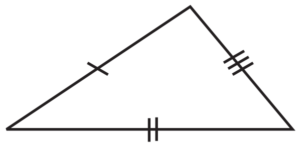


नोट: उपरोक्त विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों को आप अपनी पेंसिलों तथा उसके छोटे टुकड़ों से बनाने का प्रयास करें।

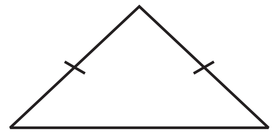
उदाहरण: नीचे दिए गए त्रिभुज में हम देख सकते हैं कि इसके तीनों कोण 90° से कम हैं। इसलिए यह न्यूनकोण त्रिभुज होगा।



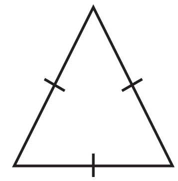
यहाँ त्रिभुजों का उनकी भुजाओं की विशेषताओं के आधार पर नाम लिखो। तथा उनके कोणों के आधार पर उनके वर्गीकरण की पहचान कर नीचे उनके समूह के अंक के सामने लिखें।



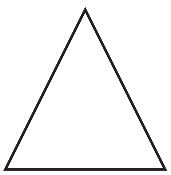
विषमबाहु त्रिभुज



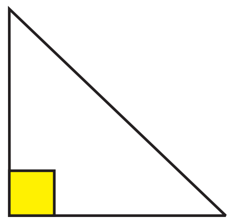
.... त्रिभुज



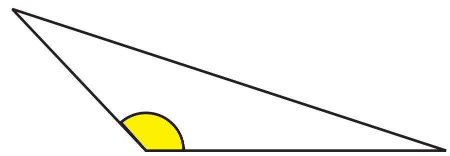
.... त्रिभुज



.... त्रिभुज



समकोण समद्विबाहु त्रिभुज



विषमबाहु.........................त्रिभुज

1. न्यूनकोण त्रिभुजों का समूह

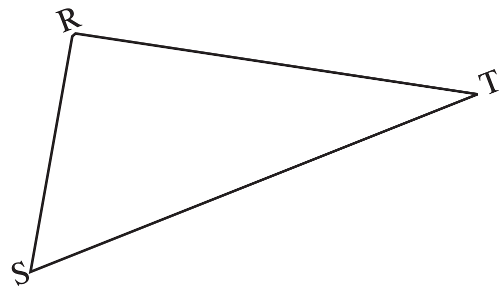
2. समद्विबाहु त्रिभुजों का समूह

3 ....

4. ....

आइए कुछ सवालों के जवाब देते हैं।

त्रिभुज RST में देखकर उत्तर दीजिए।

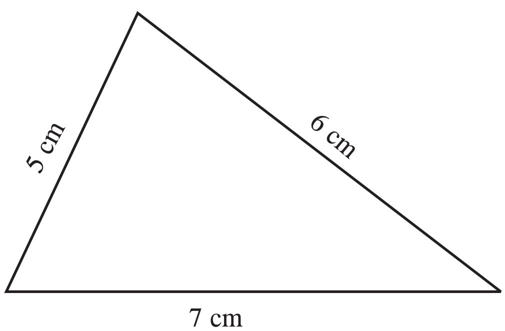


1. तीनों भुजाओं के नाम ______, ______, ______
2. तीनों कोणों के नाम ______, ______, ______
3. तीनों शीर्षों के नाम ______, ______, ______
4. ∠R के सामने (सम्मुख) वाली भुजा का नाम ____________
5. भुजा RT के सामने वाला शीर्ष ____________

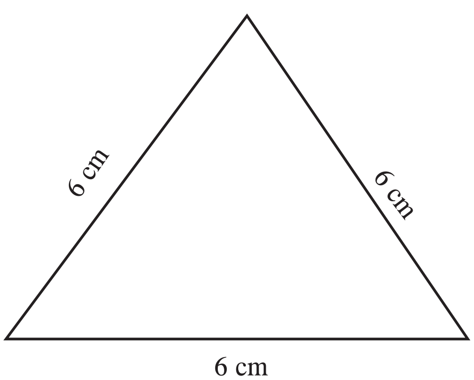
2. त्रिभुजों की भुजाएँ व कोण देखकर त्रिभुजों के नाम लिखिए।

(समबाहु त्रिभुज/ समद्विबाहु त्रिभुज/ विषमबाहु त्रिभुज)

(न्यूनकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज, अधिककोण त्रिभुज)



विषमबाहु व न्यूनकोण त्रिभुज

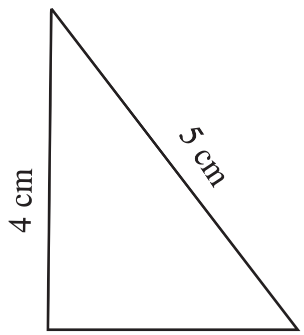


____

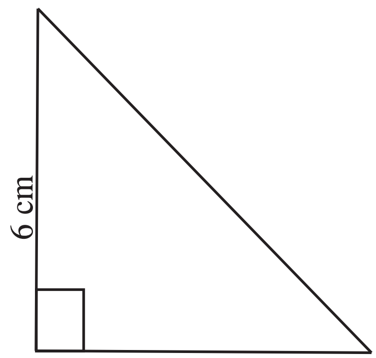
आकृति

(समबाहु त्रिभुज/ समद्विबाहु/ विषमबाहु/)

(न्यूनकोण, समकोण, अधिककोण)

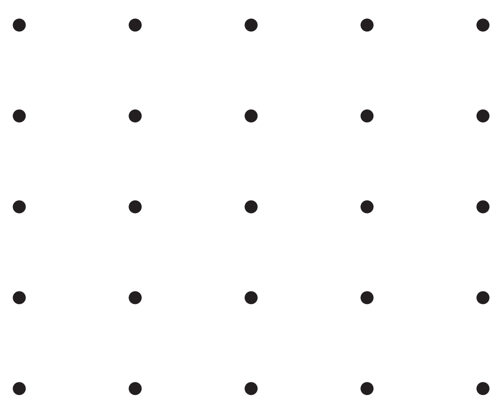


____



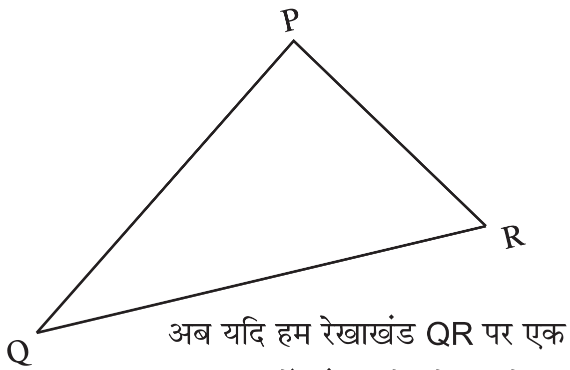
____

नीचे हमें कुछ बिंदु दिए गए हैं, उन बिंदुओं की सहायता से अलग-अलग प्रकार के न्यूनकोण, समकोण और अधिककोण त्रिभुज बनाकर देखिए।



त्रिभुज की माध्यिका (Median of a Triangle)

त्रिभुज की माध्यिका, त्रिभुज के किसी शीर्ष को उसके सामने वाली भुजा के मध्यबिंदु से मिलाने वाला रेखाखंड होती है।

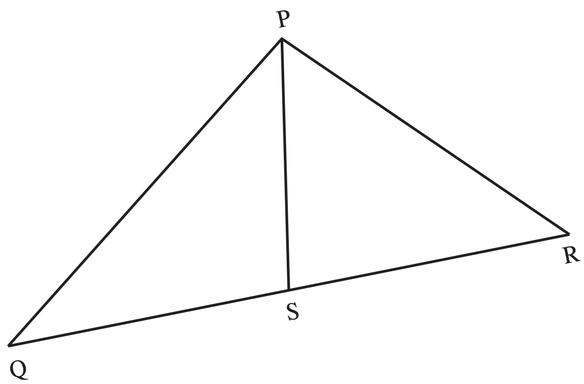


शीर्ष P की सम्मुख भुजा =QR

शीर्ष Q की सम्मुख भुजा = ___

शीर्ष R की सम्मुख भुजा = ___

अब यदि हम रेखाखंड QR पर एक बिंदु S पता कर लें जो QR को दो बराबर भागों में बाँटता हो, तो PS रेखाखंड त्रिभुज PQR की माध्यिका होगी।



क्या हम बता सकते हैं कि त्रिभुज की कितनी माध्यिकाएँ होंगी ?....................

सभी माध्यिकाओं को Δ PQR में दिखाइए।

$\Rightarrow$ त्रिभुज की माध्यिका पूर्णतया त्रिभुज के अन्दर स्थित होती है।

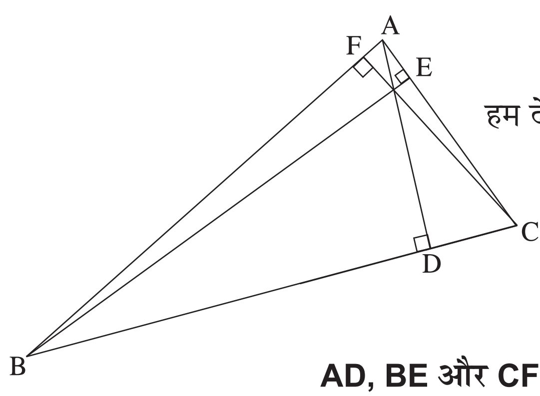
त्रिभुज के शीर्षलंब

शीर्षलंब $\xrightarrow{\text{शाब्दिक अर्थ}}$ शीर्ष से खींचा गया लंब

क्या हम किसी त्रिभुज की ऊँचाई के बारे में सोच सकते हैं? अपने अध्यापक से चर्चा करें।

हम देखेंगे कि त्रिभुज की ऊँचाई इस बात पर निर्भर करती है कि हम त्रिभुज की कौन सी भुजा को आधार मानते हैं।

यदि हम त्रिभुज के किसी शीर्ष से उसके सामने वाली भुजा पर लम्बवत (90°) पर एक रेखाखण्ड खीचें तो वह रेखाखंड शीर्षलंब कहलाता है।



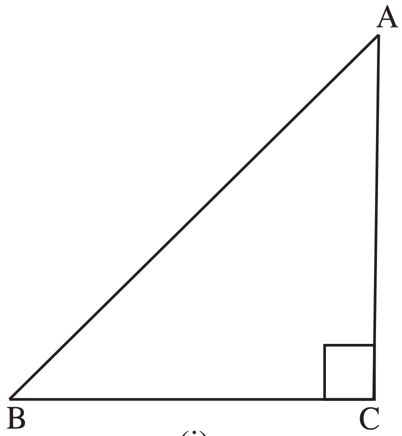
हम देख सकते हैं AD लंब है BC पर

BE लंब है ______ पर

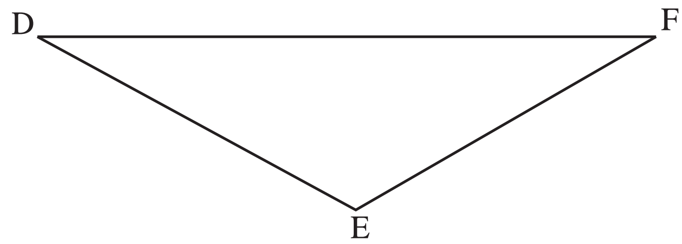
CF लंब है ______ पर

AD, BE और CF तीन शीर्षलंब हैं।

नीचे दिए गए त्रिभुजों के शीर्षलंब अनुमान से बनाइए तथा उनका नाम दीजिए।



(i)

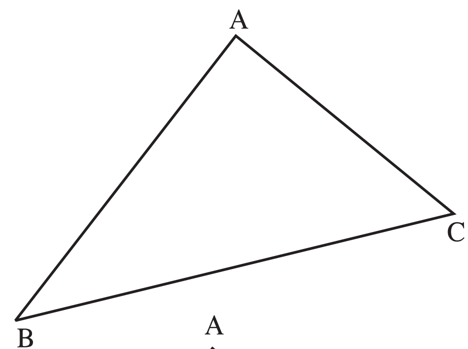


(ii)

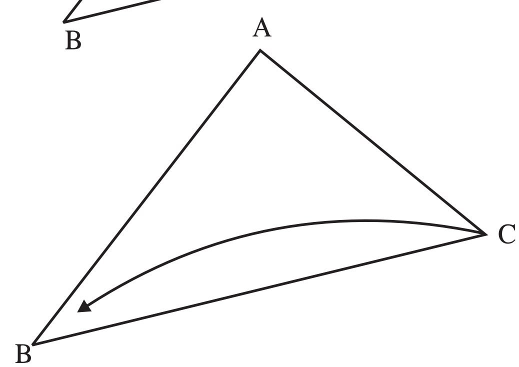
किस त्रिभुज में उसकी दो भुजाएँ उसके शीर्ष लम्ब भी हैं?

पेपर को मोड़कर माध्यिका बनाना

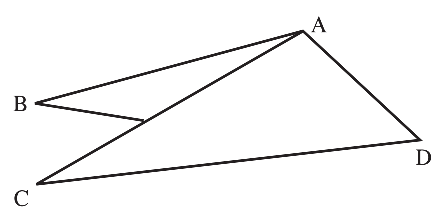
(1) पेपर पर एक त्रिभुज बनाएँ और काट लें।



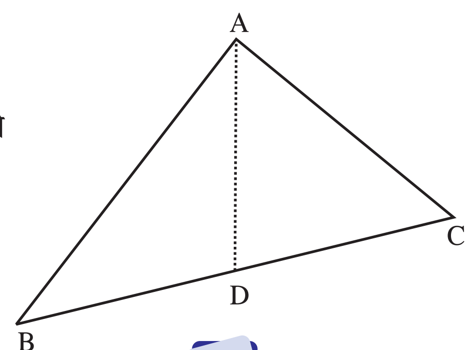
(2) अब त्रिभुज के किन्हीं भी दो शीर्ष को मिला दें।



(3) बिंदु D, BC का मध्य बिंदु है। अब पेपर को खोलकर A और D को पेंसिल से मिला दें।

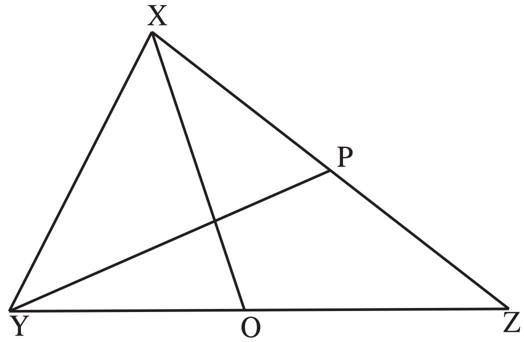


इसी प्रकार त्रिभुज की बाकी बची दो माध्यिकाएँ भी निकालिए।



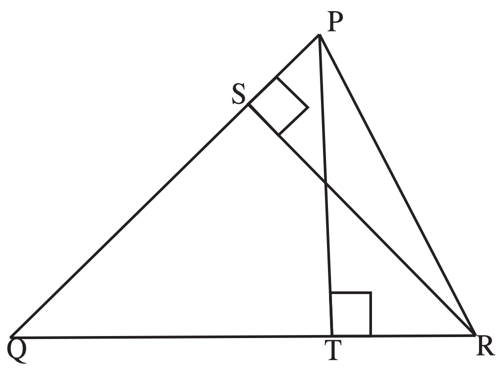
आओ, कुछ प्रश्नों के जवाब दें

आकृति में दोनों माध्यिकाओं को पहचानकर नाम लिखिए। यदि P मध्य बिंदु XZ तथा O मध्य बिन्दु YZ है।



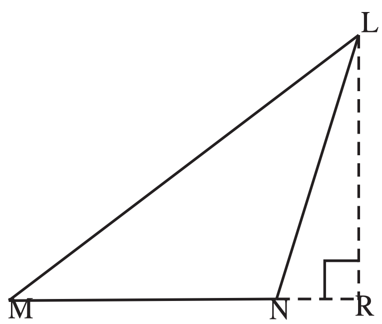
____

आकृति में दोनों शीर्षलंबों को पहचानकर नाम लिखिए।



____

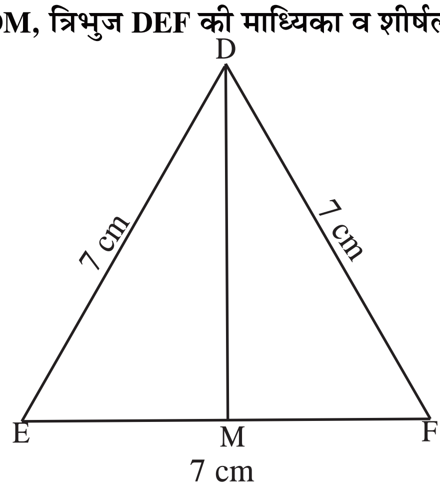
दी गई आकृति में पहचानिए कि **LR** क्या है?



____

नीचे दी गई आकृति में भुजाओं **EM** तथा **MF** को मापिए तथा $\angle$ **DMF** को मापिए।

क्या **DM**, त्रिभुज **DEF** की माध्यिका व शीर्षलंब दोनों हैं।



EM = ____________________

MF = ____________________

$\angle$ **DMF** = ____________________

कोई भी एक त्रिभुज बनाइए। उसके तीनों कोणों का माप निकालिए। तीन कोणों को योग ज्ञात करो तथा अपने साथियों के बनाए त्रिभुज के कोणों के योग से उसकी तुलना कीजिए।

हम देखेंगे कि सभी त्रिभुजों के कोणों का योग 180° आता है।

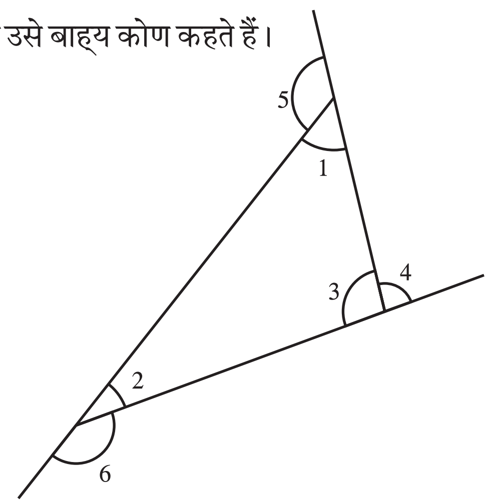
बाह्य कोण (बहिष्कोण)

त्रिभुज के अंदर के भाग में बनने वाले कोणों के नाम $\angle 1, \angle 2, \angle 3$

त्रिभुज के बाहरी भाग में बनने वाले कोणों के नाम ......, ..., ...

वे कोण जो किसी त्रिभुज की भुजा को बढ़ाकर उसके बाहरी भाग में बनते हैं उसे बाह्य कोण कहते हैं।

कोणों के माप ज्ञात कीजिए।



$\angle 1$ =.......... $\angle 2$ =..........

$\angle 3$ =.......... $\angle 4$ =..........

$\angle 5$ =.......... $\angle 6$ =..........

हाँ/नहीं

क्या $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ है? ....

क्या $\angle 6 = \angle 1 + \angle 3$ है? ....

क्या $\angle 5 = \angle 2 + \angle 3$ है? ....

हम देख सकते हैं कि किसी भी त्रिभुज की कोई भी भुजा को बढ़ाने पर बना बाह्य कोण उसके दो सुदूर अंत: कोणों के योगफल के बराबर होता है।

$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

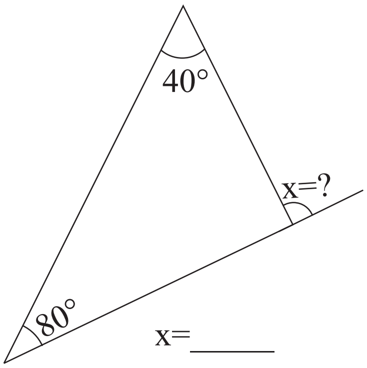
$\angle 5 = \angle 2 + \angle 3$

$\angle 6 = \angle 1 + \angle 3$

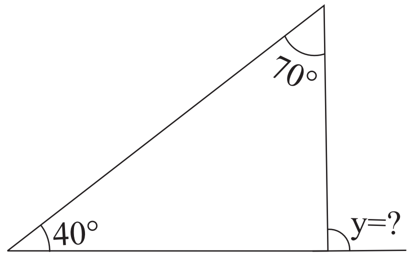
उत्तर दीजिए

1. क्या एक त्रिभुज में तीनों कोण न्यूनकोण हो सकते हैं? ....
2. क्या एक त्रिभुज में तीनों कोण समकोण हो सकते हैं? ....
3. क्या एक त्रिभुज के दो समकोण हो सकते हैं?...............
4. एक त्रिभुज के ज़्यादा से ज़्यादा कितने कोण 90° के हो सकते हैं? ....
5. क्या एक त्रिभुज में दो कोण अधिककोण हो सकते हैं? ....
6. क्या किसी त्रिभुज का बाह्य कोण 180° का हो सकता है? ....

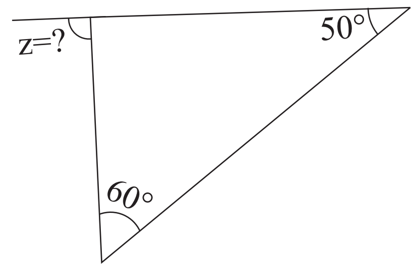
दी गई आकृतियों में अज्ञात बाह्य कोण का मान निकालिए।



x=______

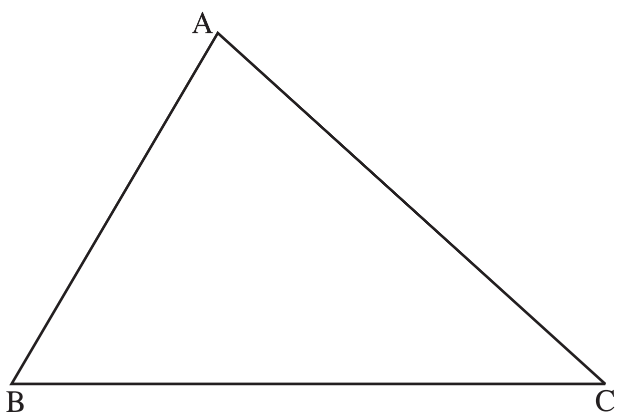


y=______



z=______

नीचे बने त्रिभुजों में तीनों कोणों को मापकर लिखें। तीनों का योग भी लिखें।

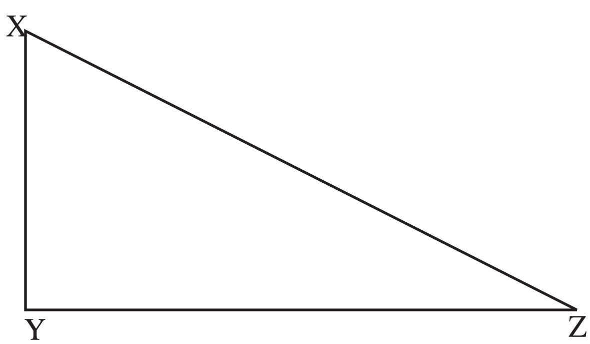


$\angle A$ = __________

$\angle B$ = __________

$\angle C$ = __________

योग = __________

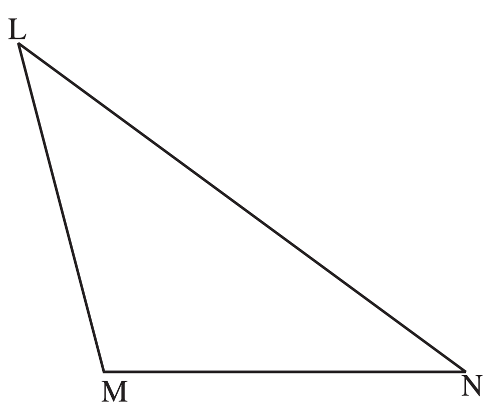


$\angle X$ = __________

$\angle Y$ = __________

$\angle Z$ = __________

योग = __________



$\angle L$ = __________

$\angle M$ = __________

$\angle N$ = __________

योग = __________

आओ खेलें खेल

- झाड़ू की कुछ तीलियाँ लें। अब एक बड़ी तीली के तीन टुकड़े करें और उन टुकड़ो से एक न्यूनकोण त्रिभुज बनाने का प्रयास करें।
- एक और बड़ी तीली लें और उसे इस प्रकार तीन भागों में बाँटें कि एक अधिककोण त्रिभुज बन सके।
- क्या हमारे दोनों त्रिभुज बन गए? अगर नहीं बने, तो अपने साथियों के साथ मिलकर बनाएँ।

आइए, अब खेल में थोड़ा परिवर्तन करते हैं।

- क्या हम एक और बड़ी तीली के कुछ इस प्रकार टुकड़े कर सकते हैं कि त्रिभुज न बनें?
- अब फिर से नई तीली लेकर उसके टुकड़े कुछ इस तरह से करें कि त्रिभुज न बने। ध्यान रहे कि इस बार तीलियों के टुकड़ों की लंबाई पिछली बार से अलग हो।

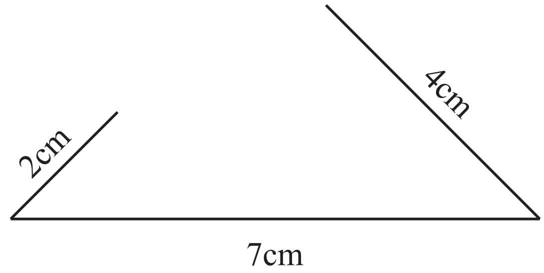
हम कह सकते हैं कि जब भी हमें तीली के तीन ऐसे टुकड़े करने थे कि त्रिभुज न बने तो एक इतना लंबा टुकड़ा लिया कि बाकी दोनों टुकड़े जोड़कर भी उससे छोटे हों।

क्या हम कह सकते हैं कि त्रिभुज तभी बनेगा जब इसकी किन्हीं भी दो भुजाओं की लंबाई का योग तीसरी से ज़्यादा हो?

त्रिभुज की भुजाओं की माप संबंधित गुण

अध्यापक : बच्चो क्या आप एक ऐसा त्रिभुज बना सकते हैं। जिसकी भुजाओं की माप 2cm, 4cm तथा 7cm है।

अध्यापक : आइए हम इन मापों की तीन तीलियाँ लेकर इस त्रिभुज को बनाते हैं।

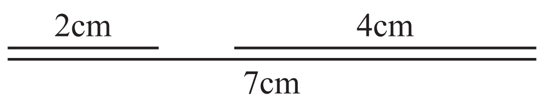


अध्यापक : क्या यह त्रिभुज बना ?

शादाब : नहीं सर

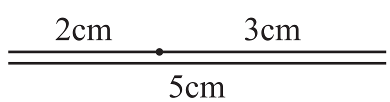
बीना : यह त्रिभुज क्यों नहीं बना सर ?

अध्यापक : हम यह देखते हैं कि $2cm + 4cm\ (6cm) < 7cm$



यानी यहाँ त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग ($2cm + 4cm = 6cm$) है जो तीसरी भुजा की माप 7cm से कम है। इस कारण इन तीन तीलियों के सिरे एक बन्द त्रिभुज के रूप में नहीं मिलते हैं।

अध्यापक : मनजीत अब 2cm, 3cm और 5cm मापों की तीलियों से एक और त्रिभुज बनाकर देखो।



अध्यापक : क्या यह त्रिभुज भी बना ?

मनजीत : नहीं सर।

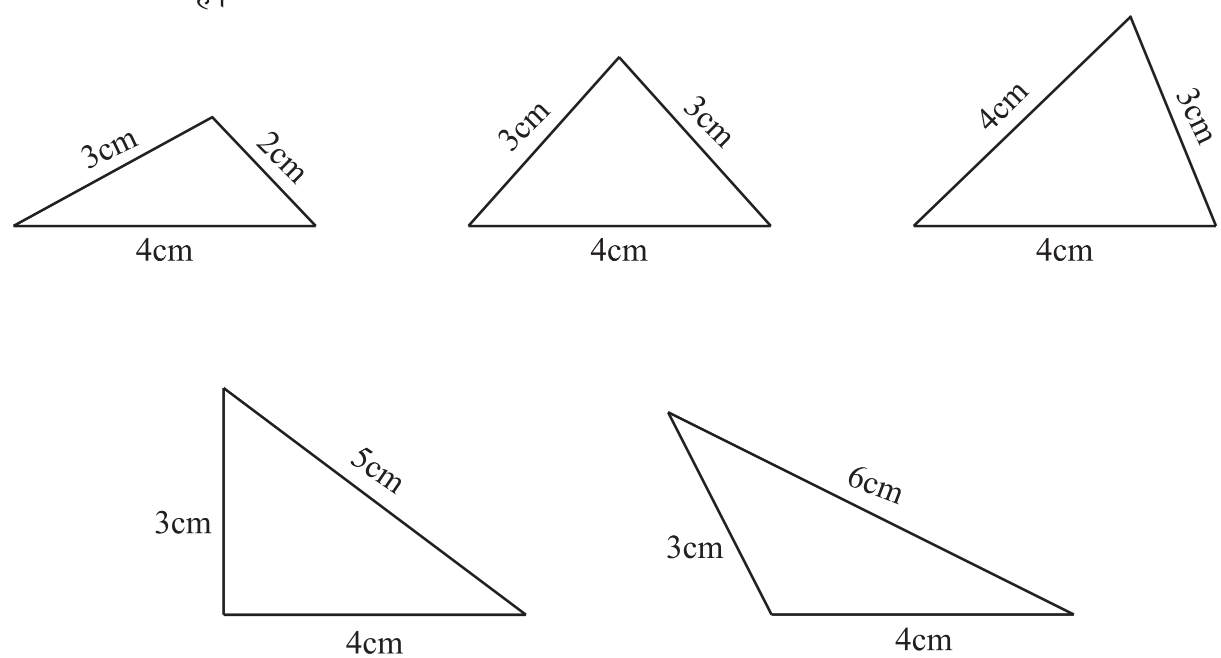
अध्यापक : बच्चो, यहाँ भी हम देखते हैं कि $2cm + 3cm = 5cm$ है यानी त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग इसकी तीसरी भुजा की माप 5cm के ठीक बराबर है। इसलिए यहाँ भी तीनों तीलियाँ एक बन्द त्रिभुज के रूप में आकृति नहीं बनाती हैं।

अध्यापक : आओ बच्चो अब हम दो तीलियाँ 4cm और 3cm लंबी लेते हैं तथा त्रिभुज बनाने के लिए तीसरी तीली की लम्बाई का अनुमान लगाते हैं।

तीसरी तीली की माप 4cm - 3cm = 1cm से अधिक लेकिन 4cm + 3cm = 7cm से कम लंबी लेनी होगी।

मृदुल : तब तो 'सर' तीसरी तीली की लम्बाई 1cm से अधिक तथा 7cm से कम, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm, और 6cm में से कोई भी हो सकती है।

अध्यापक : शाबाश, मृदुल ! हमें एक त्रिभुज बनाने के लिए तीन तीलियों का चयन इस प्रकार करना होगा जिससे उनमें कोई दो तीलियों की लंबाइयों का योग तीसरी तीली की लम्बाई से अधिक हो। इस प्रकार दो भुजाओं की माप 4cm तथा 3cm के साथ तीसरी भुजा की माप 2cm, 3cm, 4cm, 5cm और 6cm रखकर निम्न 5 त्रिभुज बन सकते हैं।



अध्यापक : बच्चो, इससे यह पता चलता है कि एक त्रिभुज में

(क) उसकी दो भुजाओं की मापों का योग, उसकी तीसरी भुजा की माप से अधिक होता है।

(ख) उसकी दो भुजाओं की मापों का अन्तर, उसकी तीसरी भुजा की माप से कम होता है।

इस प्रकार एक त्रिभुज बनाने के लिए

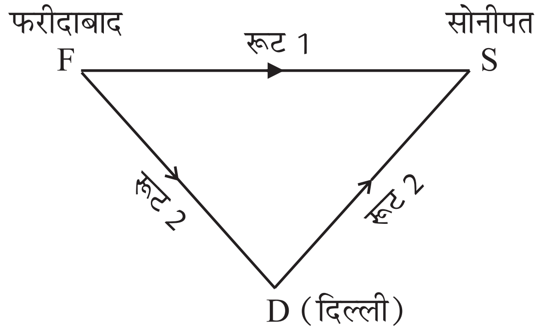
दी गई भुजाओं की मापों का अन्तर < तीसरी भुजा की संभावित माप < दी गई दोनों भुजाओं की मापों का योग

ACTIVITY

अब अपने साथियों के साथ मिलकर नीचे दी गई तालिका के हिसाब से तीलियों से त्रिभुज बनाने का प्रयत्न करें व तालिका पूर्ण करें।

सबसे छोटी तीली की लम्बाई S1	इससे बड़ी तीली की लम्बाई S2	सबसे बड़ी तीली की लम्बाई S3	△ की दो भुजाओं की मापों का योग S1+S2	△ की तीसरी भुजा की माप S3	क्या △ यह संभव है? क्यों (या) क्यों नहीं S1+S2 > S3	किस प्रकार का △ बना △ कोण का नाम भुजाओं के आधार पर
1 cm	2 cm	3 cm				
1 cm	4 cm	5 cm				
2 cm	3 cm	4 cm				
2 cm	3 cm	5 cm				
2 cm	3 cm	6 cm				
2 cm	3 cm	7 cm				
2 cm	3 cm	8 cm				
3 cm	4 cm	5 cm				
3 cm	5 cm	9 cm				

अध्यापक : बच्चो, फरीदाबाद से सोनीपत जाने के लिए सबसे छोटा रास्ता मालूम करते हैं। निम्न चित्र में जानने की कोशिश करते हैं कि कौन सा रूट छोटा है?



क्या रूट 2, रूट 1 से छोटा हो सकता है?

बच्चे : नहीं।

अध्यापक : अगर हम ध्यान से देखें तो ये एक त्रिभुज की आकृति बनती है।

जिस तरह रूट 2 की लम्बाई हमेशा रूट 1 से अधिक है, इसी प्रकार एक त्रिभुज में दो भुजाओं का योग हमेशा तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

त्रिभुज एवं त्रिभुजों के प्रकार

1. त्रिभुज एवं त्रिभुज के प्रकार।
2. एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग।
3. त्रिभुज की माध्यिकाएँ एवं शीर्षलंब।
4. त्रिभुज के बाह्य कोण की माप, उसके दो सम्मुख अंत: कोणों के योग के बराबर होती है।
5. त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की माप तीसरी भुजा से ज़्यादा होती है।

2nd Term

अध्याय 6 – त्रिभुजों की सर्वांगसमता

अध्यापिका :– बच्चो आज हम सर्वांगसमता के बारे में जानने का प्रयास करेंगे।

रानी:– सर्वांगसमता क्या होती है?

अध्यापिका :– इसे जानने के लिए आओ पहले कुछ क्रियाकलाप करते हैं।

इन चित्रों को देखो:–

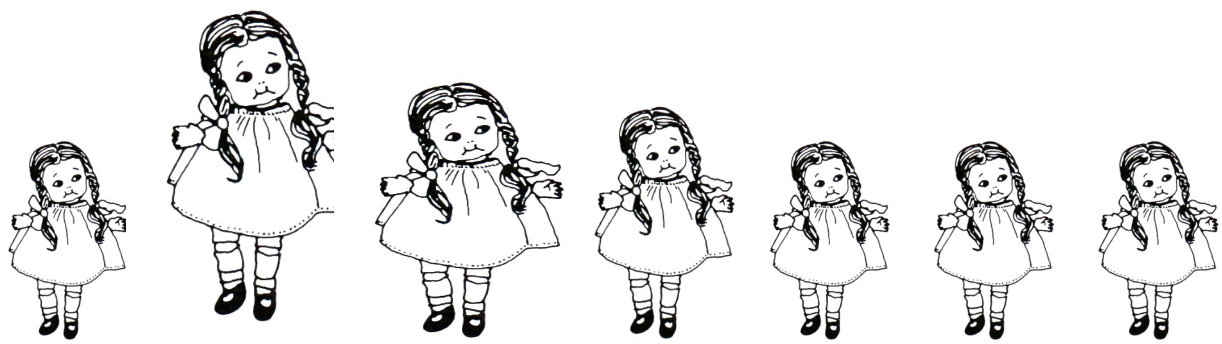
''आओ एक जैसा ढूँढ़ें''

निम्न में से फूलों का वह युग्म निकालो जो आकार तथा माप में बिल्कुल बराबर है।

1. 

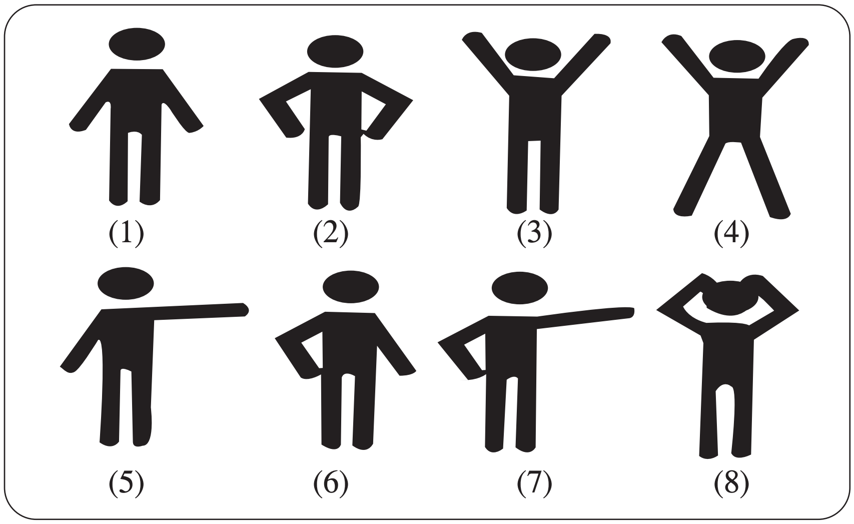
1 2 3 4 5

2. कितनी गुड़िया एक दूसरे के माप तथा आकार में बराबर है? यदि हम इन्हें काटकर एक दूसरे के ऊपर रखें तो कौन–कौन सी गुड़िया एक दूसरे को पूरा–पूरा ढक लेंगी?



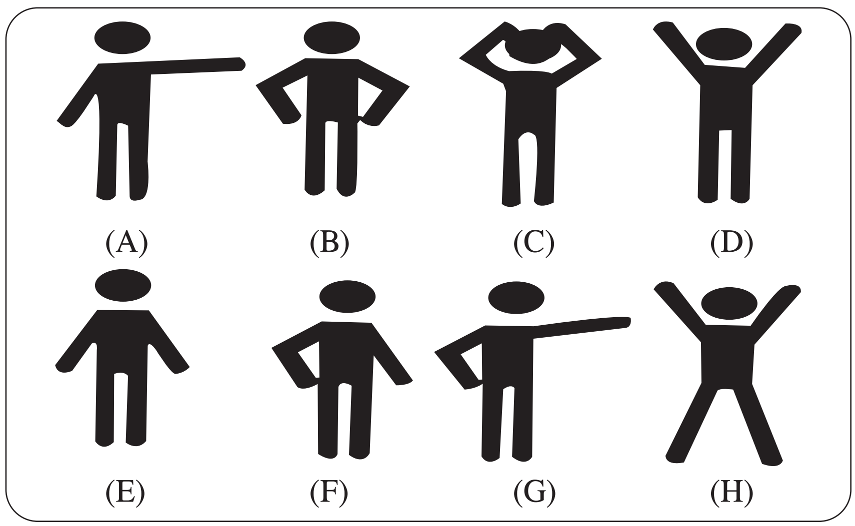
1 2 3 4 5 6 7

बॉक्स 1 के चित्रों का बॉक्स 2 के चित्रों के साथ मिलान कीजिए



बॉक्स (1)

बॉक्स (2)



मिलान कीजिए

बॉक्स 1	बॉक्स 2	बॉक्स 1	बॉक्स 2
1	E	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....

बूझो तो जानें

सर्वांगसमता का अर्थ बिल्कुल एक जैसी प्रतिलिपियाँ/आओ ऐसे कुछ उदाहरण अपने जीवन में ढूँढ़ें।

1) हमारी कापियों के पेज

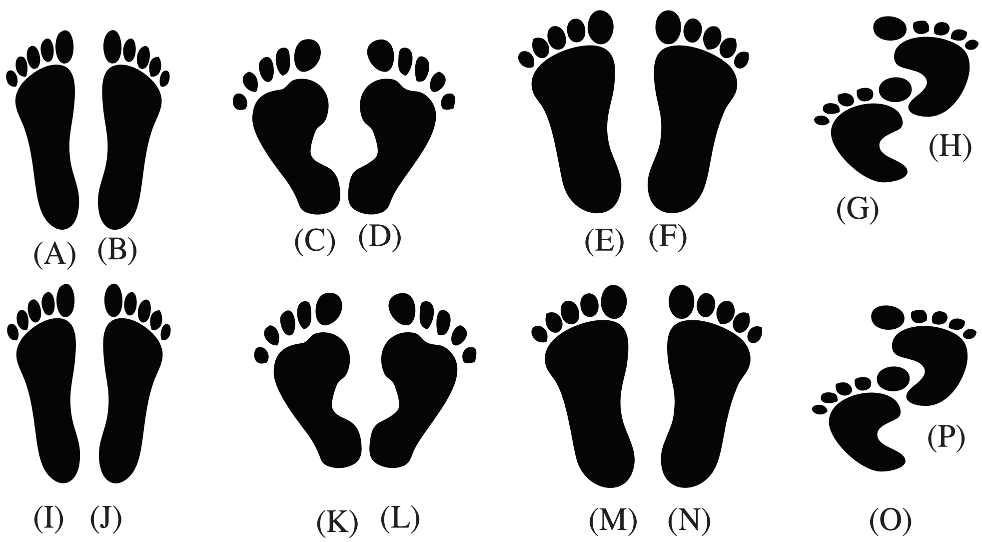
2) एक चाकलेट के डब्बे में चाकलेट

3) ....

4) ....

5) ....

6) ....



सर्वांगसमता की पहचान

(1) माप तथा आकार में बराबर

(2) चित्रों को काटा जाए और एक दूसरे पर रखा जाए तो वे एक दूसरे को पूरा-पूरा ढक लें।

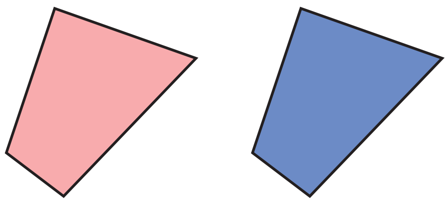
चित्र में कौन-कौन से पैरों के निशान सर्वांगसम हैं?

(A)	-	....	(B)	-	....
(C)	-	....	(D)	-	....
(E)	-	....	(F)	-	....
(G)	-	....	(H)	-	....

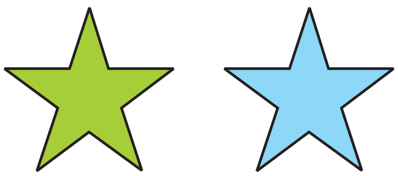
आइए, हम निम्न आकृतियों को देखकर यह जानने का प्रयास करें कि क्या वे आकार व माप दोनों में बराबर हैं? हाँ/नहीं

क्या आकृति समान हैं?...............

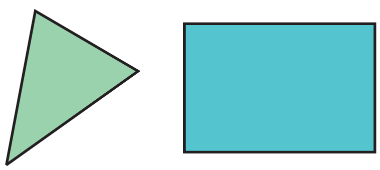
क्या माप समान हैं?...................

1. 

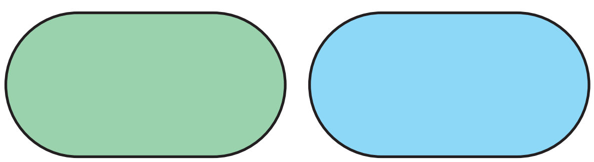
----

2. 

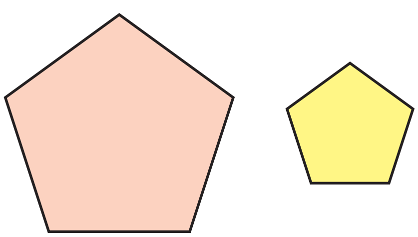
----

3. 

----

4. 

----

5. 

6.

सर्वांगसमता

↓

सर्व+अंग+समता

↓

अर्थात सर्व अंग समान

सर्वांगसमता के लिए ≅ चिन्ह का प्रयोग करते हैं, '~' आकार में समान तथा '=' माप में समान

आइए, कक्षा-7 की एक अध्यापिका तथा एक छात्रा रानी की बातचीत के अंश की चर्चा करते हैं।

अध्यापिका : जानते हो ! जो आकृति आकार तथा माप में बिल्कुल बराबर हैं तथा एक को दूसरे के ऊपर रखने पर वह उसे पूरा-पूरा ढक लेती हैं। तो दोनों आकृतियाँ एक दूसरे के सर्वांगसम कहलाती हैं।

रानी : क्या सर्वांगसमता केवल आकृतियों में ही होती है ?

अध्यापिका : नहीं ! घर तथा प्रकृति में बहुत सी वस्तुएँ होती हैं जो एक दूसरे की सर्वांगसम होती हैं। जैसे गिलास, प्लेट, फूल, सिक्के, नोट ....

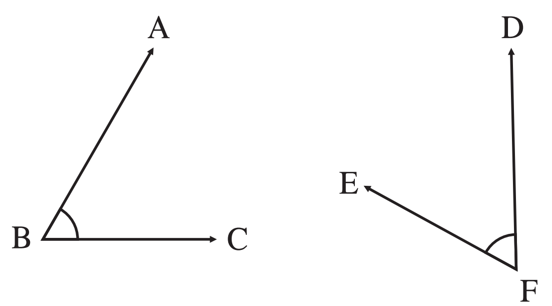
रानी : हम गणित में सर्वांगसमता को कैसे जानेंगे ?

अध्यापिका : आज हम रेखाखंडों, कोणों, और त्रिभुजों की सर्वांगसमता को जानेंगे।

रानी : यदि दो भुजाओं, खण्डों की लम्बाई बराबर हैं तो क्या भुजाएँ भी सर्वांगसम होती हैं ?

अध्यापिका : बिलकुल सही ! आओ, अब कोणों की सर्वांगसमता को समझते हैं। दो कोणों की माप अगर बराबर है, तो वे दोनों कोण सर्वांगसम होंगे। यहाँ ध्यान रखने की बात है कि यह ज़रूरी नहीं कि दो सर्वांगसम कोणों की भुजाएँ भी बराबर हों।

उदाहरण के तौर पर हम नीचे देख सकते हैं कि कोण ABC तथा कोण EFD की माप बराबर है।

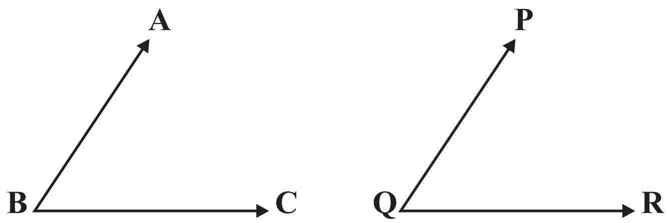


$\angle ABC \cong \angle EFD$

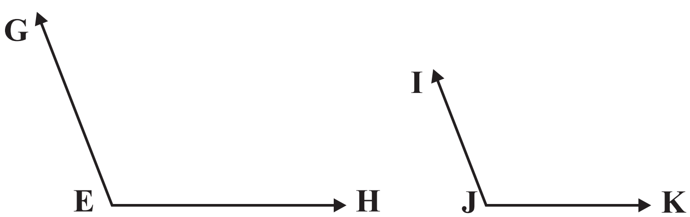
आओ, हम कोणों की सर्वांगसमता से संबंधित कुछ समस्याओं का हल करें।

निम्नलिखित कोणों के युग्म को मापें तथा सर्वांगसमता को जाँचें।

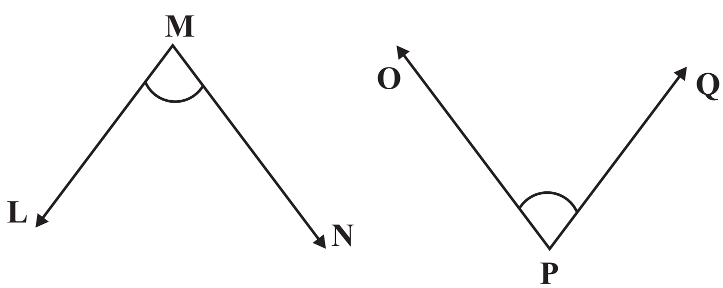
सर्वांगसमता (हाँ/नहीं)

1) 

हाँ

2) 

____

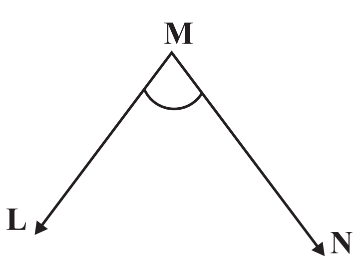
3) 

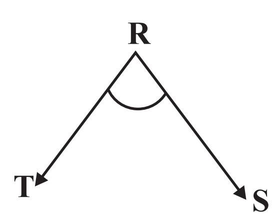
____

4) 

____

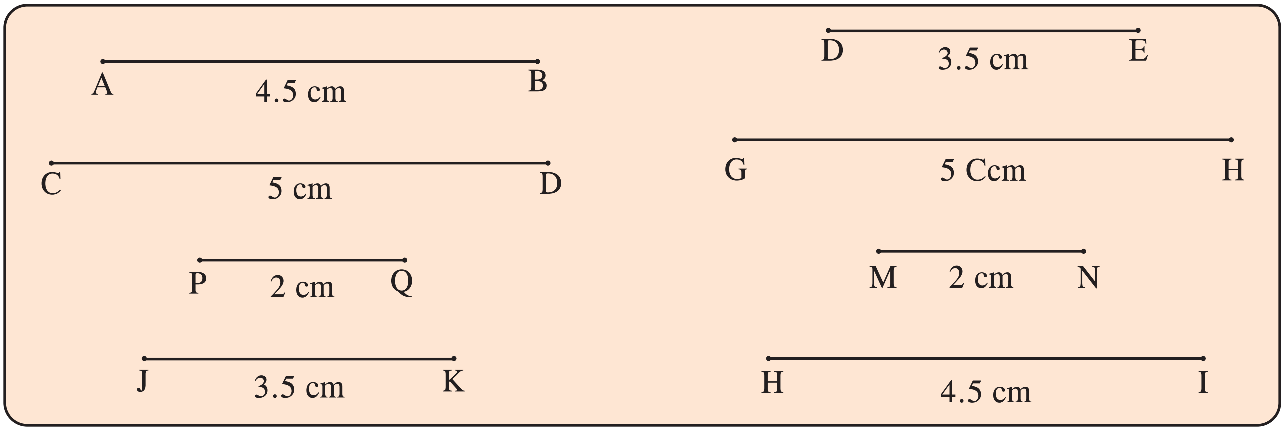
क्या हम बता सकते हैं कि नीचे दिए गए कोण सर्वांगसम हैं? अपने अध्यापक से चर्चा करें।





बॉक्स में से छाँटकर लिखिए।

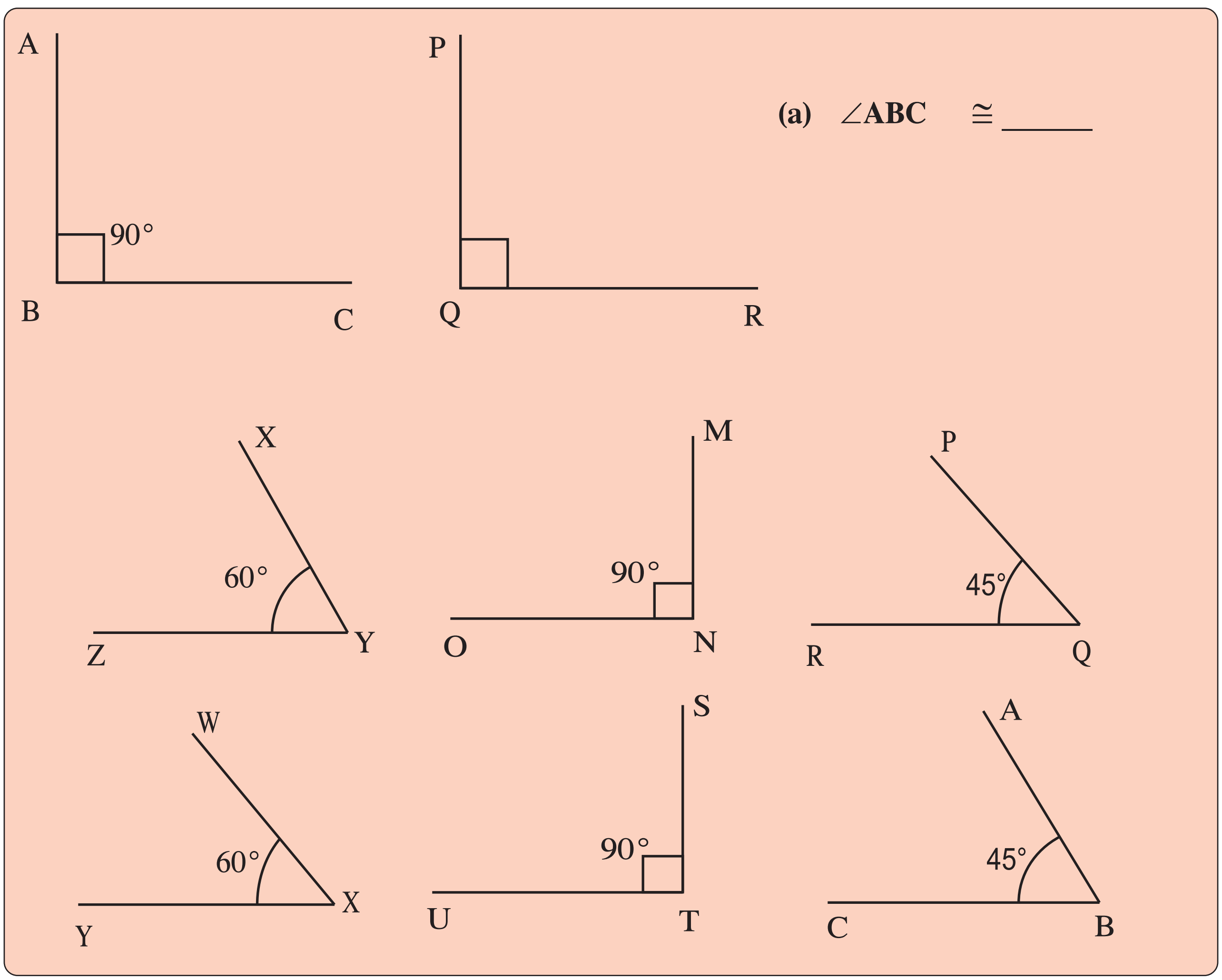
(1)



(a) **AB** ≅ ______ **(b)** **CD** ≅ ______

(c) **DE** ≅ ______ **(d)** **MN** ≅ ______

(2)



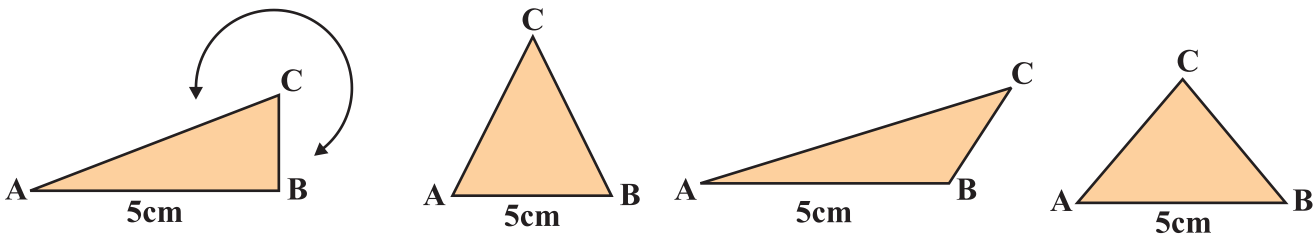
(b) **∠XYZ** ≅ ______ **(c)** **∠STU** ≅ ______ **(d)** **∠WXY** ≅ ______

अध्यापिका :-

आओ त्रिभुजों की सर्वांगसमता समझने से पहले त्रिभुजों पर एक क्रियाकलाप करें।

- यदि हमें किसी त्रिभुज की **एक भुजा की माप** (भुजा = 5 से.मी.) दी गई हो तो हम कितने त्रिभुज बना सकते हैं ?

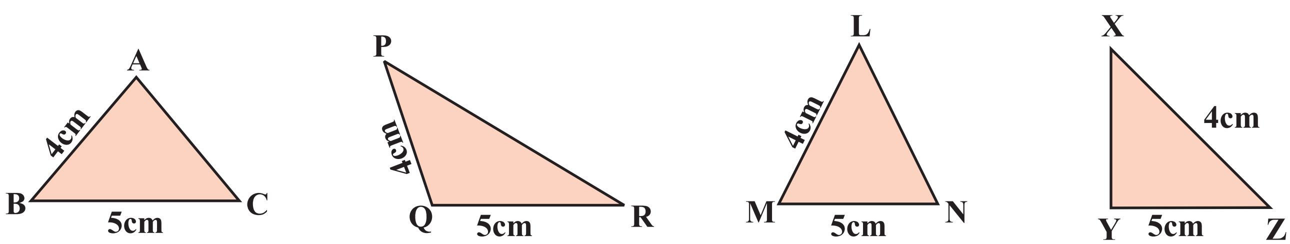
  कुछ स्ट्रॉ लेते है तथा उनसे त्रिभुज बनाने की कोशिश करते है।



हम देखते हैं कि किसी त्रिभुज की केवल एक भुजा की माप दी हो तो **हम ऐसे अनेक त्रिभुज बना सकते हैं।**

- अब यदि हमें त्रिभुज की दूसरी भुजा की माप भी दे दी जाए ......

  त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई 5 से.मी. तथा दूसरी लंबाई 4 से.मी. दी गई है।

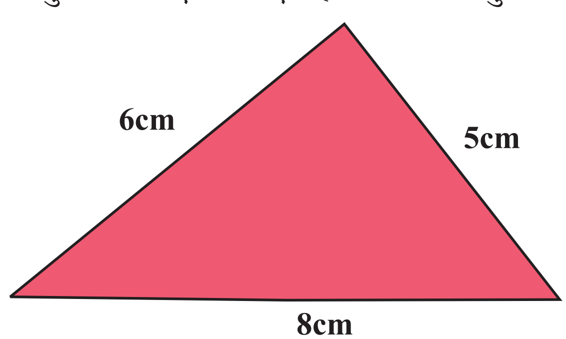


अब भी हम अनेक त्रिभुज बना सकते हैं।

- **यदि हमें त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप दी गई हों तो हम केवल एक ही त्रिभुज बना सकते हैं।**

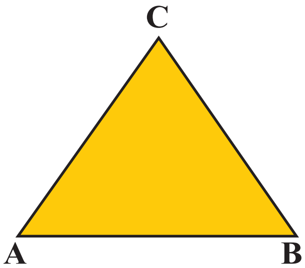
  तीली (Straw) की सहायता से ऐसा त्रिभुज बनाएँ जिसमें एक भुजा की माप 5 से.मी. दूसरी तीली की माप 6 से.मी. तथा तीसरी तीली की माप 8 से.मी. हो।

  आप देखेंगे कि आप कैसे भी त्रिभुज को बनाएँ केवल एक ही प्रकार का त्रिभुज बनेगा।



पीछे हमने देखा कि यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप दे दी जाएँ तो केवल एक अद्वितीय त्रिभुज बनेगा।

इस प्रकार हमने एक नियम सीखा जिसे हम भुजा-भुजा-भुजा (SSS) नियम/कसौटी भी कहते हैं।



आओ (SSS) कसौटी से हम त्रिभुजों की सर्वांगसमता को जानें।

हमने देखा भुजा-भुजा-भुजा कसौटी से एक अद्वितीय त्रिभुज बनता है।

इसीलिये जब भी एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ किसी दूसरे त्रिभुज की तीन भुजाओं के बराबर हो जाएं तो वे दोनों त्रिभुज एक ही माप के होंगे। अर्थात् दोनों सर्वांगसम होंगे।

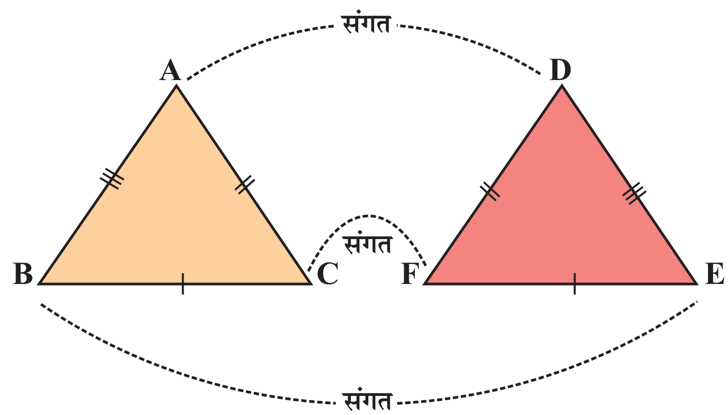
जब एक त्रिभुज को इसका सर्वांगसम त्रिभुज पूरी तरह से ढक लेता है तो जो शीर्ष जिस बिंदु को ढकता है, उसे दोनों शीर्षों का एक दूसरे का संगत बिंदु कहते हैं। इसी प्रकार जो भुजा जिस भुजा को ढकेगी वो भुजा उसी भुजा की संगत भुजा होगी।

इसी प्रकार कोण भी संगत होते हैं।

अब यदि नीचे दो त्रिभुज **ΔABC** तथा **ΔDEF** अगर सर्वांगसम हैं।

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

A का संगत बिन्दु **D**   **A ~ D**
B का संगत बिन्दु **E**   **B ~ E**
C का संगत बिन्दु **F**   **C ~ F**
चिन्ह ~ दो त्रिभुजों के संगत भागों को दिखाता है



अत: हम देख सकते हैं कि यदि हम दोनों त्रिभुजों की तीनों भुजाएँ बराबर करते हैं तो उन भुजाओं द्वारा बनने वाले संगत कोण अपने आप बराबर हो जाते हैं।

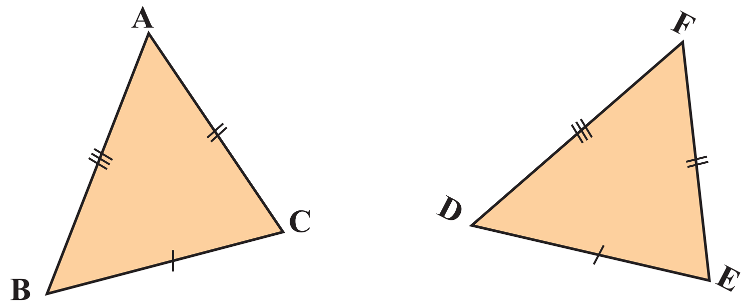
अब यदि एक त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाई की माप निर्धारित कर दें तथा उन दोनों भुजाओं के बीच के कोण की माप भी निर्धारित कर दें तो देखेंगे कि इस प्रकार केवल एक ही त्रिभुज बन सकता है। इस प्रकार की कसौटी को **भुजा-कोण-भुजा** कसौटी कहा जा सकता है।

नीचे दिए गए दो सर्वांगसम त्रिभुजों में संगत बिंदुओं के नाम लिखो।

A का संगत बिंदु ________

B का संगत बिंदु ________

C का संगत बिंदु ________

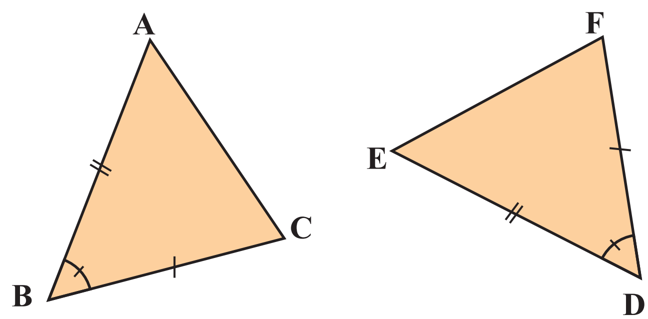


भुजा-कोण-भुजा (SAS) कसौटी

नीचे दो त्रिभुज दिए गए हैं जिनमें एक त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के बराबर हैं। और यह भी दिया गया है कि उन भुजाओं के बीच बनने वाला कोण भी बराबर है।

दिया है :-

$$AB = ED$$
$$\angle ABC = \angle EDF$$
$$BC = DF$$



अब यदि हम भुजा AC तथा EF को मापें तो हम पाएँगे कि दोनों के माप बराबर हैं अर्थात $AC = EF$

इसलिए हम कह सकते हैं कि त्रिभुज ABC की तीनों भुजाएँ त्रिभुज EDF की तीनों संगत भुजाओं के बराबर हैं।

इसलिए $\Delta ABC \cong \Delta EDF$

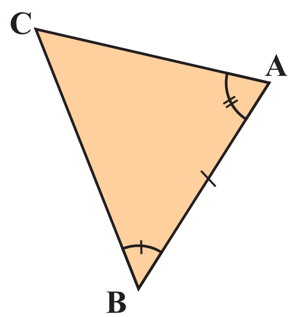
ऊपर ध्यान देने वाली बात है कि त्रिभुजों को सर्वांगसम दिखाते हुए, हमने **संगत बिंदुओं** का ध्यान रखा है।

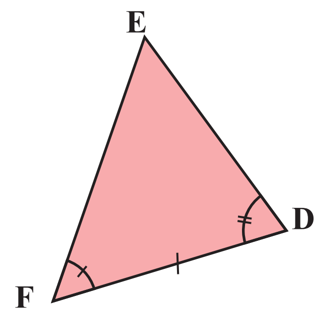
A का संगत बिन्दु **E**	**A ~ E**
B का संगत बिन्दु **D**	**B ~ D**
C का संगत बिन्दु **F**	**C ~ F**

इसी प्रकार की अगली दो कसौटियों को आकृतियों के माध्यम से समझने का प्रयास करते हैं।

कोण-भुजा-कोण (ASA) कसौटी

कोण-भुजा-कोण **(ASA)** (कोई भी दो कोण तथा उनके बीच की भुजा)

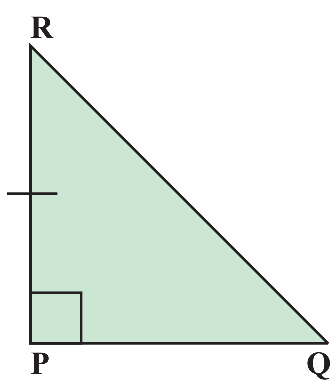


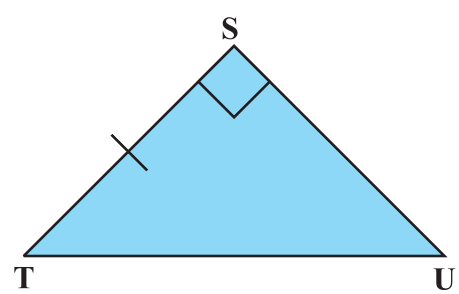


$\Delta ABC \cong \Delta DFE$

समकोण-भुजा-कोण (RHS) कसौटी

(एक समकोण, एक कर्ण तथा कोई एक अन्य भुजा)



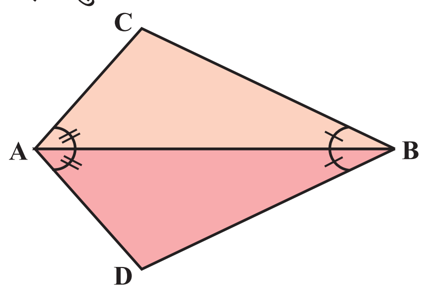


$\Delta PQR \cong \Delta SUT$

अपने अध्यापक से चर्चा कीजिए कि भुजा-भुजा-कोण या कोण-कोण-कोण सर्वांगसमता कसौटी क्यों नहीं होती?

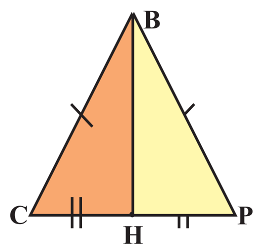
नीचे दिए गए प्रत्येक त्रिभुज के युग्म में (SSS/SAS/ASA/RHS) सर्वांगसमता है। त्रिभुजों के नाम तथा सर्वांगसमता का आधार लिखो। (त्रिभुजों के नाम लिखते समय संगत बिंदुओं का ध्यान रखें।)

1.



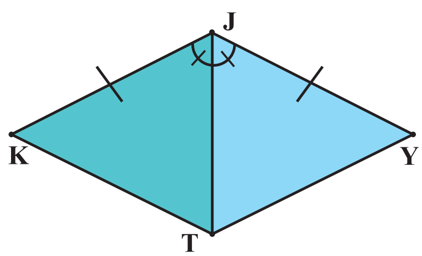
1. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

2.



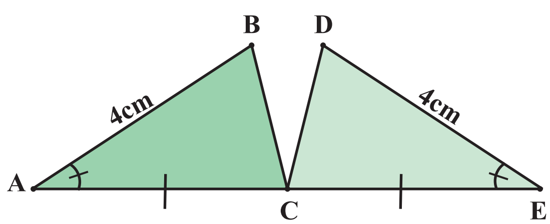
2. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

3.



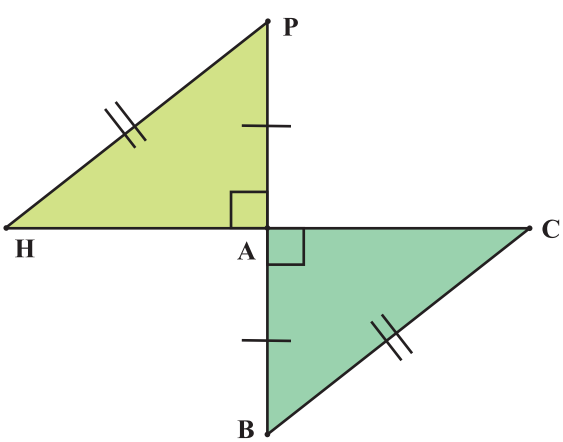
3. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

4.



4. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

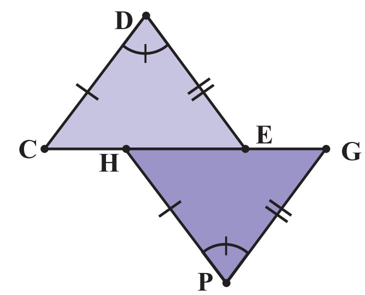
5.



5. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

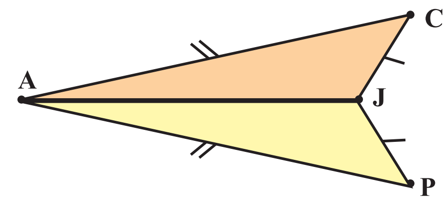
6. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

6.



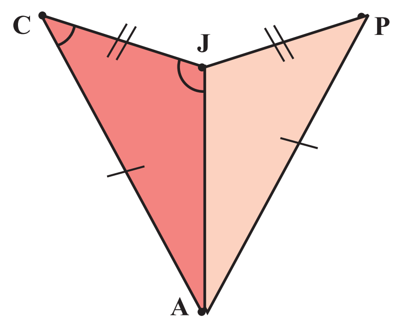
7. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

7.



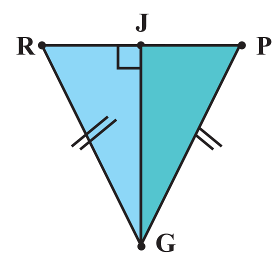
8. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

8



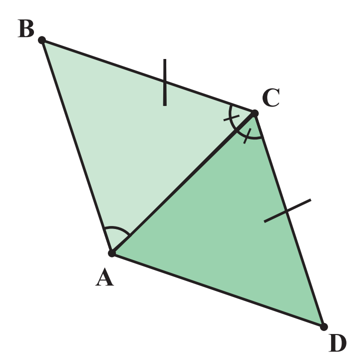
9. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

9



10. Δ........... ≅ Δ...........
सर्वांगसमता का आधार
....

10



Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

अध्यापिका : आज हमने सीखा **:**

1. सर्वांगसम वस्तुएँ बिल्कुल एक दूसरे के बराबर होती हैं (माप तथा आकार में)
2. दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी लंबाईयाँ बराबर होती हैं।
3. दो कोण सर्वांगसम होते हैं। यदि दोनों के माप बराबर होते हैं।
4. त्रिभुजों की सर्वांगसमता के आधार/कसौटी

(a) SSS - भुजा–भुजा–भुजा

(b) SAS - भुजा–कोण–भुजा

↓

(दोनों भुजाओं के बीच का)

(c) ASA - कोण–भुजा–कोण

↓

(दोनों कोणों के बीच की)

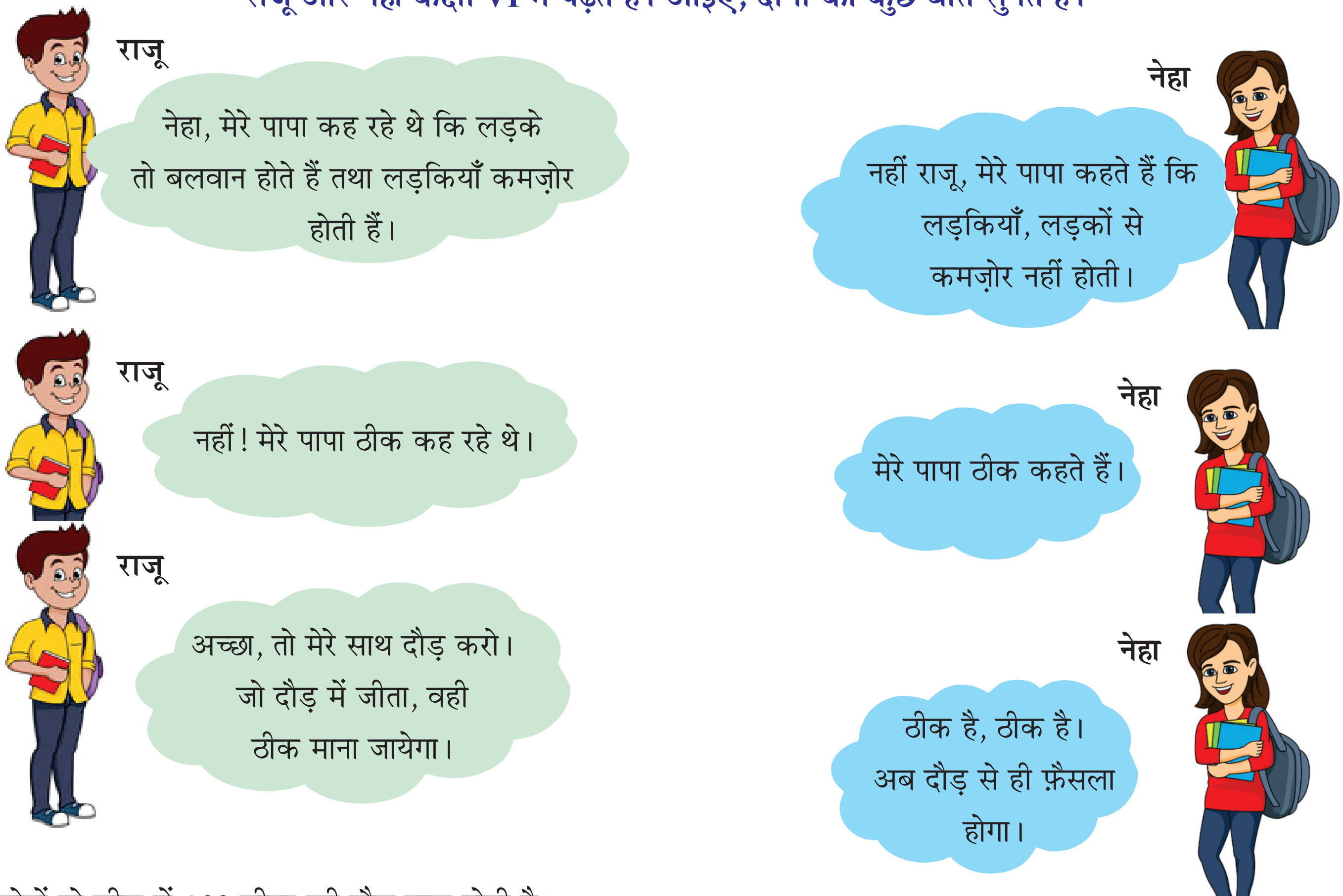
AAS - कोण–भुजा–कोण

भी **ASA** का रूप है।

(d) RHS - समकोण **(90°)** – कर्ण – (कोई एक भुजा)

अध्याय 7 – तुल्य अनुपात

राजू और नेहा कक्षा VI में पढ़ते हैं। आइए, दोनों की कुछ बातें सुनते हैं।



दोनों के बीच में 800 मीटर की दौड़ शुरू होती है।

नेहा पहले दौड़ को पूरा करती है तथा राजू 650 मीटर की दूरी तक ही भाग पाया। राजू दौड़ में हार जाता है। राजू को अब समझ आ गया कि लड़कियाँ, लड़कों से किसी भी क्षेत्र में कमज़ोर नहीं होतीं।

'लड़कियाँ, लड़कों से किसी भी क्षेत्र में कमजोर नहीं होती'। क्या आप भी इस बात से सहमत हो?

अपनी कक्षा में अपने साथियों तथा अध्यापक के साथ मिलकर इस पर चर्चा कीजिए।

आइए अब हम राजू और नेहा की दौड़ी गई दूरी की तुलना करते हैं।

प्र.1 दौड़ में कौन विजयी हुआ?.....................

प्र.2 नेहा ने दौड़ में कितनी दूरी तय की?.....................

प्र.3 राजू ने दौड़ में कितनी दूरी तय की?.....................

प्र.4 नेहा ने राजू की तुलना में कितनी दूरी अधिक तय की?.....................

प्र.5 राजू ने नेहा की तुलना में कितनी दूरी कम तय की?.....................

उदाहरण :- अवनीश और रेशमा दो दोस्त हैं। दोनों के पास कुछ रुपये हैं।

अवनीश

मेरे पास ₹ 10 हैं।

मेरे पास ₹ 20 हैं।

रेशमा

आइए, अब हम अवनीश और रेशमा के पास रुपयों की तुलना करते हैं।

(1) किसके पास कम रुपये हैं ?

(2) किसके पास अधिक रुपये हैं ?

(3) अवनीश के पास रेशमा की तुलना में कितने रुपये कम हैं ?

(4) रेशमा के पास अवनीश की तुलना में कितने रुपये अधिक हैं ?

यहाँ हमने राशियों की तुलना, राशियों के अंतर (Difference) के आधार पर की है।

क्या इन राशियों की तुलना का कोई अन्य तरीका हो सकता है?

- 10 रुपये को दुगना कर दिया जाए तो कितने रुपये बनेंगे ?
  आपका उत्तर..............................

- ₹ 20 का आधा किया जाए तो कितने रूपये बनेंगे ?
  आपका उत्तर..............................

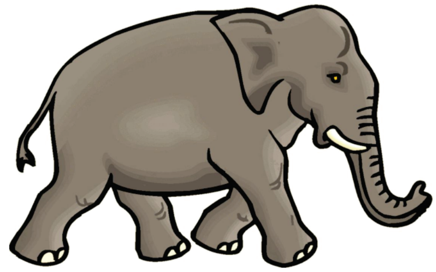
- यदि एक टंकी में 1000 लीटर पानी आता है तो आधी टंकी में कितना पानी आएगा ?
  आपका उत्तर..............................

- कक्षा में बच्चों की संख्या 30 है। यदि बच्चों की संख्या तिगुनी हो जाए तो कक्षा में कितने बच्चे होंगे ?
  आपका उत्तर..............................

ऊपर दिए गए प्रश्नों के जवाब में हमने कुछ शब्द जैसे दुगना, आधा तथा तिगुना प्रयोग किए हैं। ये शब्द भी तुलना में प्रयोग किए जा सकते हैं।

आइए, अब हम एक हाथी और बिल्ली के वज़न की तुलना करते हैं।

10 किलोग्राम



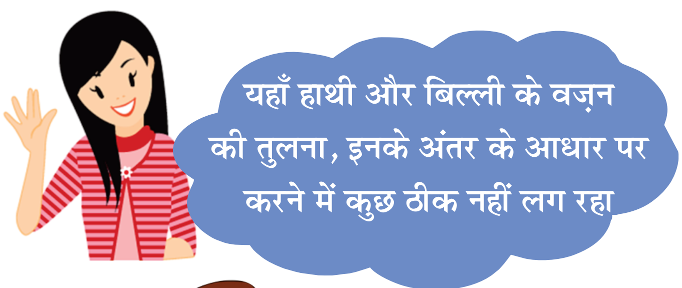
1000 किलोग्राम

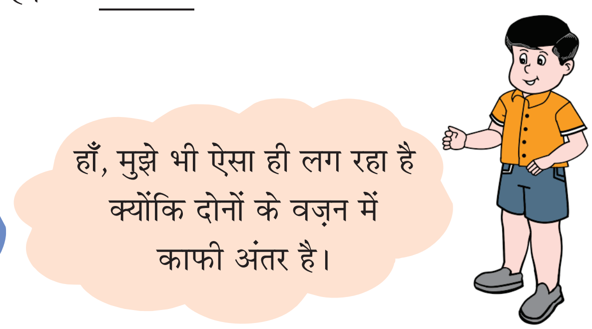
(1) बिल्ली का वज़न कितना है? ______

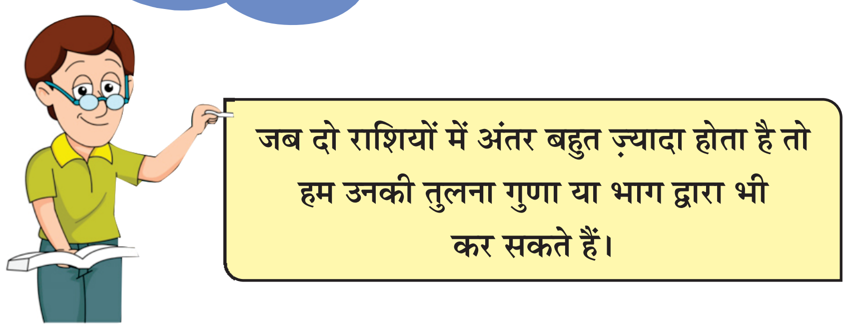
(2) हाथी का वज़न कितना है? ______

(3) बिल्ली का वज़न हाथी की तुलना में कितना कम है? ______

(4) हाथी का वज़न बिल्ली की तुलना में कितना अधिक है। ______







बिल्ली और हाथी के वज़न की तुलना एक नए तरीके से करते हैं।

हाथी का वज़न बिल्ली की तुलना में 100 गुणा ज़्यादा है। $\dfrac{\text{हाथी का वज़न}}{\text{बिल्ली का वज़न}} = \dfrac{1000 \text{ किलोग्राम}}{10 \text{ किलोग्राम}} \quad \dfrac{\overset{100}{\cancel{1000}}}{\underset{1}{\cancel{10}}} = 100$

बिल्ली का वज़न हाथी की तुलना में $\dfrac{1}{100}$ भाग है। $\dfrac{\text{बिल्ली का वज़न}}{\text{हाथी का वज़न}} = \dfrac{10 \text{ किलोग्राम}}{1000 \text{ किलोग्राम}} \quad \dfrac{\overset{1}{\cancel{10}}}{\underset{100}{\cancel{1000}}} = \dfrac{1}{100}$

आइए, आगे इसे एक और उदाहरण से समझने का प्रयास करते हैं।

अब हम रवि और कविता की टॉफ़ियों की संख्या की तुलना करते हैं।

रवि के पास कुल टॉफ़ियाँ = 30

कविता के पास कुल टॉफ़ियाँ = 90

प्र० रवि के पास, कविता की तुलना में, टॉफ़ियाँ का कितना भाग है? __________

प्र० कविता के पास, रवि की तुलना में टॉफ़ियाँ का कितना भाग है? __________

दिए गए प्रश्न का उत्तर हम इस प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं।

रवि के पास कुल टॉफ़ियाँ = 30

कविता के पास कुल टॉफ़ियाँ = 90

रवि के पास, कविता की तुलना में भाग (अनुपात) $= \frac{30}{90} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ का अनुपात रूप = 1: 3 (एक अनुपात तीन)

1: 3 का अर्थ = (3 की तुलना में 1)

कविता के पास कुल टॉफियाँ = 90

रवि के पास कुल टॉफियाँ = 30

कविता के पास, रवि की तुलना में भाग (अनुपात) $\frac{90}{30} = \frac{3}{1}$

$\frac{3}{1}$ का अनुपात रूप = 3: 1

(तीन अनुपात एक)

इसे हम कुछ इस तरह से भी कह सकते हैं कि रवि की टॉफ़ियों की संख्या का कविता की टॉफियों की संख्या से अनुपात 1: 3 है एवम् कविता की टॉफियों की संख्या का रवि की टॉफियों की संख्या से अनुपात 3:1

जब हम दो राशियों की तुलना करते हैं तो वह अनुपात (Ratio) कहलाता है।

आइए, एक और उदाहरण से समझते हैं।

अब एक पेन का मूल्य = 10 रुपये

1 कॉपी का मूल्य = 20 रुपये

तो हम कह सकते हैं कि

पेन के मूल्य का कापी के मूल्य के साथ अनुपात = $\dfrac{\text{पेन का मूल्य}}{\text{कॉपी का मूल्य}} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} = 1:2$

कॉपी के मूल्य का पेन के मूल्य के साथ अनुपात = $\dfrac{\text{कॉपी का मूल्य}}{\text{पेन का मूल्य}} = \dfrac{20}{10} = \dfrac{2}{1} = 2:1$

यहाँ ध्यान देने वाली बात है कि परिस्थिति के अनुसार अनुपात बदल जाता है।

आओ नीचे दी गई तालिका को पूरा करते हैं।

माना एक कक्षा में विद्यार्थियों की कुल संख्या 100 है जिसमें से 60 विद्यार्थी लड़के हैं।

राशियों की तुलना	अनुपात	भिन्न के रूप में	सरलतम भिन्न के रूप में	सरलतम अनुपात
1. लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से →	40 : 60	$\frac{40}{60}$	$\frac{2}{3}$	2 : 3
2. लड़कों की संख्या का लड़कियों की संख्या से →				
3. कुल छात्रों की संख्या का लड़कों की संख्या से →				
4. कुल छात्रों की संख्या का लड़कियों की संख्या से →				

आइए अब हम अपनी कक्षा में से कुछ उदाहरण लेकर, अनुपात ज्ञात करने का प्रयास करते हैं।

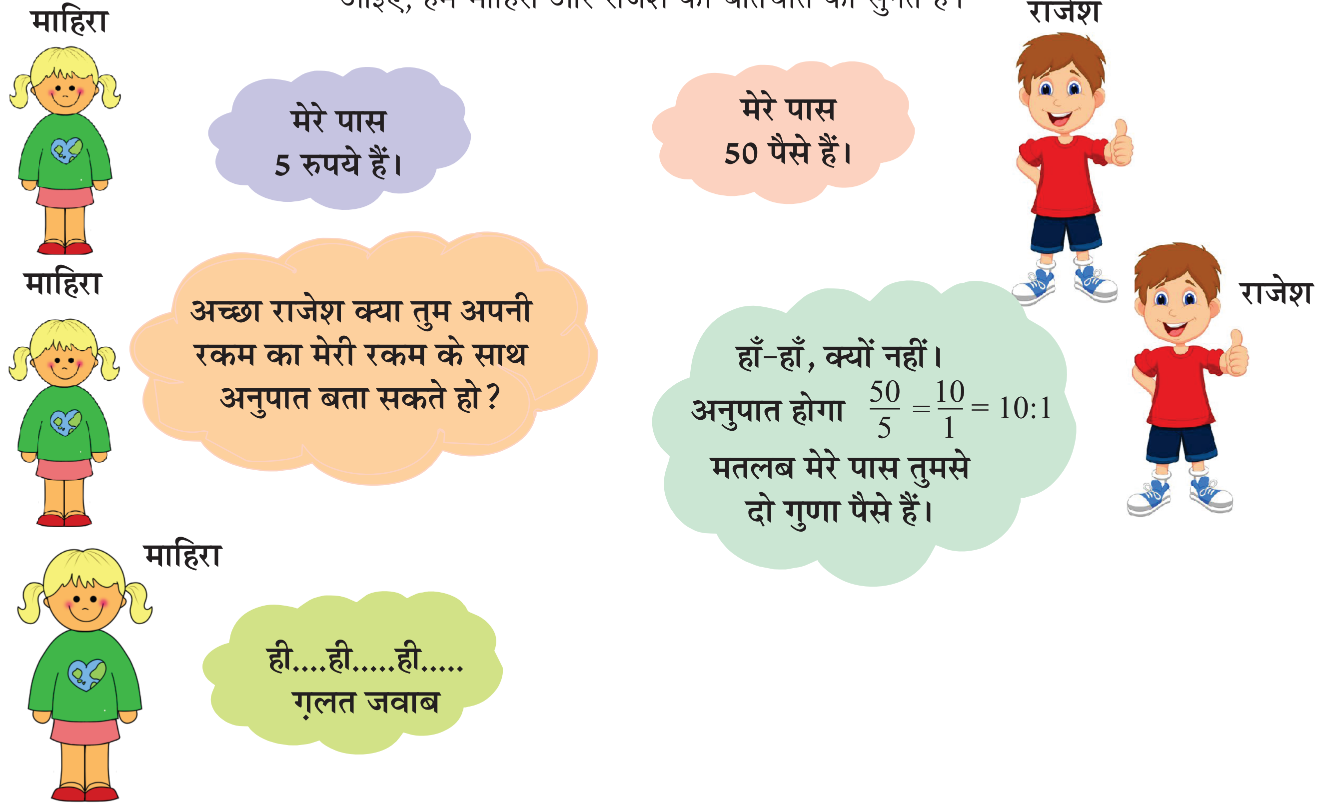
(1) आपके बैग में रखी कॉपियों की संख्या का, पुस्तकों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए। ________

(2) अपनी कक्षा के दरवाज़ों की संख्या का, खिड़कियों की संख्या से अनुपात निकालिए। ________

(3) आपकी कक्षा में लगे पंखों की संख्या का, ट्यूबलाइट्स की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए। ________

आओ ग़लती ढूँढ़ें।

आइए, हम माहिरा और राजेश की बातचीत को सुनते हैं।



आप बता सकते हैं कि राजेश ने अनुपात निकालते हुए क्या ग़लती की?

(राजेश ने पैसे और रुपये का अनुपात निकाल दिया)

हम देखते हैं कि अनुपात तभी ठीक-ठीक निकाला जा सकता है जब दोनों राशियाँ एक ही इकाई में हों।

अगर दोनों राशियाँ एक ही इकाई में न हों तो हमें उसे एक ही इकाई में बदलना होता है।

उदाहरण

(1) 15 मिनट का 2 घंटे से अनुपात

$$= \frac{15 \text{ मिनट}}{2 \text{ घंटे}} = \frac{15 \text{ मिनट}}{2 \times 60 \text{ मिनट}} = \frac{\overset{1}{\cancel{15}}}{2 \times \cancel{60}_{4}} = \frac{1}{8} = 1:8$$

अब प्रयास कीजिए

(2) 5 किलोग्राम का 250 ग्राम से अनुपात

$$= \frac{5 \text{ किलोग्राम}}{250 \text{ ग्राम}} = \frac{\text{............... ग्राम}}{\text{............... ग्राम}} =$$

(3) 1 किलोमीटर की लंबाई का 10 मीटर की लंबाई के साथ अनुपात

नोट: इस प्रकार के प्रश्नों की चर्चा अभ्यास के तौर पर की जा सकती है। (अन्य उदाहरणों के साथ)

आइए, अब कुछ और बातों के बारे में पता करें।

राहुल 10 रुपये का 20 रुपये से अनुपात बताओ ?

अध्यापक

राहुल

10 रुपये का 20 रुपये से अनुपात

$= \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 1:2$

शालिनी आप 30 रुपये का 60 रुपये से अनुपात बताओ ?

अध्यापक

शालिनी

$\frac{30}{60} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 1:2$

बिल्कुल ठीक। हमने देखा जो अनुपात 10 रु. का 20 रु. से आया, वही अनुपात 30 रु. का 60 रु. से आया। इस प्रकार के अनुपातों को हम समतुल्य अनुपात कहते हैं।

अध्यापक

मैरी के पास 3 पेन हैं तथा मोहन के पास 2 पेन हैं। मैरी के पेन तथा मोहन के पेन का अनुपात = $\frac{3}{2}$ = 3:2

मैरी के चाचाजी ने उसे 3 पैन और दिए तथा मोहन को पुरस्कार के रूप में 2 पेन विद्यालय से और प्राप्त हुए।

अब मैरी के पास कुल पेन की संख्या = 3 + 3 = 6

अब मोहन के पास कुल पेन की संख्या = 2 + 2 = 4

अब मैरी के पैन तथा मोहन के पेन का अनुपात = $\frac{6}{4}$ = 6:4

क्या 3:2 या $\frac{3}{2}$, 6:4 या $\frac{6}{4}$ के बराबर है?

आओ जाँचें

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

अतः 3 : 2 = 6 : 4

या 3 : 2 :: 6 : 4

'::' यह चिन्ह समानुपात को दिखाता है। समानुपात में ली गई चारों राशियाँ पद कहलाती हैं। पहले और चौथे पद को **चरम पद** तथा दूसरे और तीसरे पद को **मध्य पद** कहते हैं।

मध्य पद

3 : 2 :: 6 : 4

चरम पद

हम कह सकते हैं कि 10, 50, 2, 10 समानुपात में हैं क्योंकि

$$\frac{10}{50} = \frac{\overset{1}{\cancel{10}}}{\underset{5}{\cancel{50}}} = \frac{1}{5} = 1:5$$

$$\frac{2}{10} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{5}{\cancel{5}}} = \frac{1}{5} = 1:5$$

10:50 = 2:10 समानुपात में है।

इसे हम कुछ इस तरह लिखेंगे।

10: 50 :: 2:10

अब यदि हमसे कहा जाए कि पता करके बताओ 12, 15, 20, 25 समानुपात में हैं या नहीं, तो हम $\frac{12}{15}$ तथा $\frac{20}{25}$ को देखेंगे।

$$\frac{12}{15} = \frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} = \frac{4}{5} = 4:5$$

$$\frac{20}{25} = \frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} = \frac{4}{5} = 4:5$$

12:15 = 20:25 समानुपात में हैं।

12:15 :: 20:25

12, 15, 20, 25 में

12 तथा 25 (चरम पद हैं)

15 तथा 20 (मध्य पद हैं)

समानुपात होने की दशा में **चरम पदों** का गुणनफल **मध्य पदों** के गुणनफल के बराबर होता है।

$$12 \times 25 = 15 \times 20$$
$$300 = 300$$

अब आप प्रयास कीजिए

1. 4:6 और 12:18 समानुपात में हैं या नहीं, जाँचिए।

2. 50 ग्राम : 10 ग्राम और 60 ग्राम : 120 ग्राम समानुपात में हैं या नहीं, जाँचिए।

3. 8cm : 6cm और 4cm : 5cm समानुपात में हैं या नहीं, जाँचिए।

4. 15 सैकंड : 30 सैकंड और 10 सैकंड : 20 सैकंड समानुपात में हैं या नहीं, जाँचिए।

5) 100 रु. : 2 रु. तथा 20 रु. : 4 रु. समानुपात में हैं या नहीं, जाँचिए।

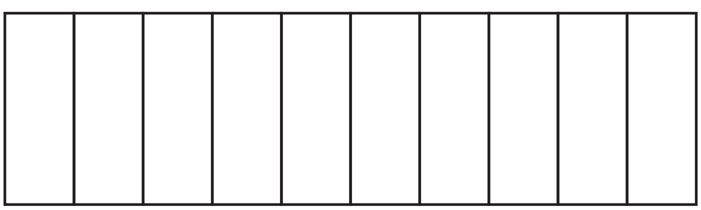
6) 30 मी. : 40 मी. तथा 40 मी. : 50 मी. समानुपात में हैं या नहीं, जाँचिए।

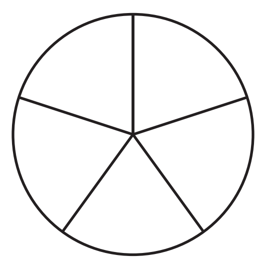
7) 7 घण्टे : 35 मिनट :: 14 घण्टे : 70 मिनट

8) 7 मिनट : 9 मिनट :: 14 घण्टे : 18 घण्टे

आओ, कुछ अभ्यास करें

नीचे दी गई आकृतियों में लाल और नीला रंग इस तरह से भरो कि लाल रंग के क्षेत्र का नीले रंग के क्षेत्र से अनुपात 2:3 हो।





आइए, राशियों के अनुपात का फिर से अभ्यास करते हैं।

1) 50 रु. का 50 पैसे से

2) 20 से.मी. का 2 मीटर से

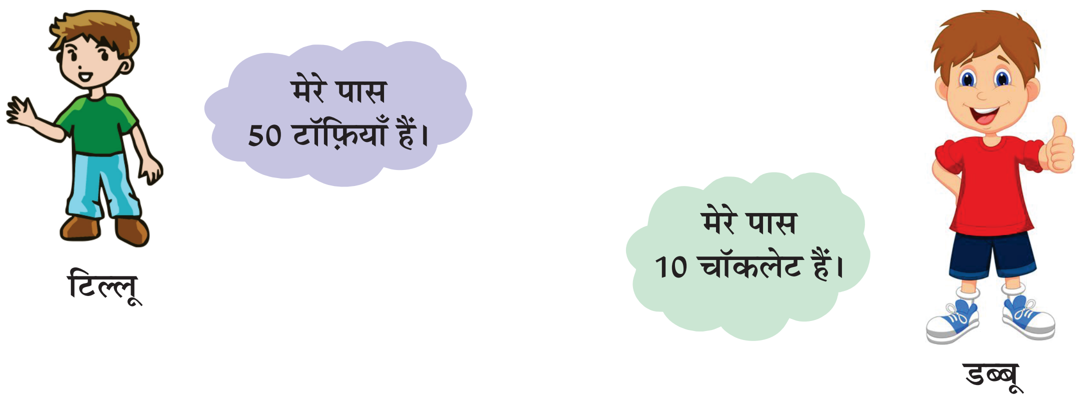
3) 40 ग्राम का 5 किलोग्राम से

4) 5 सेकण्ड का 2 मिनट से

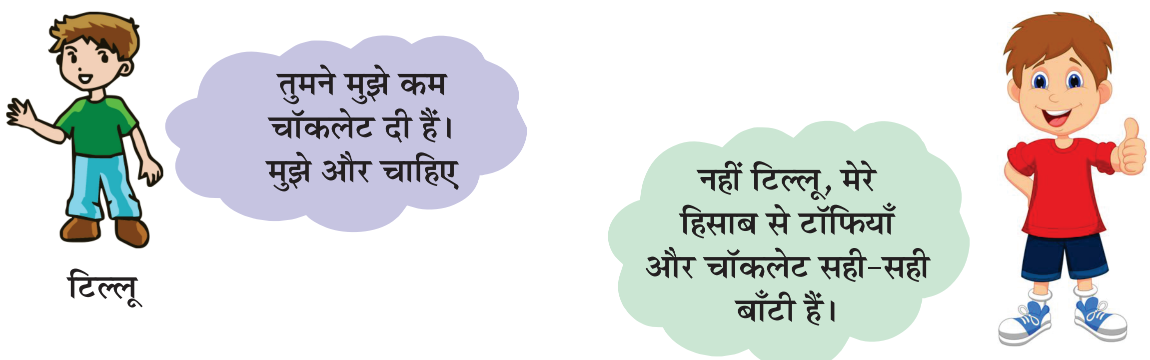
5) 6 मिनट का 1 घंटे से

6) 1 दिन का एक सप्ताह से

आओ, दोस्तों के झगड़े को खत्म करने का प्रयास करें।



अब टिल्लू 10 टाफ़ियाँ डब्बू को दे देता है। बदले में डब्बू टिल्लू को 2 चॉकलेट दे देता है। उनकी बातचीत सुनते हैं।



क्या हम बता सकते हैं कि टिल्लू सही कह रहा था या डब्बू?

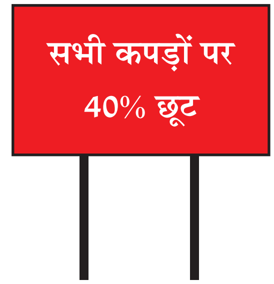
आओ, अब उनके झगड़े को सुलझाते हैं।

टिल्लू की दी गई टाफ़ियों की संख्या का कुल टॉफ़ियों से अनुपात = $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

अब डब्बू की दी गई चॉकलेट की संख्या का कुल चॉकलेट की संख्या से अनुपात = $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

हम देखते हैं कि अनुपात समान है। इसलिए दोनों का वितरण सही है। और डब्बू ठीक कह रहा है।

आओ, अब हम प्रतिशत की दुनिया में चलते हैं।



हम लोग अक्सर दुकानों पर शॉपिंग मॉल में लिखा देखते हैं।

40% छूट

–हम खाने की चीज़ों पर कभी–कभी 100% शुद्ध लिखा देखते हैं।

–हमने अपने नए कपड़ों पर 80% सूती लिखा देखा होगा।

–किसी छात्र ने बारहवीं कक्षा में 98% अंक प्राप्त करके भारत में पहला स्थान प्राप्त किया।

अब हम ऊपर दिए गए उदाहरणों में बता सकते हैं कि '%' का चिन्ह क्या दिखाता है?

'%' इस चिन्ह को प्रतिशत कहते हैं।

प्रतिशत भी तुलना का एक तरीका हो सकता है।

प्रतिशत $\xrightarrow{\text{शाब्दिक अर्थ}}$ प्रति + शत्

प्रति → प्रत्येक, शत् → सौ

सौ का एक भाग

इसे हम भिन्न रूप में $\frac{1}{100}$ लिखते हैं। प्रतिशत, भिन्न का ही एक भाग (Part) होता है। प्रतिशत ऐसा भिन्न है जिसका हर 100 होता है जैसे $\frac{4}{100}, \frac{30}{100}, \frac{15}{100}$ आदि।

$\frac{1}{100}$, 100 बराबर भागों में से 1 भाग = 1%

$$\boxed{\frac{1}{100} = 1\%}$$

$\frac{20}{100}$, 100 बराबर भागों में से 20 भाग = 20%

$$\boxed{\frac{20}{100} = 20\%}$$

प्रतिशत, भिन्न का ही एक रूप होता है।

प्रतिशत ऐसा भिन्न है, जिसका हर _______होता है तथा अंश = _____________ है।

→ **दिए गए भिन्नों को प्रतिशत (%)में बदलिए।**

उदाहरण			अब आप प्रयास कीजिए		
(a)	$\frac{4}{100}$	= 4%	(d)	$\frac{10}{100}$	= ___
(b)	$\frac{25}{100}$	= 25%	(e)	$\frac{50}{100}$	= ___
(c)	$\frac{27}{100}$	= 27%	(f)	$\frac{80}{100}$	= ___

दिए गए प्रतिशत को , भिन्न के सरलतम रूप में बदलिए।

प्रतिशत	भिन्न तथा उसका सरलतम रूप	प्रतिशत	भिन्न तथा उसका सरलतम रूप
(1) 15%	$\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$	(4) 75%	
(2) 10%		(5) 40%	
(3) 25%		(6) 4%	

हमें भिन्नों को प्रतिशत में बदलने के लिए हर की संख्या को 100 में बदलना होता है।

आइए अभ्यास करें।

भिन्न	हर को संख्या 100 में बदलना	प्रतिशत
(a) $\frac{3}{10}$	$\frac{3 \times 10}{10 \times 10} = \frac{30}{100}$	30%
(b) $\frac{1}{5}$		
(c) $\frac{9}{20}$		
(d) $\frac{4}{25}$		
(e) $\frac{4}{75}$		

आइए, अब हम कुछ प्रश्नों का अभ्यास करते हैं।

प्र० :- एक फ़ुटबॉल टीम ने 25 मैचों में से 10 मैच जीते हैं। टीम की जीत का प्रतिशत ज्ञात कीजिए ?

हल :- कुल मैचों में जीते गए मैचों का भाग =

जीत का प्रतिशत =

प्र० :- सातवीं कक्षा में 90 विद्यार्थी हैं। 40 विद्यार्थी गणित विषय में ज़्यादा रुचि रखते हैं। कितने प्रतिशत विद्यार्थी गणित विषय में कम रुचि रखते हैं ?

हल :- कुल विद्यार्थियों में, गणित विषय में ज़्यादा रुचि रखने वाले विद्यार्थियों का भाग = ______________

कुल विद्यार्थियों में, गणित विषय में कम रुचि रखने वाले विद्यार्थियों का भाग = ______________

गणित विषय में कम रुचि रखने वाले विद्यार्थियों का प्रतिशत = ______________

प्र० :- एक टोकरी में 20 आम हैं। जिसमें से 5 आम खराब हैं । ठीक, आमों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए ?

हल :- कुल आमों में, ठीक आमों का भाग = ______________

ठीक आमों का प्रतिशत = ______________

भिन्न को प्रतिशत में बदलने की एक और विधि

$\Rightarrow$ $\frac{4}{5}$ को प्रतिशत में बदलिए ।

$\frac{4 \times 100}{5 \times 100}$ $\longleftarrow$ अंश और हर दोनों को 100 से गुणा किया।

$\frac{4}{5} \times 100 \times \frac{1}{100}$

$\frac{4}{5} \times 100\ \%$ $\longleftarrow$ $\frac{1}{100} = 1\%$, इसलिए हमने $\frac{1}{100}$ की जगह 1% या % लिखा।

$\boxed{\frac{4}{\cancel{5}} \times \overset{20}{\cancel{100}}\ \% = 80\%}$

किसी भी भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिए हम सीधे इस चरण का प्रयोग कर सकते हैं। जैसे

$\frac{3}{4}$ को प्रतिशत में बदलिए = $\frac{3}{4} \times 100\ \% = \frac{3}{\cancel{4}} \times \overset{25}{\cancel{100}}\ \% = 75\%$

$\frac{7}{20}$ को प्रतिशत में बदलिए = $\frac{7}{20} \times 100\ \% =$ ______________

आइए अब हम भिन्नों को प्रतिशत में बदलने का अभ्यास करते हैं।

विधि 1 (Base 100)	विधि 2 (Direct Method)
(1) $\frac{3}{25}$ $= \frac{3 \times 4}{25 \times 4} = \frac{12}{100}$ $= 12\%$	(1) $\frac{3}{25}$ $\frac{3}{\cancel{25}_{1}} \times \cancel{100}^{4}\%$ 12%
(2) $\frac{4}{5}$	(2) $\frac{4}{5}$
(3) $\frac{3}{4}$	(3) $\frac{3}{4}$
(4) $\frac{7}{20}$	(4) $\frac{7}{20}$
(5) $\frac{2}{3}$	(5) $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3} \times 100\% = \frac{200}{3}\%$ $= 66.66\%$

यहाँ हमें $\frac{2}{3}$ के हर को संख्या 100 में बदलने में कठिनाई हो रही है। अत: विधि 1 से हल नहीं किया जा सकता है। इस स्थिति में विधि 2, $\frac{2}{3}$ भिन्न को प्रतिशत में बदलने के काम आ रही है।

हम अपनी सुविधा के अनुसार इनमें से किसी भी विधि का प्रयोग कर भिन्नों को प्रतिशत में बदल सकते हैं।

दिए गए उदाहरणों को समझकर, तालिका को पूरा कीजिए।

परिस्थिति	भिन्न	प्रतिशत
(1) 20 में से 5 व्यक्ति बीमार हैं।	$\frac{5}{20}$ भाग व्यक्ति बीमार हैं।	$\frac{5}{\cancel{20}} \times \overset{5}{\cancel{100}}\%$ व्यक्ति बीमार हैं। 25% व्यक्ति बीमार हैं।
(2) 30 में से 3 छात्र अनुपस्थित हैं।	$\frac{3}{30}$ भाग छात्र अनुपस्थित हैं।	$\frac{\cancel{3}}{\underset{10}{\cancel{30}}} \times \overset{10}{\cancel{100}}\%$ छात्र अनुपस्थित हैं। 10% छात्र अनुपस्थित हैं।
(3) 30 में से 21 सेब ठीक हैं।		
(4) 50 में से 40 विद्यार्थी उपस्थित हैं।		

आइए, हम कुछ और उदाहरणों पर विचार करते हैं।

→ एक आदमी की टोकरी में 50 आम हैं। कुल आमों में से 10% आम खराब हैं। बताइए टोकरी में कुल कितने आम खराब हैं?

इस प्रश्न को हम दो तरीके से हल कर सकते हैं।

पहला तरीका: 10% आम खराब हैं ⇒ 100 आमों में से 10 आम खराब हैं।

कुल आम	आम खराब है।	
100	10	
$\frac{100}{2}$	$\frac{10}{2}$	⇐ **(दोनों ओर 2 से भाग किया गया)**
50	5	⇐ **(कुल आम 50 हैं तो खराब आमों की संख्या 5 होगी।)**

आओ, ऊपर दिए प्रश्न को अन्य तरीके से हल करें

खराब आम = 50 का 10%

$50 \times \frac{10}{100}$ ← (‘का’ का अर्थ गुणा लिया जाता है तथा ‘%’ को $\frac{1}{100}$ लिखा जाता है।)

$\overset{5}{\cancel{50}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{10}}}{\underset{10}{\cancel{100}}} = 5$

नीचे तालिका में हमने दो तरीकों से राशियों का प्रतिशत निकाला है।
समझिए और करिए।

विधि 1	विधि 2
(1) 200 का 20% $= \overset{2}{\cancel{200}} \times \frac{20}{\underset{1}{\cancel{100}}}$ $= 40$	(1) 200 का 20% 20% का मतलब = 100 में से 20 2×100 में से 2×20 200 में से 40
(2) 500 का 5% $= \overset{5}{\cancel{500}} \times \frac{5}{\underset{1}{\cancel{100}}}$ $= 25$	(2) 500 का 5% 5% का मतलब = 100 में से 5 5×100 में से 5×5 500 में से 25
(3) 800 का 10%	(3) 800 का 10%
(4) 50 का 50%	(4) 50 का 50%
(5) 760 का 15%	(5) 760 का 15%

आप प्रश्न (5) को विधि 2 द्वारा हल करने की कोशिश कीजिए और जाँचिए कि यह प्रश्न विधि 2 द्वारा हल हो पा रहा है या नहीं। अगर हल नहीं हो पा रहा है तो उसका कारण जानने का प्रयास कीजिए।

हम अपनी सुविधा के अनुसार किसी भी विधि का प्रयोग कर राशियों का प्रतिशत ज्ञात कर सकते हैं।

आओ अब प्रतिशत और दशमलव में संबंध देखें।

हम जानते हैं $1\% = \frac{1}{100}$

हम यह भी जानते हैं $\frac{1}{100} = 0.01$

इसलिए $1\% = \frac{1}{100} = 0.01$

$3\% = \frac{3}{100} = 0.03$

$15\% = \frac{15}{100} = 0.15$

$10\% = \frac{10}{100} = 0.10$ या 0.1

अब निम्न तालिका को पूरा करें।

प्रतिशत	कथन	भिन्न	दशमलव
40%	100 में से 40	$\frac{40}{100}$	= 0.40 या 0.4
3%	100 में से 3	$\frac{3}{100}$	= 0.03
14%	....	$\frac{\square}{\square}$	= $\square$
90%	....	$\frac{\square}{\square}$	= $\square$
115%	....	$\frac{\square}{\square}$	= $\square$

दशमलव को प्रतिशत में बदलना

दशमलव संख्याएँ	भिन्न रूप	हर 100 में बदलना	प्रतिशत रूप
(a) 0.25	$\frac{25}{100}$	$\frac{25}{100}$	25%
(b) 2.9	$\frac{29}{10}$	$\frac{29 \times 10}{10 \times 10} = \frac{290}{100}$	290%
(c) 0.04			
(d) 0.30			
(e) 1.20			

ऊपर तालिका में 2.9 को प्रतिशत में बदलने के लिए, हमने किया $2.9 = \frac{29}{10} = \frac{29 \times 10}{10 \times 10} = \frac{290}{100} = 290\%$

हम इसे इस प्रकार भी कर सकते हैं।

$2.9 = \frac{290}{100} = 290\%$

2.9 को हम 2.90 भी लिख सकते हैं।

यहाँ 9 दशांश है तथा 0 शतांश है। इसलिए हम 0 के द्वारा शतांश को भी दिखा सकते हैं। इसी प्रकार आवश्यकता पड़ने पर 0 से हज़ारांश को भी दिखा सकते हैं तथा 0 को और भी आगे बढ़ा सकते हैं।

आइए एक और उदाहरण देखते हैं।

12 को प्रतिशत में बदलिए।

$12 = 12.00$

$= \frac{1200}{100} = 1200\%$

12 में 0 दशांश तथा 0 शतांश है

इसलिए 12 को दशमलव में हम 12.00 लिख सकते हैं।

अब दशमलव संख्याओं को बिना भिन्न रूप में बदले, प्रतिशत में बदलने का आप प्रयास कीजिए।

उदाहरण :

दशमलव संख्या	प्रतिशत रूप
2.15	215%
0.39	39%
0.2	20%
1.9	190%

अब आप प्रयास कीजिए।

दशमलव संख्या	प्रतिशत रूप
1.44	
3.1	
4	
0.9	
8.88	

आइए, अब हम लाभ / हानि का पता करते हैं।

प्रश्नों के उत्तर दीजिए

माना जॉनी ने एक भैंस को 50,000 रु. में खरीदी। कुछ महीनों बाद जॉनी ने उस भैंस को 60,000 रु. में बेच दिया।

प्र०1 जॉनी ने भैंस को किस मूल्य पर खरीदा था? ______________

हम जिस मूल्य पर वस्तु को खरीदते हैं वह उस वस्तु का क्रय मूल्य (Cost Price) कहलाता है।

प्र०2 जॉनी ने भैंस को किस मूल्य पर बेचा ? ______________

हम जिस मूल्य पर वस्तु को बेचते हैं वह उस वस्तु का विक्रय मूल्य (Selling Price) कहलाता है।

प्र०3 जॉनी को भैंस की बिक्री पर लाभ हुआ या हानि हुई ? ______________

जब हम किसी वस्तु को क्रय मूल्य से ज़्यादा मूल्य पर बेचते हैं तो हमें ______ होता है।

जब हम किसी वस्तु को क्रय मूल्य से कम मूल्य पर बेचते हैं तो हमें ______ होती है।

प्र०4 जॉनी को भैंस की बिक्री पर कितनी राशि का लाभ हुआ ? ______________

प्र०5 अगर जॉनी भैंस को 30,000 रु में बेचते तो हमें लाभ होता या हानि होती? ______________

हमें कितने रुपयों की हानि होती ? ______________

⇒ बॉक्स में सही निशान (>, <) का चयन कीजिए

लाभ	⇒	क्रय मूल्य	<	विक्रय मूल्य
हानि	⇒	क्रय मूल्य		विक्रय मूल्य

खाली स्थान भरिए

लाभ = विक्रय मूल्य − क्रय मूल्य

हानि = __________ − __________

क्रय मूल्य (Cost Price) = CP

विक्रय मूल्य (Selling Price) = SP

लाभ (Profit) = P

हानि (Loss) = L

लाभ % या हानि % (Profit % or Loss %)

उदाहरण:- एक दुकानदार ने 15000 रु. की एक साइकिल खरीदी। जिसे उसने 20000 रु. में बेच दिया ।

साइकिल का क्रय मूल्य (CP) = __________

साइकिल का विक्रय मूल्य(SP) = __________

साइकिल के विक्रय में लाभ हुआ या हानि हुई ? = __________

कितने रुपयों का लाभ हुआ ? = __________

दुकानदार को 15000 रु. पर 5000 रु का लाभ हुआ।

लाभ का भाग, क्रय मूल्य की तुलना में = $\frac{5000}{15000}$ $\left(\frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}}\right)$

लाभ (%में) = $\frac{5000}{15000} \times 100\% = \frac{100\%}{3} = 33\frac{1}{3}\%$

लाभ % या हानि % सदैव क्रय मूल्य को आधार मानकर निकाला जाता है।

लाभ % = $\frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

हानि % = $\frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

(1) एक दुकानदार ने एक वाशिंग मशीन 12000 रु. में खरीदी। दुकानदार ने उसे ग्राहक को 14000 रु. में बेच दी। दुकानदार को मशीन पर होने वाला लाभ या हानि % ज्ञात कीजिए।

हल: वाशिंग मशीन का क्रय मूल्य = __________

वाशिंग मशीन का विक्रय मूल्य = __________

लाभ/हानि = __________

लाभ %/ हानि % = __________

(2) शोएब ने 16000 रु. का एक स्मार्ट फ़ोन खरीदा। कुछ महीने बाद उसे 12000 रु का बेच दिया। शोएब को होने वाला लाभ या हानि % ज्ञात कीजिए।

हल स्मार्ट फ़ोन का क्रय मूल्य = __________

स्मार्ट फ़ोन का विक्रय मूल्य = __________

लाभ/हानि = __________

लाभ %/ हानि % = __________

नोट: अध्यापक कुछ अन्य प्रश्नों की चर्चा कर सकते हैं।

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

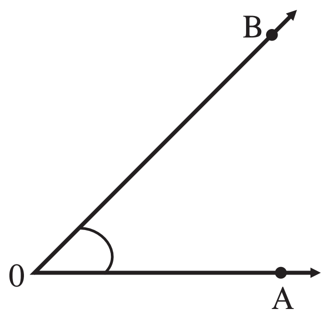
1. राशियों की तुलना एवं अनुपात की समझ विकसित करना।
2. समानुपात, लाभ-हानि एवं साधारण ब्याज की समझ विकसित करना एवं इसका दैनिक जीवन में उपयोग।

अध्याय 8 – प्रायोगिक ज्यामिति

हम अपने परिवेश में भिन्न–भिन्न प्रकार की आकृतियों या रचनाओं को देखते हैं। इनमें से कुछ आकृतियाँ हम सीख चुके हैं। आओ इन्हें दोहराएँ।

आओ मिलान करें!

i) 

ii) 

iii)

iv) 

v) 

a) देखो, देखो, मैं हूँ एक बिंदु
न मेरी लंबाई, न चौड़ाई
न कोई आकृति, न आकार
पर बहुत ज़रूरी,
मैं हूँ हर आकृति का आधार।

b) मैं हूँ एक रेखा,
न दूजा कोई ऐसा देखा,
नहीं माप सकते मेरी लंबाई,
चाहे कितना बढ़ा लो भाई।

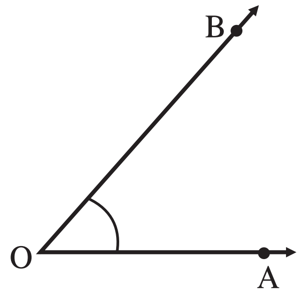
c) मैं हूँ रेखा का एक खंड
कहते मुझको रेखाखंड
मेरी एक निश्चित लंबाई,
माप लो मुझको मेरे भाई
एक बिंदु से मेरा आरंभ
दूसरे बिंदु पर हुआ अंत।

d) मेरा नाम है किरण
समझो जैसे सूरज की किरण
एक बिंदु से शुरू होती
दूसरी तरफ अनंत बहती।

e) दो किरणों से बनता हूँ
कोण मैं कहलाता हूँ
एक ही बिंदु से शुरू होती हैं किरणें जिसमें
फिर, भिन्न–भिन्न दिशाओं में जाती हैं

नीचे दिए गए कोणों की माप पहले अनुमान से बताएँ तथा फिर उसे कोणमापक (चाँदा) से मापकर लिखें।

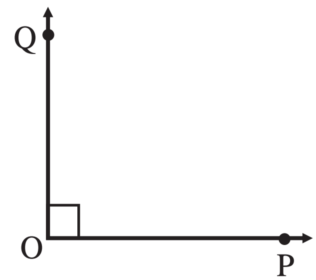
a)



अनुमानित माप__________

कोणमापक से माप_______

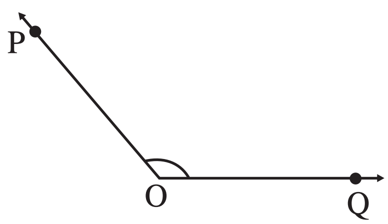
b)



अनुमानित माप__________

कोणमापक से माप_______

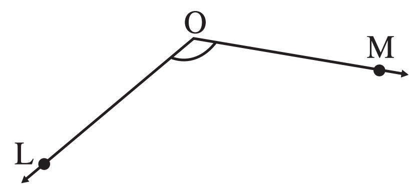
c)



अनुमानित माप__________

कोणमापक से माप_______

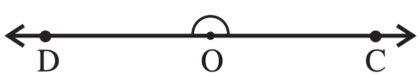
d)



अनुमानित माप__________

कोणमापक से माप_______

e)



अनुमानित माप__________

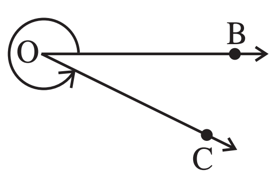
कोणमापक से माप_______

f)

अनुमानित माप__________

कोणमापक से माप_______

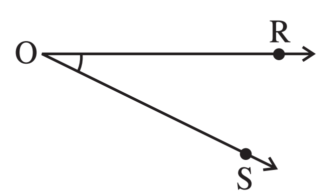
g)



अनुमानित माप__________

कोणमापक से माप_______

h)



अनुमानित माप__________

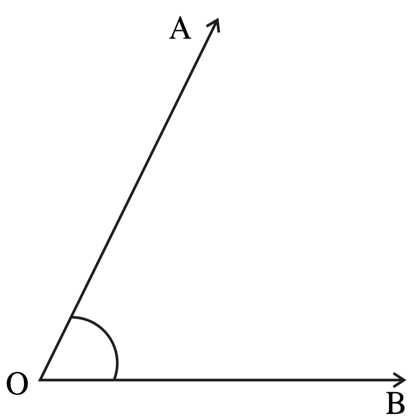
कोणमापक से माप_______

आइए कुछ साधारण रचनाएँ करें। अगर आपको निम्नलिखित रचनाएँ करने में कठिनाई होती है तो कृपया अपने साथियों या अध्यापक की मदद लें।

1. एक 5cm लंबा रेखाखंड बनाएँ

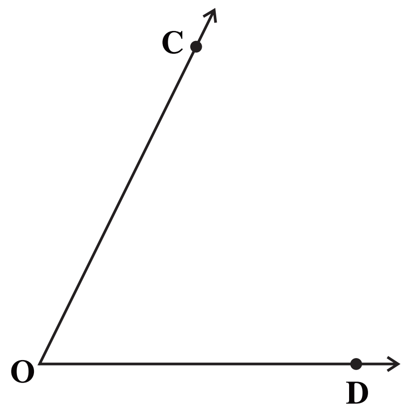
2. अब एक रेखाखंड पर कोई एक बिंदु लीजिए। उस बिंदु से होती हुई एक रेखा बनाइए जो दिए गए रेखाखंड पर लंब हो।

3. नीचे दिए गए कोण के बराबर एक कोण बनाएँ। याद रहे आपको कोणमापक (चाँदा) की मदद नहीं लेनी है।

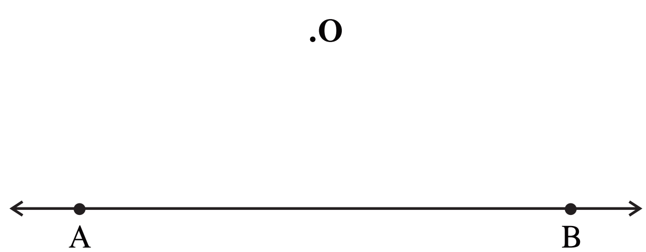


यहाँ चाँदे की मदद के बिना $\angle AOB$ के बराबर कोण बनाएँ

4. नीचे दिए गए $\angle COD$ का समद्विभाजक बनाएँ। यहाँ पर आपको चाँदा की मदद नहीं लेनी है।



5. नीचे एक रेखाखंड AB तथा एक बिंदु O दिया गया है। बिंदु O से रेखा AB पर एक लंब बनाइए। (परकार की सहायता से)



6. एक रेखाखंड बनाएँ जिसकी लंबाई 7.5 cm हो। उस रेखाखंड का लंब समद्विभाजक बनाएँ। (परकार की सहायता से)

आओ जरा सोचें

1. क्या हम एक दिए गए कोण के बराबर कोण बना सकते हैं ? (परकार की सहायता से)

2. क्या हम एक रेखाखंड को बिना मापे दो बराबर भागों में बाँट सकते हैं ?

3. क्या हम एक वृत की रचना कर सकते हैं ?

4. क्या हम एक रेखाखंड पर एक ऐसी रेखा बना सकते हैं जो रेखाखंड को दो बराबर भागों में बाँटे तथा रेखाखंड के साथ 90° का कोण बनाए।

अगर ऊपर दिए गए किसी भी प्रश्न का उत्तर आप नहीं जानते तो कृपया अपने अध्यापक से सीखने में मदद लें।

समांतर रेखाएँ

हमने पिछली कक्षाओं में समांतर रेखाओं के बारे में पढ़ा है। अभी हम समांतर रेखाओं की रचना करना सीखेंगे।

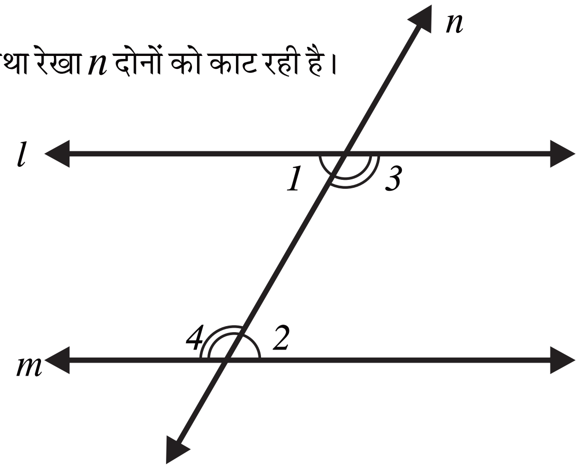
अपने दैनिक जीवन में समांतर रेखाखंडों के उदाहरण दीजिए।

जैसे :-

1. रेल की पटरियाँ
2. ब्लैक बोर्ड की सम्मुख भुजाओं के युग्म
3. ____________________
4. ____________________
5. ____________________
6. ____________________
7. ____________________

अब हम जानते हैं कि दो समांतर रेखाओं को एक अन्य रेखा काटे (प्रतिच्छेद करे) तो इस प्रकार बने अंतः एकांतर कोण बराबर होंगे ।

जैसे:– रेखाएँ l तथा m समांतर हैं तथा रेखा n दोनों को काट रही है।



क्या हम ऊपर दी गई आकृति में अंतः एकांतर कोणों के जोड़ों को अंग्रेजी के अक्षर Z , Z से पहचानकर लिख सकते हैं–

(i) **$\angle 1$ तथा $\angle 2$** (ii) __________

आप इन कोणों को मापकर भी लिखें–

$\angle 1$ = __________ $\angle 2$ = __________

$\angle 3$ = __________ $\angle 4$ = __________

हमने क्या देखा !

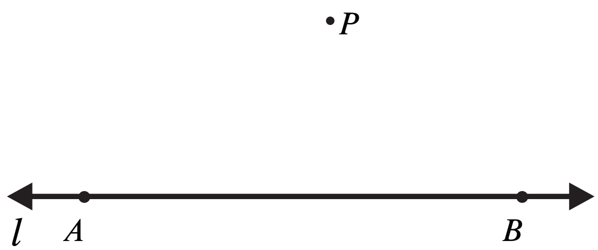
क्या $\angle 1 = \angle 2$ (हाँ/ नहीं) $\angle 3 = \angle 4$ (हाँ/ नहीं)

इस प्रकार हमने देखा कि यदि दो समांतर रेखाओं को एक अन्य रेखा काटती है तो इस प्रकार बने अंतः एकांतर कोण बराबर होंगे।

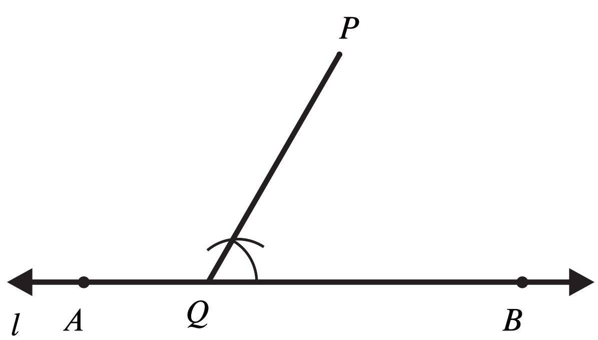
इसी गुण का प्रयोग हम समांतर रेखाएँ खींचने में करेंगे।

आओ समांतर रेखाएँ बनाएँ

हमें एक बिंदु P से एक रेखा बनानी है जो रेखा l के समांतर हो

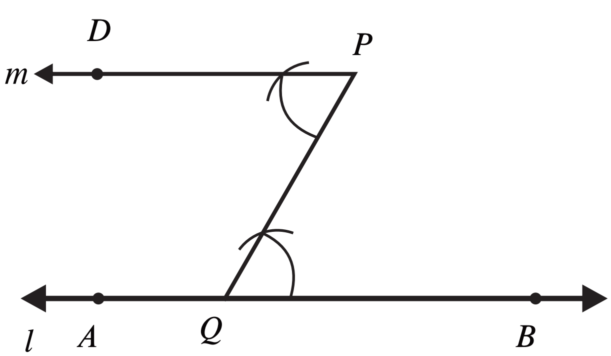


अब हम बिंदु p को रेखा l के किसी भी बिंदु से मिला देते हैं। माना यह बिंदु Q है तो स्थिति कुछ इस प्रकार की होगी।



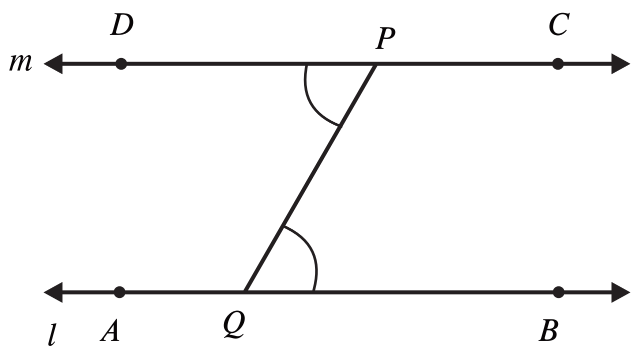
अब हम PQ को आधार मानकर बिंदु P से एक कोण $\angle QPD$ इस प्रकार बनाते हैं कि

$$\angle QPD = \angle PQB$$



यहाँ अगर हमें कठिनाई महसूस हो तो हम अपने अध्यापक की मदद लेंगे।

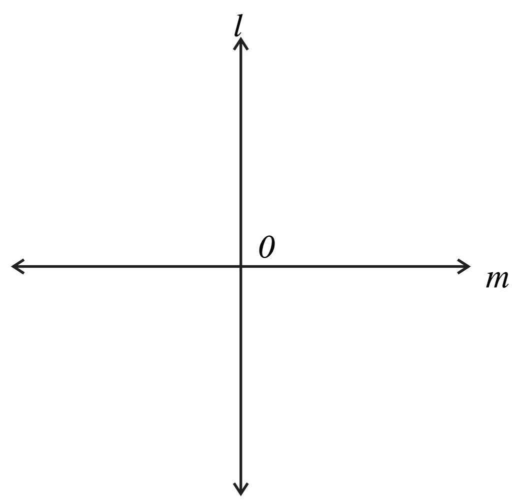
अब DP को आगे बढ़ा दें



अब हम देखते हैं $\angle QPD = \angle PQB$ (अंत: एकांतर कोण) हैं।
इसलिए हम कह सकते हैं कि $DC \parallel AB$

प्रतिच्छेदी रेखाएँ:-

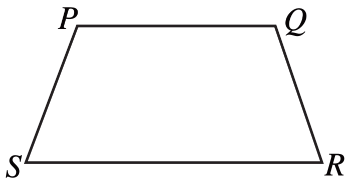
जब कोई दो रेखाएँ किसी एक बिंदु पर काटती हैं तो प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं।



रेखा l तथा m रेखा आपस में 0 बिंदु पर काट रही हैं।
इसलिए l, m प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं।

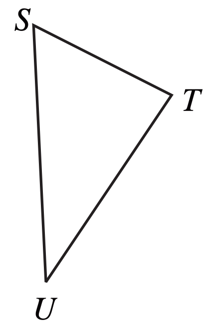
हमारे आस-पास कई प्रकार की संरचनाएँ हैं। इन आकारों से संबंधित अध्ययन, हम अपनी पिछली कक्षा में कर चुके हैं। आओ, निम्न प्रकार के ज्यामितीय आकारों को पहचानें और उनके आकारों के नाम लिखें।

(1)



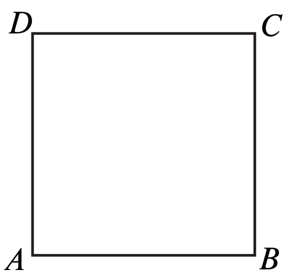
: चतुर्भुज

(2)



: ____________

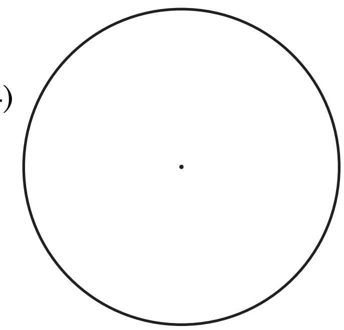
(3)



$AB = BC = CD = DA$

: ____________

(4)

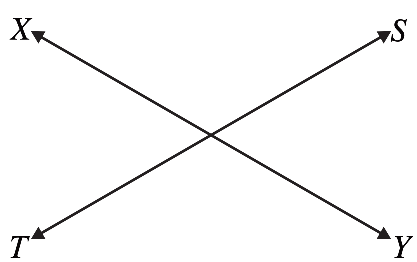


: ____________

(5)

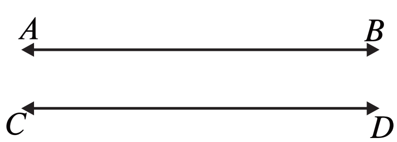
: ____________

(6)



: ____________

(7)



: ____________

आओ त्रिभुज की अवधारणाओं को दोहराएँ

झाड़ू की तीन तीलियाँ इस प्रकार से लें कि कोई दो तीलियों की लंबाई मिलाकर तीसरी तीली की लंबाई से छोटी हो।

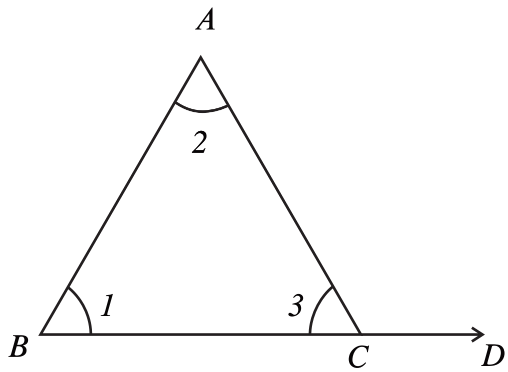
अब तीनों तीलियों से एक त्रिभुज बनाने का प्रयास करें।

क्या हम त्रिभुज बना पाए?

अपने साथियों से इसकी चर्चा करें।

हम जानते हैं कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाइयों का योग तीसरी भुजा की इकाई से अधिक होता है।

अब नीचे दिए गए त्रिभुज के तीनों कोण $\angle 1$, $\angle 2$, और $\angle 3$ की माप कोणमापक से ज्ञात करें तथा उनका माप नीचे लिखें।



$\angle 1$ = ________

$\angle 2$ = ________

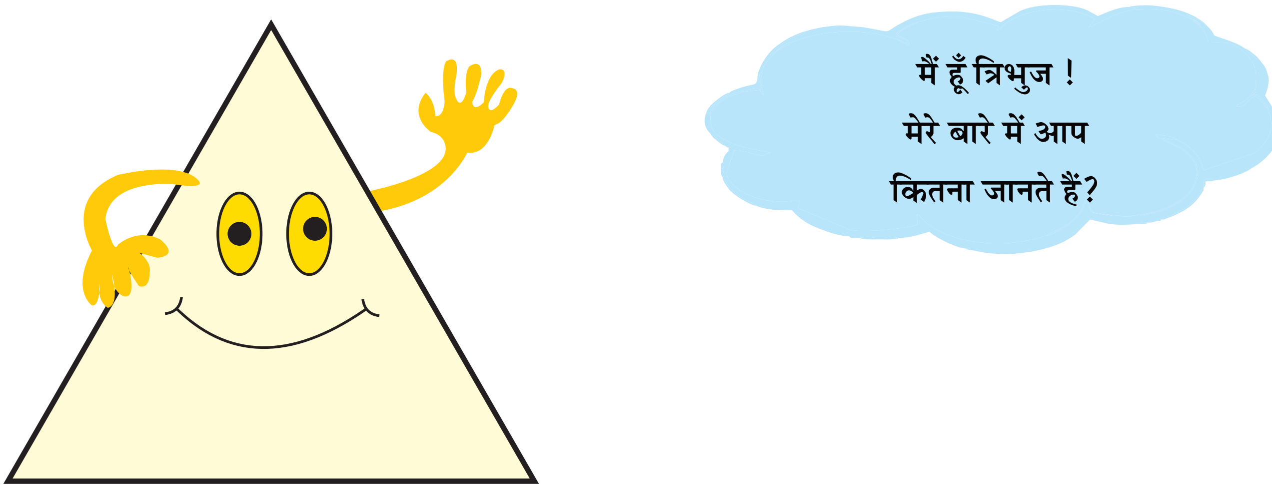
$\angle 3$ = ________

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ = ...

आओ करें

अब आप खुद भी कोई त्रिभुज बनाएँ तथा उसकी तीनों भुजाओं तथा कोणों को मापकर उनका मान बताएँ।

त्रिभुज के तीनों अंत: कोणों का योग 180° होता है।



(a) त्रिभुज ______________ भुजाओं की एक बंद आकृति है।

(b) त्रिभुज में ____________ भुजाएँ और ____________ अंत: कोण होते हैं।

(c) त्रिभुज के तीनों कोणों का योग _______________ होता है।

(d) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाइयों का योग, तीसरी भुजा की लंबाई से _____________ होता है।

(e) त्रिभुजों का वर्गीकरण ___________ और ______________ के आधार पर किया जा सकता है।

(f) जिस त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाई अलग-अलग होती हैं, उसे ____________ त्रिभुज कहते हैं।

(g) जिस त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर हों उसे ____________________ त्रिभुज कहते हैं।

(h) यदि त्रिभुज का एक कोण अधिक कोण हो तो उसे __________________ त्रिभुज कहते हैं।

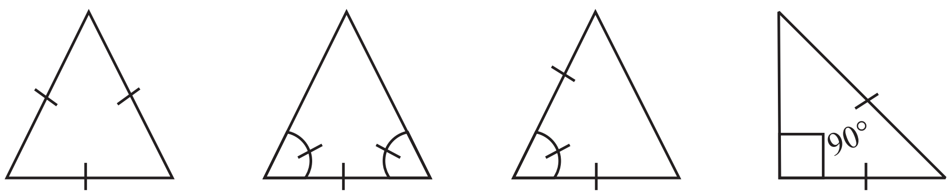
(i) यदि त्रिभुज का एक कोण समकोण हो तो उसे _____________ त्रिभुज कहते हैं।

त्रिभुजों की रचना

क्या आप जानते हैं कि त्रिभुज की रचना में हमें केवल त्रिभुज के तीन भागों की माप की आवश्यकता होती है ?

आइए, आज हम 4 प्रकार के त्रिभुजों की रचना करते हैं।

1)	(भुजा-भुजा-भुजा)	(SSS)	जब हमें त्रिभुज के तीनों भुजाओं की माप ज्ञात है।
2)	(कोण-भुजा-कोण)	(ASA)	जब त्रिभुज के कोई दो कोण तथा उनके बीच की भुजा ज्ञात है।
3)	(भुजा-कोण-भुजा)	(SAS)	जब त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ तथा उनके बीच का कोण ज्ञात है।
4)	(समकोण-कर्ण-भुजा)	(RHS)	जब त्रिभुज का कोण समकोण (90°) हो, कर्ण तथा एक भुजा ज्ञात है।



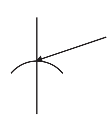
(1) (भुजा-भुजा-भुजा) (2) (कोण-भुजा-कोण) (3) (भुजा-कोण-भुजा) (4) (समकोण-कर्ण-भुजा)

सुझाव :-

- दिए गए 3 भागों की माप से त्रिभुज की एक रफ़ आकृति खींचे। (यह सही रचना करने में सहायक होती है।)
- रफ़ आकृति को देखते हुए रूलर, परकार तथा कोणमापक की मदद से त्रिभुज की रचना करें।
- दिए गए कोणों की माप यदि 15 के गुणांक के बराबर हो तो परकार का प्रयोग अवश्य करें। (15°, 30°, 45°,.........)
- किन्हीं दो रेखाओं के लिए मिलान बिंदु बनाना अनिवार्य है।

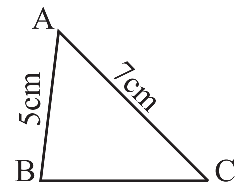
  जैसे :-

1. जहाँ पर दो चाप आपस में काटते हैं  मिलान बिंदु

2. जहाँ एक भुजा तथा एक चाप आपस में काटते हैं  मिलान बिंदु

1 – त्रिभुज की रचना करना
(तीन भुजाओं के माप से)
भुजा–भुजा–भुजा (SSS)

रफ़ आकृति
(Rough Sketch)

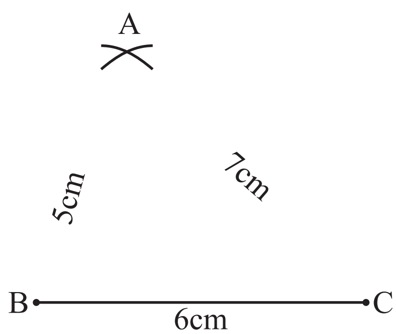


त्रिभुज ABC की रचना

भुजाएँ–
- AB = 5cm
- BC = 6cm
- AC = 7cm

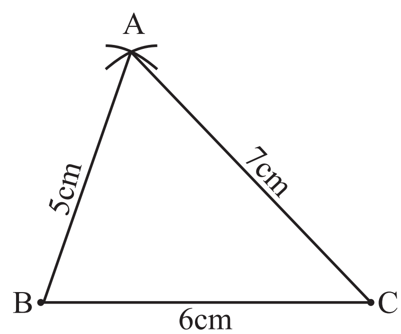
(Step-1)

(पैंसिल से 6cm का एक रेखाखंड BC खींचो।)



(Step-2)

(B से 5cm की चाप लगाओ तथा C से 7cm की चाप लगाओ जो 5cm की चाप को बिन्दु A पर काटती है।)



(Step-3)

(B को A से तथा C को A से मिलाओ।)

ऊपर दिए गए चरणों (Steps) का प्रयोग करके बॉक्स में त्रिभुज ABC की रचना करो।

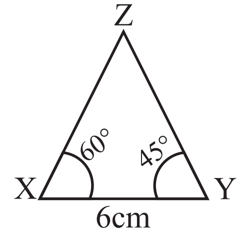
त्रिभुज ABC की रचना करो

2 - त्रिभुज की रचना करना

(त्रिभुज के कोई दो कोण तथा उनके बीच की भुजा से)

कोण-भुजा-कोण (A-S-A)

रफ आकृति
(Rough Sketch)



त्रिभुज XYZ की रचना

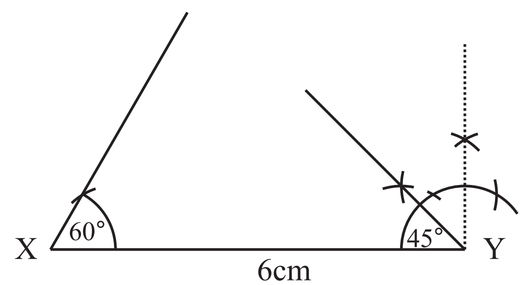
भुजा-[XY = 6cm

कोण $\left[\begin{array}{l}\angle X = 60^\circ \\ \angle Y = 45^\circ\end{array}\right.$

Step-(1) पैंसिल से 6cm का एक रेखाखंड XY खींचो।

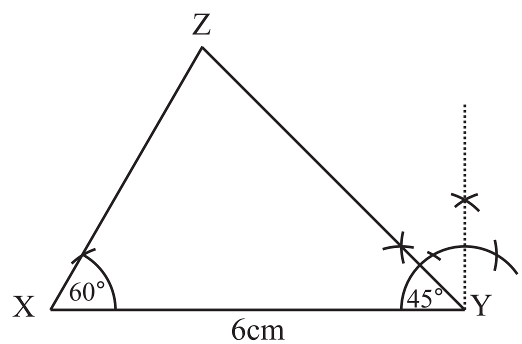
(Step-1)

Step-(2) X पर 60° तथा Y पर तथा 45° का कोण बनाते हुए रेखाएँ खींचिए, जैसा दर्शाया गया है।



(Step-2)

Step-(3) दोनों कोणों की रेखाओं को आगे बढ़ाएँ जो एक दूसरे को Z पर काटती हैं।



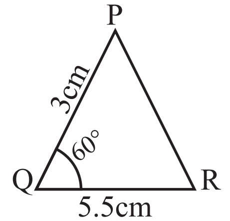
(Step-3)

ऊपर दिए गए सभी चरणों (Steps) का प्रयोग करके बॉक्स में त्रिभुज XYZ की की रचना करो।

त्रिभुज XYZ की रचना करो

3 – त्रिभुज की रचना करना
(त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ तथा उनके बीच के कोण से)
भुजा-कोण-भुजा (S-A-S)

रफ़ आकृति
(Rough Sketch)

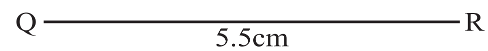


त्रिभुज PQR की रचना

भुजा– [PQ = 3cm
QR= 5.5cm

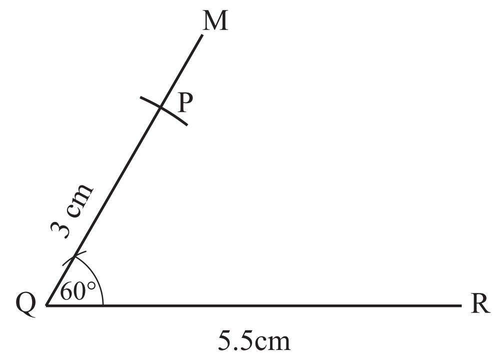
कोण– [$\angle Q = 60°$

Step-(1) पैंसिल से 5.5cm की माप का एक रेखाखंड QR खींचो।



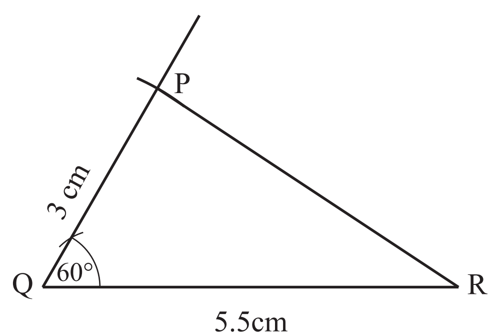
(Step-1)

Step-(2) अब Q पर 60° का कोण बनाते हुए QM रेखा खींचो। परकार में 3 cm की दूरी भरकर Q को केन्द्र मानकर QM पर एक चाप लगाओ जो P पर काटती है।



(Step-2)

Step-(3)P को R से मिलाओ।



(Step-3)

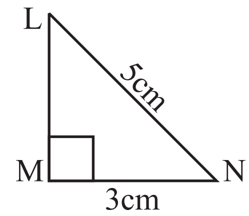
ऊपर दिए गए सभी चरणों (Steps) का प्रयोग करके बॉक्स में त्रिभुज PQR बनाएँ।

त्रिभुज PQR की रचना करो

4 - त्रिभुज की रचना करना
(त्रिभुज की एक भुजा, कर्ण तथा समकोण 90° से)

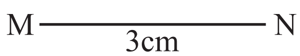
समकोण-कर्ण-भुजा (R-H-S)

रफ़ आकृति
(Rough Sketch)



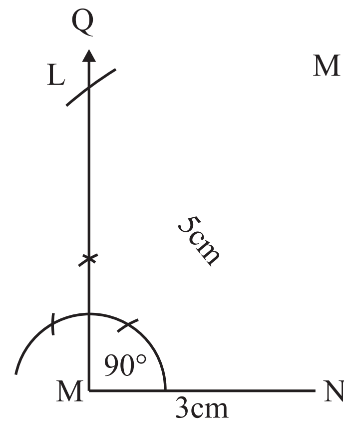
त्रिभुज LMN की रचना

कोण- $\angle M = 90°$
कर्ण- LN = 5cm
भुजा- MN = 3cm



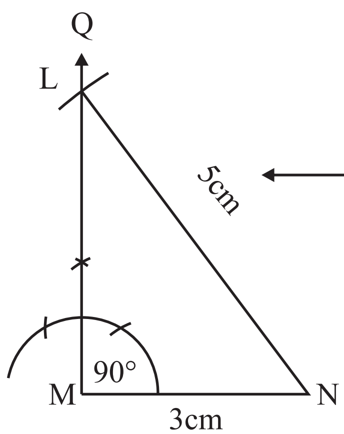
(Step-1)

Step-(1) पहले पैंसिल से 3cm की माप का रेखाखंड MN खींचो।



(Step-2)

Step-(2) बिन्दु M पर 90° का कोण $\angle NMQ$ बनाओ। तथा परकार में 5cm की दूरी भरकर व N को केन्द्र मानकर एक चाप लगाओ जो MQ को L पर काटता है।



(Complete Figure)

(Step-3)

Step-(3) N को L से मिलाओ।

ऊपर दिए गए Steps (चरणों)के अनुसार इस बॉक्स में त्रिभुज LMN बनाएँ।

Activity Time

अमन के कला अध्यापक/अध्यापिका ने उसे गृह कार्य (Home Work) में तीन चित्र बनाकर लाने को कहा। जानते हैं अमन ने कौन-कौन से चित्र बनाए!

1.) अमन ने सबके लिए घर बनाया।

2.) चाचा के लिए कार बनाई।

3.) अपने लिए साइकिल बनाई।

तीनों आकृतियाँ बनाने में उसने केवल रेखाओं तथा वृतों का प्रयोग किया।

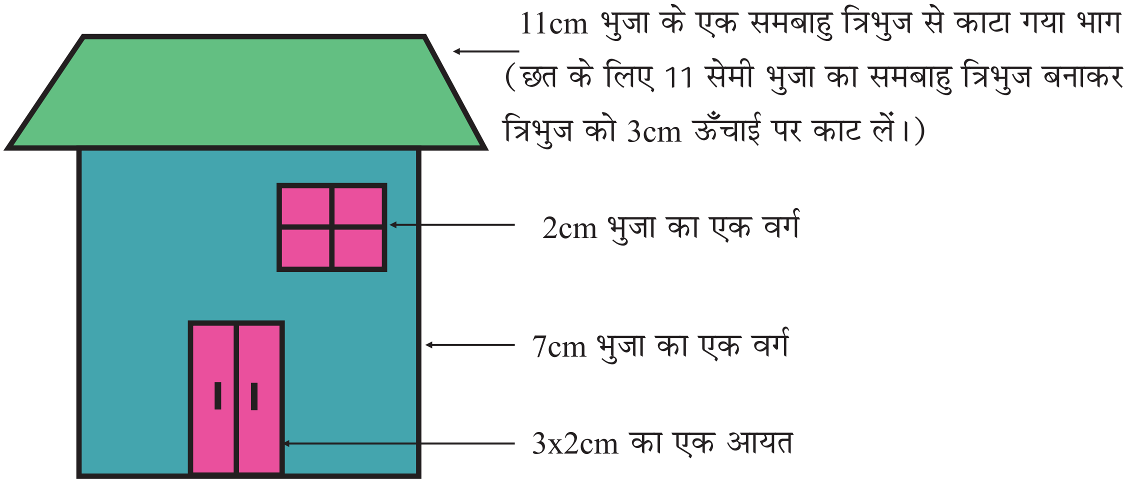
देखें, अमन ने ये चित्र कैसे बनाए हैं?

आप भी इन्हें बनाने की कोशिश कर सकते हैं।

नोट :- दिए गए घर, कार और साइकिल के चित्र माप के अनुसार पेपर कटिंग और पेस्टिंग विधि से भी बनाए जा सकते हैं।

आओ करें :-

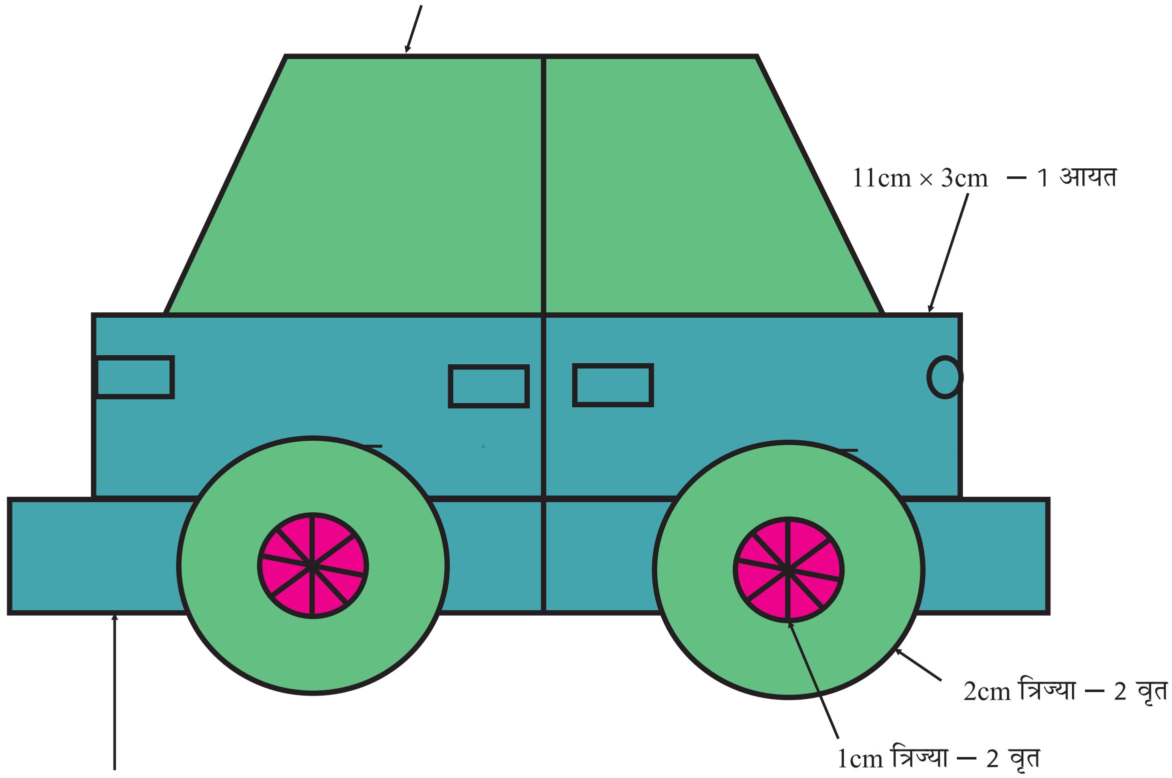
अमन का घर



ऊपर दी गई माप से क्या आप भी घर बना सकते हैं? नीचे दिए गए स्थान पर कोशिश करके देखो।

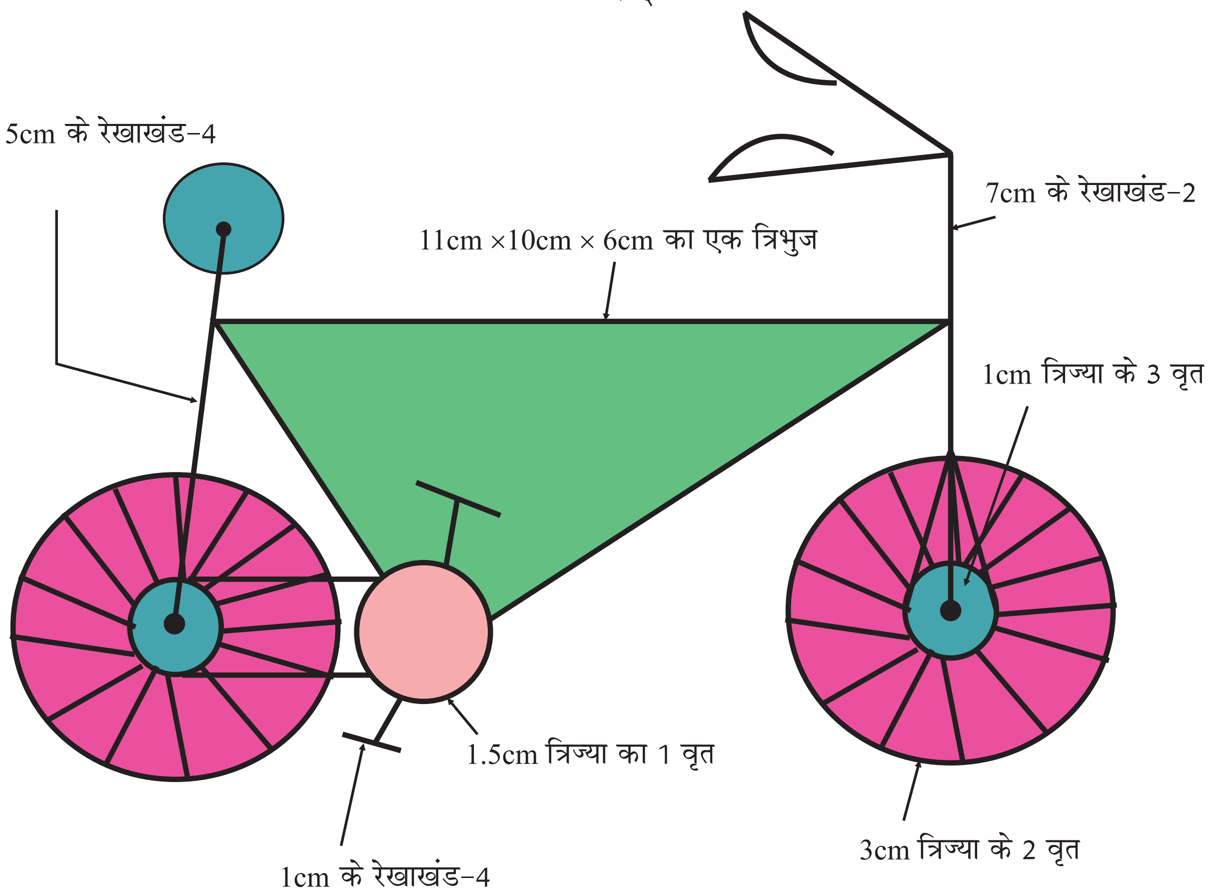
अमन ने अपने चाचा के लिए कार बनाई

कोण (60°), भुजा (8cm), कोण (60°) का एक त्रिभुज (त्रिभुज बनाकर 4cm ऊँचाई पर काट लें) (छत) (roof)



नीचे दिए गए स्थान में आप भी कार बनाइए। कार की माप ऊपर दी गई है।

अमन की साइकिल



ऊपर दी गई साइकिल की माप के अनुसार आप भी नीचे दिए गए स्थान पर साइकिल बनाइए

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

1. समांतर रेखाखंडों की अवधारणा को दैनिक जीवन के उदाहरणों द्वारा समझना।
2. समांतर रेखाओं की रचना करना।
3. प्रतिच्छेदी रेखा द्वारा समांतर रेखा पर बने अंत: एकांतर कोणों का परस्पर संबंध बता पाना।
4. किसी दिये गये त्रिभुज के ज्ञात दो कोणों द्वारा तीसरे की माप निकालना।
5. 4 प्रकार के त्रिभुजों की रचना करना जब केवल कोई तीन भाग ही दिये गये हो (अर्थात् SSS, ASA, SAS, RHS)।

अध्याय 9 – परिमाप और क्षेत्रफल

हम छठी कक्षा में तल में बनी आकृतियों का परिमाप तथा वर्ग और आयात का क्षेत्रफल निकालना सीख चुके हैं। हमने पढ़ा है कि –

परिमाप (Perimeter) एक बंद आकृति के चारों ओर की लंबाई होती है।

क्षेत्रफल एक बंद आकृति द्वारा घेरे गए तल के क्षेत्र को दिखाता है।

हमें पता है कि

आयत का परिमाप = लंबाई + चौड़ाई + लंबाई + चौड़ाई

= 2 x (लंबाई + चौड़ाई)

= $2 \times (l + b)$

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई x चौड़ाई

= $l \times b$

वर्ग का क्षेत्रफल = लंबाई x चौड़ाई

= भुजा x भुजा = $s \times s$

(हमें पता है कि वर्ग की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं, इसलिए हम लंबाई और चौड़ाई दोनों को भुजा नाम दे सकते हैं।)

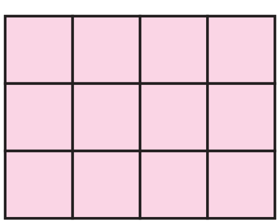
वर्ग का परिमाप = भुजा + भुजा + भुजा + भुजा

= 4 x भुजा = $4 \times s$

आइए, अब हम आकृतियों के परिमाप तथा क्षेत्रफल को दोहराते हैं।

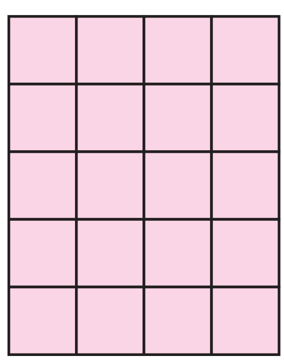
दी गई आकृतियों के वर्ग ( ) की गणना करके क्षेत्रफल निकालिए।

1.



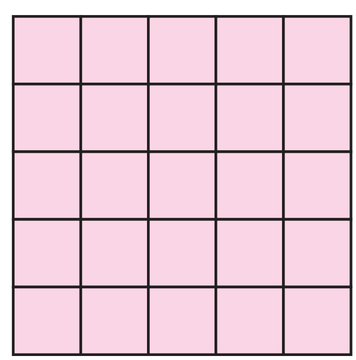
क्षेत्रफल = 12 वर्ग इकाई

2.



क्षेत्रफल = ________

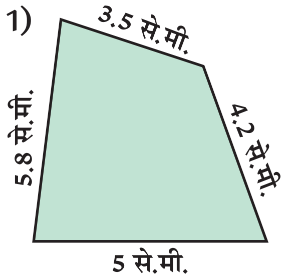
3.



क्षेत्रफल = ________

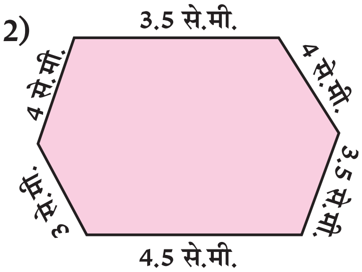
नीचे दी गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए :

1)



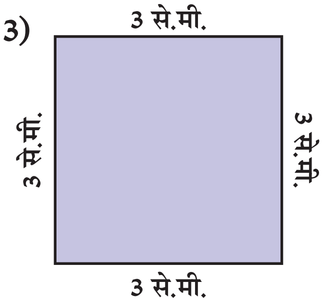
परिमाप = _____

2)



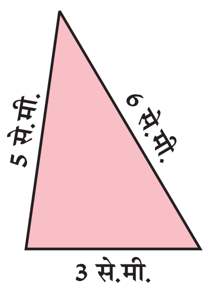
परिमाप = _____

3)



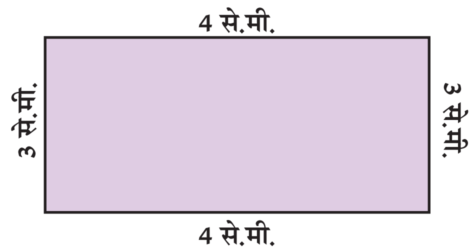
परिमाप = _____

4)



परिमाप = _____

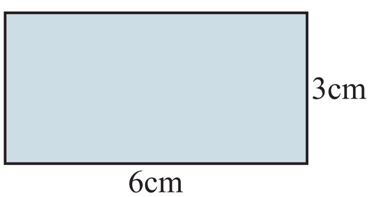
5)



परिमाप = _____

भुजाओं के आधार पर आकृतियों का क्षेत्रफल निकालिए।

(a)

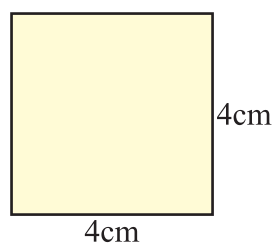


क्षेत्रफल = लंबाई x चौड़ाई

= 6cm x 3cm

= $18cm^2$

(b)

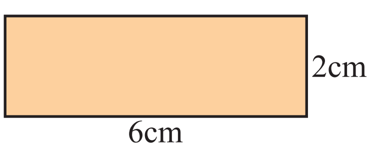


क्षेत्रफल = भुजा x भुजा

= 4cm x 4cm

= $16cm^2$

(c)

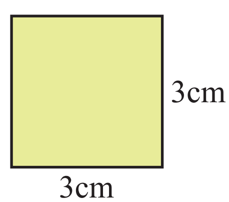


क्षेत्रफल = _____ x _____

= _____ x _____

= _____

(d)

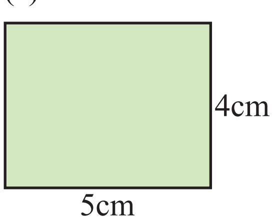


क्षेत्रफल = _____ x _____

= _____ x _____

= _____

(e)

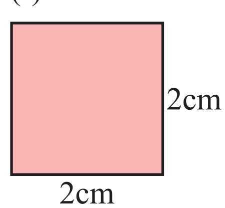


क्षेत्रफल = _____ x _____

= _____ x _____

= _____

(f)



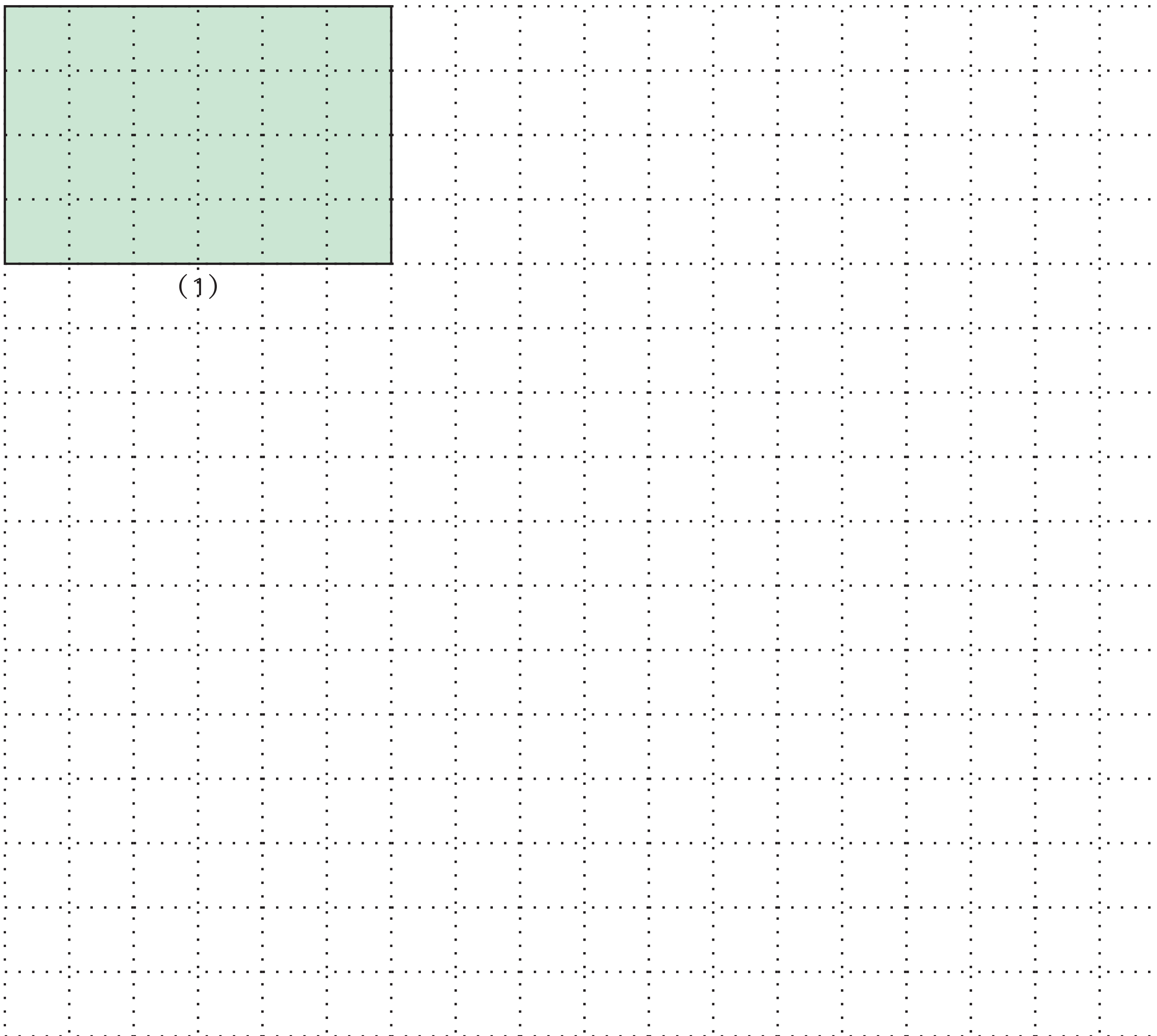
क्षेत्रफल = _____ x _____

= _____ x _____

= _____

आइए, एक गतिविधि करें।

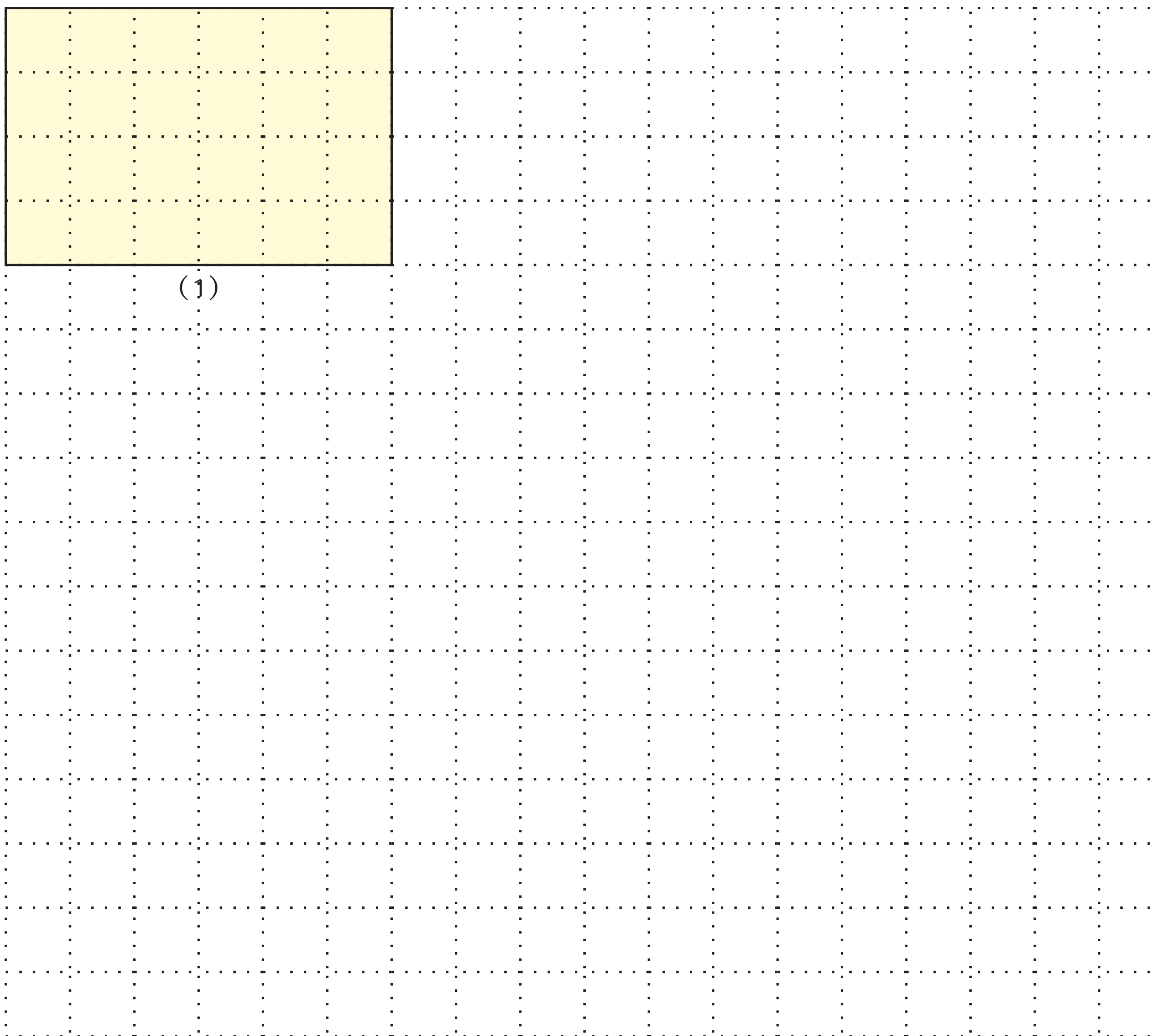
(1) नीचे आपको 24 वर्ग से.मी. क्षेत्रफल का एक आयत दिया गया है।
आपको नीचे दिए गए स्थान पर 24 वर्ग से.मी. क्षेत्रफल के अलग-अलग तीन आयत बनाने हैं।



ऊपर बने चारों आयतों में से किस आयत का परिमाप सबसे अधिक तथा किस आयत का परिमाप सबसे कम है? जाँचिए।

हम यह कह सकते हैं कि एक ही क्षेत्रफल के बहुत सारे आयत हो सकते हैं तथा उनका परिमाप भी अलग-अलग हो सकता है।

(2) नीचे आपको 20 से.मी. परिमाप का एक आयत दिया गया है।
आपको नीचे दिए गए स्थान पर 20 से.मी.परिमाप के अलग-अलग तीन आयत बनाने हैं।



ऊपर बने चारों आयतों में से किस आयत का क्षेत्रफल सबसे अधिक तथा किस आयत का क्षेत्रफल सबसे कम है? जाँचिए।

हम यह कह सकते हैं कि एक ही परिमाप के बहुत सारे आयत हो सकते हैं तथा उनका क्षेत्रफल भी अलग-अलग हो सकता है।

तालिका को पूरा कीजिए।

क्र. सं.	आयत की लंबाई	आयत की चौड़ाई	सभी भुजाओं का योग करने पर आयत का परिमाप (P)	आयत का परिमाप = 2 x (लंबाई + चौड़ाई)
1.	20cm	10cm	P = 20 + 10 + 20 + 10 = 60cm	P = 2 x (20+10) = 2 x 30 = 60cm
2.	15m	7m		
3.	18cm	12cm		

क्र. सं.	वर्ग की भुजा की लंबाई	सभी भुजाओं का योग करने पर वर्ग का परिमाप	वर्ग का परिमाप = 4 x भुजा
1.	6.5cm	P = 6.5 + 6.5 + 6.5 + 6.5 = 26.0 cm	P = 4 x 6.5 = 26.0 cm
2.	10m		
3.	7.5cm		

रिक्त स्थान भरिए।

क्रम सं.	आयत की लंबाई (L) तथा चौड़ाई (B)	परिमाप = 2 x (लंबाई+चौड़ाई)	परिमाप
1.	L=4cm, B=3cm	P = 2 x (_____+_____)	_____ cm
2.	l =5m, B=_____ m	P = 2 x (_____+_____)	16m
3.	l =_____ cm, B=_____ cm	P = 2 x (6 +_____)	14 cm

रिक्त स्थान भरिए।

क्रम सं.	वर्ग की भुजा	परिमाप = 4 x भुजा	परिमाप
1.	5cm	4 x _____	_____ cm
2.	_____	4 x _____	28cm
3.	_____	_____ x 8m	_____ m

नीचे दिए गए आयतों के परिमाप व क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

क्रम सं.	आयत की लंबाई l	आयत की चौड़ाई b	परिमाप p	क्षेत्रफल A
1.	9cm	7cm		
2.	14cm	8.5cm		
3.	9m	6m		

नीचे दिए गए वर्गों के परिमाप व क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

क्र.सं.	भुजा	क्षेत्रफल	परिमाप
1.	5cm		
2.	7m		
3.	2cm		

रिक्त स्थान भरिए।

क्र.सं.	आयत की लंबाई (l) तथा चौड़ाई (b)	क्षेत्रफल = लंबाई x चौड़ाई	क्षेत्रफल
1.	L=3cm, B=2cm	A=_____cm x _____cm	_____ cm^2
2.	L=8m, B=5m	A=_____m x _____m	_____ m^2
3.	L=_____, B=4cm	A=_____cm x 4cm	$20cm^2$

क्र.सं.	वर्ग की भुजा	क्षेत्रफल = भुजा x भुजा	क्षेत्रफल
1.	6cm	A = _____ x _____	_____ cm^2
2.	_____ cm	A= _____ x _____	$16cm^2$
3.	_____ m	A = 7m x 7m	_____ m^2

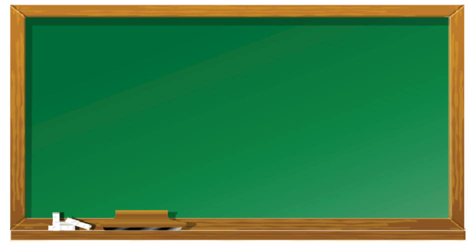
नीचे कुछ स्थितियाँ दी गई हैं। इन स्थितियों में यह बताने का प्रयास कीजिए कि किन स्थितियों में परिमाप की आवश्यकता होगी तथा किन स्थितियों में क्षेत्रफल की आवश्यकता होगी ? **सही बॉक्स का चयन (✓) कीजिए।**

स्थितियाँ :-		परिमाप	क्षेत्रफल
1.	कमरे के फर्श पर दरी बिछाना।	☐	✓
2.	कमरे की दीवार पर सफेदी करना।	☐	☐
3.	खेत के चारों तरफ बाड़ लगाना।	☐	☐
4.	फ़ोटो फ्रेम बनवाना।	☐	☐
5.	दीवार पर टाइल लगवाना।	☐	☐
6.	आयताकार कपड़े के चारों तरफ गोटा लगवाना।	☐	☐
7.	श्यामपट्ट पर पेन्ट करना।	☐	☐
8.	प्लॉट की चारदीवारी बनवाना।	☐	☐

(चारदीवारी की लंबाई व दीवारों के क्षेत्रफल की चर्चा करें।)

नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए।

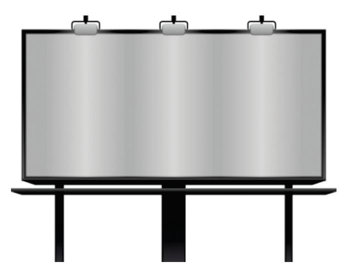
1. एक कक्षा में लगे ब्लैक बोर्ड की लंबाई 3m तथा चौड़ाई 2m है। ब्लैक बोर्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



2. 20 फ़ुट चौड़े एक आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल 800 वर्ग फ़ुट है। आयताकार भूखंड की लंबाई ज्ञात कीजिए।

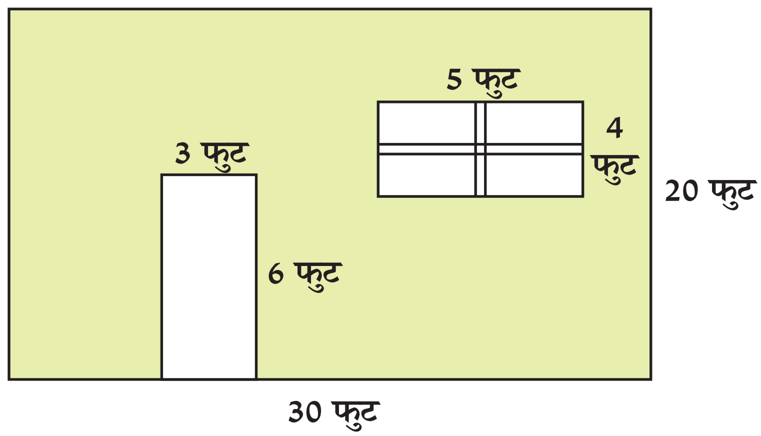
3. एक मकान की छत का क्षेत्रफल 600 वर्ग फ़ुट है। उसकी लंबाई 30 फ़ुट है। उसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

4. विद्यालय में लगे एक होर्डिंग की लंबाई 8 मीटर तथा चौड़ाई 4 मीटर है। 30 रुपये प्रति वर्ग मीटर के हिसाब से इस होर्डिंग को पेन्ट कराने में कितने रुपयों की आवश्यकता होगी ?



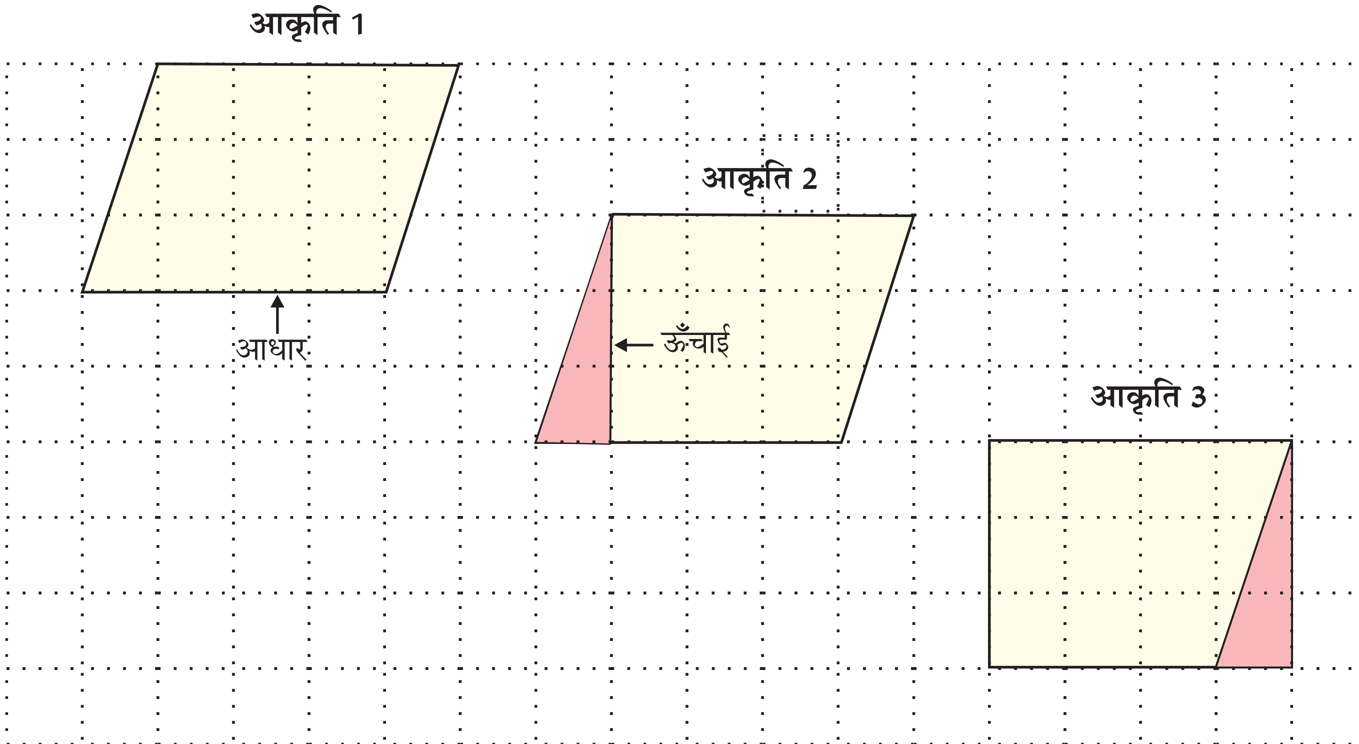
5. विद्यालय के हर्बल गार्डन की लंबाई, चौड़ाई की चार गुनी है। गार्डन के चारों ओर कांटेदार तार लगाने हैं ताकि पौधों को सुरक्षित किया जा सके। 20 रुपये प्रति मीटर के हिसाब से कांटेदार तार लगाने का खर्चा कितना होगा यदि हर्बल गार्डन की चौड़ाई 7 मीटर हो ?

6. हमने विद्यालय की Maths Lab की एक दीवार को पेन्ट कराया है। दीवार पर पेन्ट कराये गए कुल क्षेत्रफल को ज्ञात कीजिए।



7. आयताकार पार्क के चारों ओर रेलिंग लगानी है। रेलिंग की कुल लंबाई कैसे ज्ञात की जाएगी, यदि पार्क की कुल लंबाई 50 मीटर तथा चौड़ाई 40 मीटर हो ?

आइए, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना समझते हैं।



हमने ग्राफ़ पेपर पर एक समांतर चतुर्भुज बनाया। (आकृति 1)

इसमें से हमने एक समकोण त्रिभुज को काट लिया। (आकृति 2)

काटे गए समकोण त्रिभुज को हमने समांतर चतुर्भुज के दूसरे सिरे पर लगा दिया। (आकृति 3)

→ क्या समांतर चतुर्भुज (आकृति 1) तथा आयत (आकृति 3) के क्षेत्रफल समान हैं? ______ (हाँ / नहीं)

हमने देखा कि

आयत की लंबाई = समांतर चतुर्भुज का आधार

आयत की चौड़ाई = समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

= लंबाई x चौड़ाई

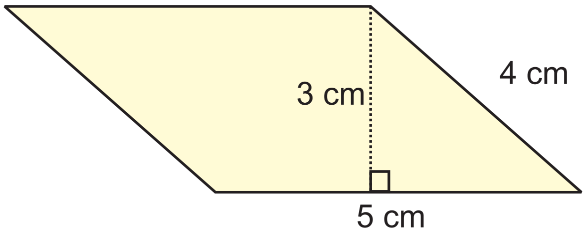
= आधार x ऊँचाई

= b x h

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

दिए गए समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल निकालिए।

1)

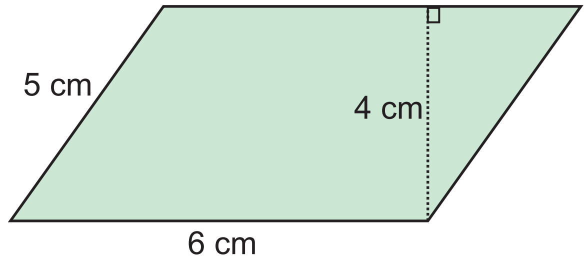


समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= <u> 5 </u> x <u> 3 </u>

= <u>15 वर्ग cm</u>

2)

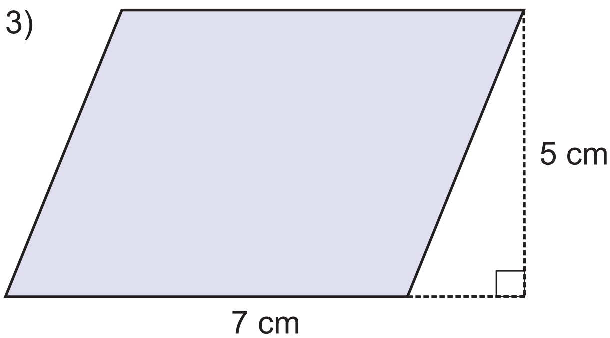


समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= _____ x _____

= ________

3)

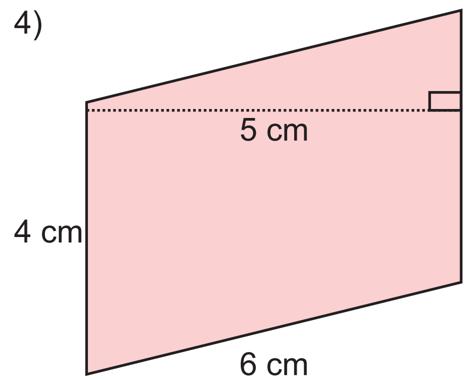


समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= _____ x _____

= ________

4)

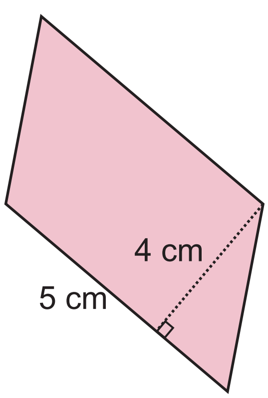


समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= _____ x _____

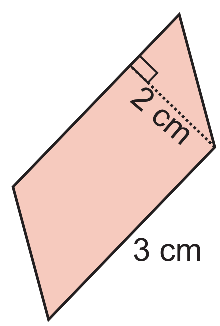
= ________

5)



ऊँचाई हमेशा आधार से मापी जाती है।
प्रश्न 4 में आधार क्या है? अध्यापक से चर्चा करें।

6)



समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= _____ x _____

= ________

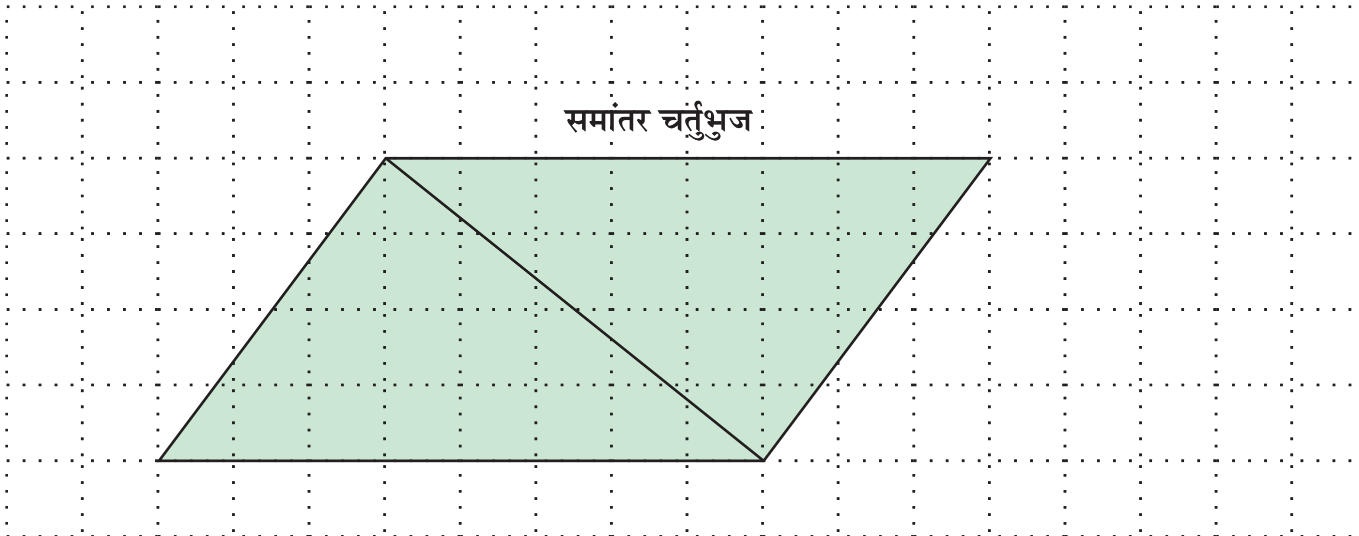
समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= _____ x _____

= ________

नोट:- आधार वह भुजा होगी जिस पर लंब है। इसकी विस्तृत चर्चा अपने साथियों एवं अध्यापक के साथ करें।

आइए त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना समझते हैं।



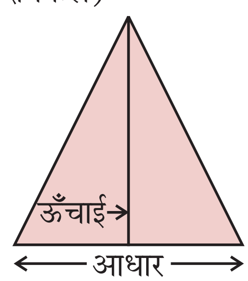
समांतर चतुर्भुज में बने त्रिभुजों की संख्या = ________

क्या समांतर चतुर्भुज में बने दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान है? ________ (हाँ/नहीं)

त्रिभुज का क्षेत्रफल, समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का कितना भाग है? ________

हमने ऊपर दिए गए उदाहरणों से समझा है कि त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ x (समांतर चर्तुभुज का क्षेत्रफल)

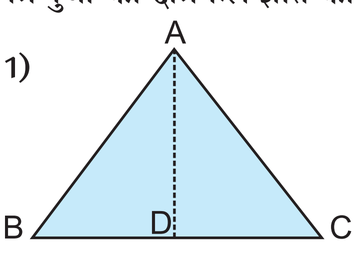
$= \frac{1}{2}$ x (आधार x ऊँचाई)



त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x (आधार x ऊँचाई)

त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

1)



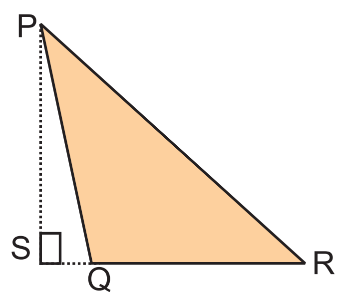
AD=3cm, BC=8cm

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई

$= \frac{1}{2}$ x 8cm x 3cm

= 12cm²

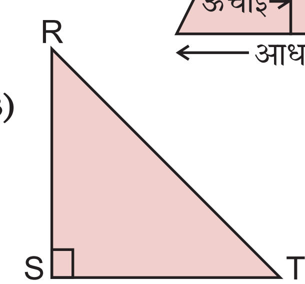
2)



QR = 3cm, PS = 6cm

त्रिभुज का क्षेत्रफल =

3)



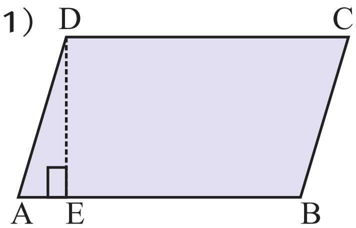
RS = 6cm, ST=10cm

त्रिभुज का क्षेत्रफल =

आइए अब हम अज्ञात राशि निकालने का अभ्यास करते हैं।

उदाहरण :

1)



समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $120cm^2$

आधार (AB) = 20cm

ऊँचाई (DE) = ?

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

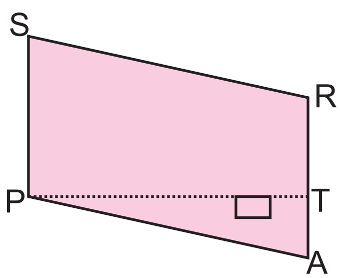
$120\ cm^2$ = 20cm x ऊँचाई

$\frac{120\ cm^2}{20\ cm}$ = ऊँचाई

ऊँचाई = 6cm

अब आप प्रयास कीजिए।

2)



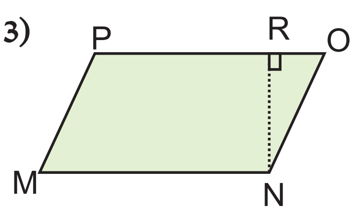
समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $24m^2$

ऊँचाई (TP) = 4m

आधार (AR) = ?

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = _____ x _____

3)



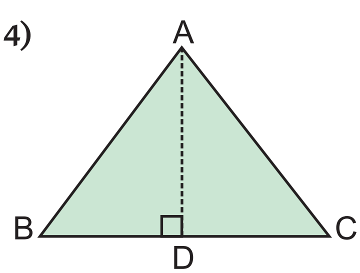
समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $96cm^2$

आधार (PO) = 12cm

ऊँचाई (RN) = ?

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = _____ x _____

4)



त्रिभुज का क्षेत्रफल = $150cm^2$

ऊँचाई (AD) = 20cm

आधार (BC) = ?

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई

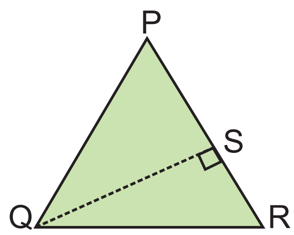
$160cm^2$ = $\frac{1}{2}$ x आधार x 20cm

$\frac{160 \times 2}{20}$ = आधार

आधार = 16 cm

अब आप प्रयास कीजिए।

5)



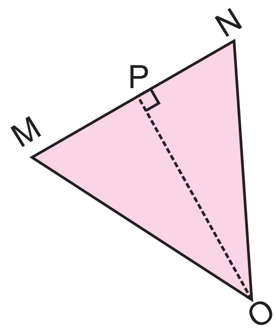
त्रिभुज का क्षेत्रफल = $56cm^2$

ऊँचाई (QS) = 8cm

आधार (PR) = ?

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x _____ x _____

6)



त्रिभुज का क्षेत्रफल = $250cm^2$

आधार (MN) = 50cm

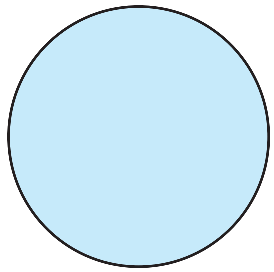
ऊँचाई (PO) = ?

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x _____ x _____

आइए अब हम वृत्त के बारे में कुछ समझते हैं।

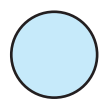
ACTIVITY

एक धागे का टुकड़ा लेकर उसे वृत्त के रूप में रखिए (जैसे नीचे दिखाया गया है)



वापिस इस धागे को खोलकर रेखाखंड की तरह से तल पर फैला दें (जैसा नीचे दिखाया गया है।)

प्रश्न : क्या वृत्त की परिसीमा की लंबाई ज्ञात की जा सकती है?

वृत की परिसीमा की लंबाई उसकी परिधि कहलाती है। 

प्रश्न : क्या आप वृत्त के अंदर घिरे हुए नीले क्षेत्र का माप बता सकते हैं?

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

1. इकाई वर्ग का प्रयोग करके बंद आकृतियाँ का अंदाजन क्षेत्रफल निकालना।
2. वर्ग तथा आयत के परिमाप व क्षेत्रफल ज्ञात करना।

अध्याय 10 – बीजीय व्यंजक

शायना और बॉब सातवीं कक्षा में पढ़ रहे हैं और दोनों मिलकर बीजगणित को और अधिक जानने का प्रयास कर रहे हैं।

बॉब : शायना, आज हम फिर से बीजगणित पढ़ेंगे।

शायना : बॉब ! बीजगणित ?

बॉब : हाँ ! तुम्हें कठिन लगने वाला पाठ ! गणित में इंगलिश के x, y, z...........

शायना : बॉब, अब मुझे बीजगणित कठिन नहीं लगता। मुझे चर, अचर, व्यंजक तथा समीकरण के बारे में कुछ–कुछ याद है। तुमने बताया था। चरों और व्यंजकों की मदद से हम कठिन समस्याओं का हल ढूँढ सकते हैं।

बॉब : शायना, तुम देखोगी कि बीजगणित **व्यंजकों** पर ही आधारित है।

शायना : सच में !

बॉब : हाँ, जब गणित में बड़ी–बड़ी संख्याओं को जोड़ना, घटाना पड़ता है या कहीं–कहीं जब राशियों का मान निश्चित नहीं होता है, तो हम **व्यंजकों** का इस्तेमाल करते हैं।

आज हम पढ़ेंगे :

1) व्यंजक कैसे बनते हैं ?

2) व्यंजकों का मान निकालना तथा उनका प्रयोग।

शायना : क्या तुम्हें याद है कि व्यंजक कैसे बनते हैं ?

बॉब : मुझे याद नहीं आ रहा है।

शायना : चलो मैं बताती हूँ। व्यंजकों को बनाने के लिए हम चर तथा अचर संख्याओं पर संक्रियाओं (योग, घटाव, गुणन व विभाजन) का प्रयोग करते हैं। जैसे 2x+3, यहाँ हमने एक चर संख्या x को 2 से गुणा करके उसमें 3 जोड़ दिया।

अब आइए चर तथा अचर संख्याओं को दोहराएँ :-

चर संख्याओं पर लाल रंग का गोला लगाएँ तथा अचर संख्याओं पर नीले रंग का गोला लगाएँ।

3, 4, v, 5, -5

x, y, z,

10, 15, 20, t, u

मौखिक कथनों को बीजीय व्यंजकों में बदलना

उदाहरण : 1

टीचर ने कक्षा में से 3 विद्यार्थियों – राघव, अवनी तथा अंजू को बुलाया। तीनों के हाथ में कुछ पेंसिल दी गईं।

राघव	:	मुझे 4 पेंसिल मिली हैं।
अवनी	:	मुझे तो 3 पेंसिल मिली हैं।
अंजू	:	मुझे भी कुछ पेंसिल मिली हैं।
टीचर	:	अच्छा तो बताइए कि इस तीनों के पास कुल मिलाकर कितनी पेंसिल हैं।
शुभम	:	इनके पास 7+**चर राशि** अर्थात् **7**+x या x+**7** पेंसिल हैं।

$7+x \longrightarrow$ **एक व्यंजक है।**

उदाहरण : 2

आज राधिका का जन्मदिन है। शिवम के पास कुछ गुब्बारे हैं और गुरप्रीत ने उसे 40 गुब्बारे और दे दिए और पूछा – अब तो सजावट अच्छे से हो जाएगी न?

शिवम बोला – जी, बिल्कुल!!

चलो! अब कुल गुब्बारों की संख्या को बीजीय व्यंजक के रूप में लिखते हैं।

माना शिवम के पास गुब्बारे $= x$

गुरप्रीत ने गुब्बारे दिए $= 40$

अब शिवम के पास कुल गुब्बारे $= 40 + x$ या $x + 40$

आओ, अब मौखिक कथनों को बीजीय व्यंजकों में बदलें :-

मौखिक कथन	:	यदि एक पुस्तक की कीमत कुछ रुपये है तो इसे बीजगणित में कैसे लिखेंगे?
बीजीय व्यंजक	:	माना पुस्तक की कीमत $= x$ रुपये

मौखिक कथन	:	किसी संख्या को यदि 3 और बढ़ाया जाए
बीजीय व्यंजक	:	....

मौखिक कथन	:	यदि किसी संख्या को दुगुना कर उसमें 5 जोड़ दें
बीजीय कथन	:	....

आइए, व्यंजक बनाने का प्रयास करें

उदाहरण n और 6 के जोड़ का 6 गुणा

ऊपर दिए गए कथन का व्यंजक बनाने के लिए पहले n और 6 को जोड़ते हैं $\rightarrow n+6$

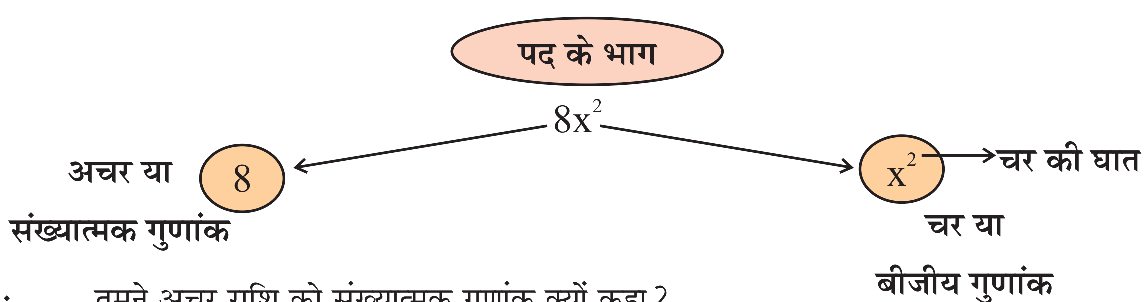
अब $n+6$ को 6 से गुणा करते हैं $\longrightarrow 6\,(n+6)$

1.	$3z$ में 3 जोड़ना	....
2.	$5t$ तथा 5 का योगफल	....
3.	$\frac{m}{8}$ में 6 जोड़ना	....
4.	3 में से $3z$ घटाएँ।	....
5.	$7m$ तथा 14 का अंतर	....

आइए, शायना और बॉब की आगे हुई बातचीत को समझते हैं।

शायना : देखो बॉब! एक व्यंजक पदों से मिलकर बना होता है। व्यंजकों में वे पद पहले अलग से बनाए जाते हैं, फिर उन्हें जोड़ा या घटाया जाता है। जैसे $3x+5y$ में हमने पहले 3 को x से गुणा किया ($3x$) फिर 5 को y से गुणा किया ($5y$)। फिर दोनों को जोड़ दिया ($3x+5y$)।

अब नीचे देखो।



बॉब : तुमने अचर राशि को संख्यात्मक गुणांक क्यों कहा?
इसमें तो कहीं गुणा का निशान भी नहीं है।

शायना : जानते हो एक बहुत ही मज़ेदार बात है। बीजगणित में चर और अचर राशि में गुणा का निशान नहीं लगाया जाता है। जैसे :-

$(3) \times (x)$ को $3x$ लिखते हैं।

बॉब : ऐसा क्यों?

शायना	:	क्योंकि बीजगणित में चर के रूप में x का प्रयोग बहुत अधिक होता है तथा x की शक्ल गुणा (x) के निशान से मिलती है। जब दोनों एक साथ आ जाते हैं तो मामला गड़बड़ हो जाता है।
बॉब	:	शायना ! तुमने व्यंजक $8x^2$ में 2 को घात लिखा है। क्या इसका मतलब है चर x यानी $(x)\times(x)=x^2$?
शायना	:	हाँ बॉब !
बॉब	:	क्या हम बीजगणित में अंकगणित की तरह गुणनखंड नहीं बना सकते हैं ?
शायना	:	हाँ बॉब गुणनखंड भी बना सकते हैं।
बॉब	:	व्यंजक में पद कैसे छाँटते हैं ?
शायना	:	किसी व्यंजक में जोड़ (+) या घटाव (–) का निशान देखकर आसानी से पदों को छाँटा जा सकता है। जैसे $x+4y$ में x तथा $4y$ दो पद हैं।
बॉब	:	क्या $x-5y$ में भी दो पद हैं ?
शायना	:	हाँ ! परंतु ध्यान रहे इसमें घटा (–) का निशान दूसरे पद के साथ रहेगा जैसे x तथा $-5y$ दो पद हैं। इसका मतलब व्यंजकों को बनाने के लिए यह कहना ही काफी है कि केवल पदों को जोड़ा जाता है। हम $x-5y$ को $x+(-5y)$ भी लिख सकते हैं।

आइए, अब नीचे दिए गए व्यंजक को देखते हैं–

$40x^2+5$

यह व्यंजक दो पदों से मिलकर बना है :
एक पद $40x^2$ तथा दूसरा पद 5

$40x^2+5$ बनाने के लिए हम पहले x में x का गुणा करेंगे, फिर उसे 40 से गुणा करके $40x^2$ प्राप्त करते हैं। उसके बाद उसमें 5 जोड़ दिया जाता है।

इसी प्रकार $3xy+4$ में पहले हम x और y को गुणा करके xy प्राप्त करते हैं। फिर उसे 3 से गुणा करके $3xy$ प्राप्त करते हैं और अंत में $3xy$ में 4 जोड़ दिया जाता है।

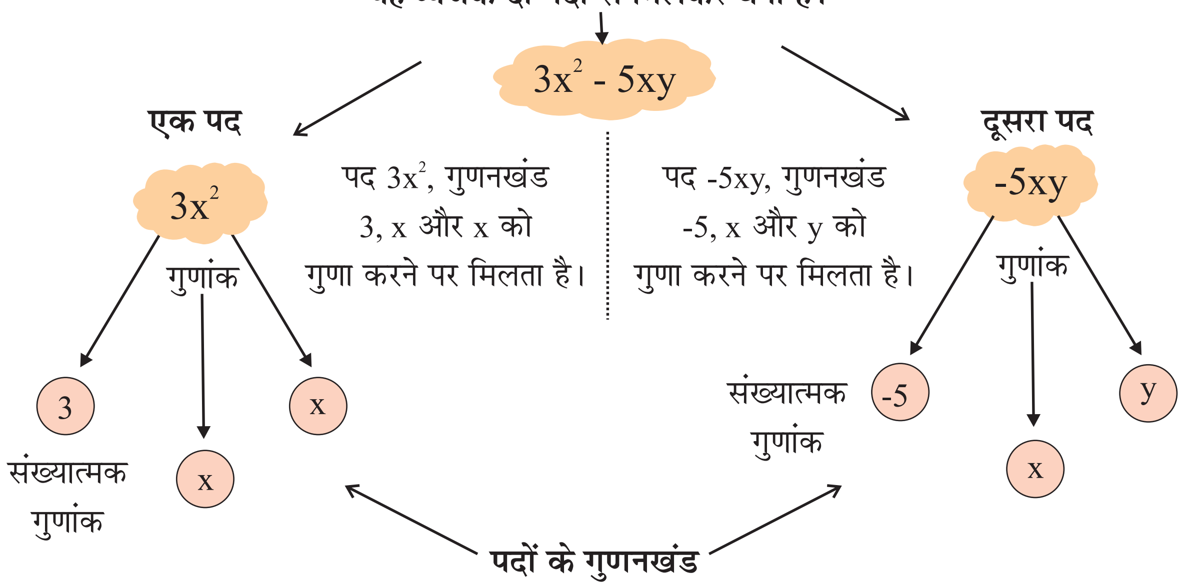
निम्नलिखित व्यंजकों में पदों की संख्या बताएँ–

व्यंजक		पदों की संख्या	पद	व्यंजक		पदों की संख्या	पद
(a)	$35-y$	2	35 , $-y$	(e)	$x-3$	......	....
(b)	$75+z$	......	....	(f)	$1+x+x^2$	......	....
(c)	$95+x$	......	....	(g)	$y-y^3$	......	....
(d)	$a+15$	......	....	(h)	$-ab+2b^2-3a^2$	......	....

एक व्यंजक के पदों तथा पदों के गुणनखंडों को एक व्यंजक पेड़ आलेख से दिखाया जा सकता है।

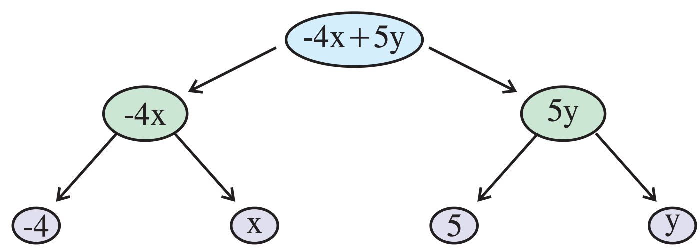
व्यंजक पेड़ आलेख

यह व्यंजक दो पदों से मिलकर बना है।

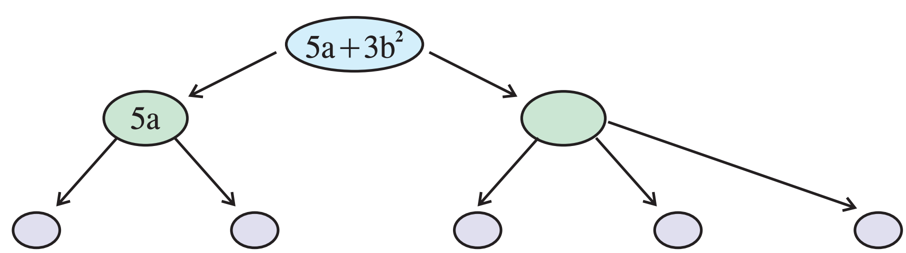


पेड़ आलेख को पूरा करने का प्रयास करें।

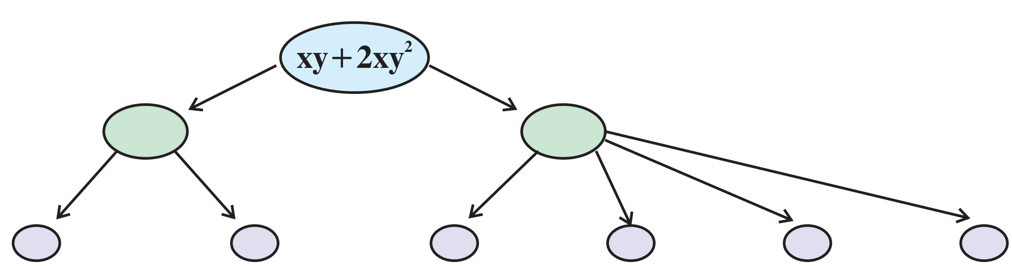
1)



2)



3)



आइए, फिर से बॉब और शायना की बातचीत को सुनते हैं।

बॉब : हमने पेड़ आलेख में संख्यात्मक गुणांक (गुणनखंड) देखा। हम संख्यात्मक गुणांक को केवल गुणांक भी कह सकते हैं। किसी भी पद में संख्यात्मक गुणांक के अलावा चर वाले भाग को क्या कहते हैं? जैसे : $6xy$ में 6 को xy का संख्यात्मक गुणांक कहेंगे पर xy को क्या कहेंगे?

शायना : बहुत अच्छा सवाल है! xy को हम $6xy$ का बीजीय गुणांक कहेंगे। इसी प्रकार, पद $-5y^2$ में, y^2 का गुणांक -5 है।

बॉब : अच्छा बताओ, खाली xy में xy का क्या गुणांक होगा?

शायना : xy का गुणांक 1 होगा।

जब किसी पद का गुणांक 1 होता है, तो उसे लिखते समय छोड़ दिया जाता है। जैसे : $1y^2$ को हम केवल y^2 लिखेंगे। इसी प्रकार जब किसी पद का गुणांक -1 होता है, तो उसे केवल घटाव के चिन्ह $(-)$ से दिखाते हैं। जैसे: $-xyz$ में xyz का गुणांक -1 है।

बॉब : अब क्या तुम मुझे **समान पद** और **असमान पद** बताओगी?

शायना : हाँ आओ, समझते हैं।

समान पद (Like Terms)

जब पदों के बीजीय गुणनखंड एक जैसे ही हों तो वे समान पद कहलाते हैं। जैसे $5xy$, $6yx$ यहाँ दोनों पदों में x तथा y अचर संख्याएं हैं।

असमान पद (Unlike Terms)

जब पदों के बीजीय गुणनखंड भिन्न-भिन्न हों तो वे असमान पद कहलाते हैं जैसे $2xy-3x-y$ में $2xy$ और $-3x$ में भिन्न-भिन्न बीजीय गुणनखंड हैं अत: यह असमान पद हैं।

आओ करें :-

निम्नलिखित में समान पदों के समूह बनाइए।

xy, xy^2, $3xy$,
x^2, $-x$, y, $2x$, $7x^2$
$-7x^2y^2$, $-2x$, $3xy^2$
$-4xy$, $-3y$

आइए, तालिका पूरा करने का प्रयास करते हैं।

	व्यंजक	गुणनखंड x वाला पद	x का गुणांक
1)	$4x - 3y$	$4x$	4
2)	$x + y + 5$	x	1
3)	$2y + 5$	_____	_____
4)	$2xy$	_____	_____
	व्यंजक	**गुणनखंड y वाला पद**	**y का गुणांक**
1)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
2)	$8 + yz$	_____	_____
3)	$yz^2 + 5$	_____	_____
4)	$my + m$	_____	_____
	व्यंजक	**पद जो अचर नहीं है**	**संख्यात्मक गुणांक**
1)	$xy+y$	xy, y	1, 1
2)	$13-y^2$	_____	_____
3)	$13-y+5y^2$	_____	_____
4)	$4p^2q-3pq^2+5$	_____	_____

अब करो :

नीचे दिए गए पदों के लिए कोई भी दो–दो समान पद लिखें:

(a) $7ab$ ....$-6ab$.... ....$4ab$.....

(b) $2nm^2$ ....

(c) $3x$ ....

(d) $4y^3$ ....

(e) y ....

(f) $10x^2$ ....

एकपदी

जिस व्यंजक में केवल एक पद होता है उसे एकपदी कहते हैं।

उदाहरण :- 4x, 3pz, 7

द्विपदी

जिस व्यंजक में केवल दो असमान पद होते हैं उसे द्विपदी व्यंजक कहते हैं।

उदाहरण :- 9x+8, -3x+2y, 2p+q

सोचें : यदि हम 5xy+6yx लें तब भी क्या इसे द्विपद कहेंगे ?

त्रिपदी

जिस व्यंजक में तीन असमान पद होते हैं उसे त्रिपदी व्यंजक कहते हैं।

उदाहरण :- 3p+5q+4, 13x-5t+6

बहुपदी

जिस व्यंजक में एक से अधिक पद होते हैं उसे बहुपदी व्यंजक कहते हैं।

उदाहरण :- 9x+q, 3p+5q+4, 3x+7y+z-3

प्र. निम्नलिखित पदों में किन्हीं भी पदों का प्रयोग करते हुए दो तथा तीन पदों से मिलकर बनने वाले बीजीय व्यंजक लिखिए।

$xy, 6.5, 7, 4, x, 7z, 5z^2, y, v, t^2, -5, 10, 1, s$

दो पद वाले बीजीय व्यंजक	तीन पद वाले बीजीय व्यंजक
(i) xy+7	(i) $5z^2+t^2+1$
(ii)	(ii) ....
(iii)	(iii) ....
(iv)	(iv) ....
(v)	(v) ....

अध्यापक कक्षा सात में पढ़ा रहे हैं।

अध्यापक : बच्चो, आज हमारे 2 छात्रों (लक्की व लविस) का जन्मदिन है। वे कुछ फल अपने साथ लाये हैं। महेश तुम इन फलों को गिनो तथा बताओ कि कौन कितने फल लाया है।

असलम : (गिनकर) सर लक्की की टोकरी में 12 आम हैं, 18 केले हैं तथा 5 सेब हैं। और लविस की टोकरी में 14 केले हैं, 10 आम हैं तथा 3 सेब हैं।

अध्यापक : अच्छा तो रीता आप बताओ कि कुल कितने फल हैं ?

रीता : सर कुल 22 आम, 32 केले, 8 सेब हैं।

अध्यापक : यह आपने कैसे पता लगाया ?

पीटर : सर मैंने दोनों टोकरियों के आम, केले तथा सेब गिनकर अलग–अलग जोड़ दिये।

अध्यापक : इसका मतलब एक जैसी वस्तुओं को समान वस्तु तथा एक जैसे पदों को समान पद कहते हैं। तथा समान पदों को आपस में जोड़ा या घटाया जा सकता है।

रीता : सर फिर असमान पद क्या होता है ?

अध्यापक : जिस प्रकार आम व सेब आपस में समान नहीं हैं, इसी प्रकार x, y, z आपस में असमान पद हैं। तथा असमान पदों को जोड़ा या घटाया नहीं जा सकता।

रीता : सर इसका अर्थ है कि $3x$ या $4x$ को जोड़ा जा सकता है।

अध्यापक : बिल्कुल ठीक।

रीता : मगर $3x$, $5y$ को जोड़ा या घटाया नहीं जा सकता।

अध्यापक : आप सही समझे। आओ इसे एक उदाहरण से समझते हैं।

$$(3x + 9y) + (6x + 5y)$$
$$= (3x + 6x) + (9y + 5y)$$
$$9x + 14y$$

व्यंजकों का योग और घटाव

पिछली कक्षा में हमने देखा कि व्यंजकों को कैसे जोड़ा या घटाया जाता है।

किसी भी व्यंजक में हम केवल समान पदों को इकट्ठा करके जोड़ते हैं। बाकी असमान पदों को जोड़ के रूप में ही लिखा छोड़ देते हैं।

मान लीजिए हमें $2x$ और $3x$ को जोड़ना है।

यदि हम x की जगह 4 ले लें तो

अब 2×4 को 3×4 में जोड़ें तो हम कुछ ऐसे करेंगे।

$\Rightarrow 2 \times 4 + 3 \times 4$

$\Rightarrow (2+3) \times 4$

$\Rightarrow 5 \times 4 = 20$

क्या हम बता सकते हैं कि हमने कौन से नियम से ऐसा किया है?

हम जाँच भी कर सकते हैं

$2 \times 4 + 3 \times 4 = 8 + 12 = 20$

इसलिये जब

$2x + 3x$ को जोड़ेंगे तो

$2x + 3x = 2 \times x + 3 \times x$

$= (2+3)\, x$

$= 5x$

आओ, टॉफ़ियों की कुल संख्या निकालें।

अहमद, राम, रानी और गुरप्रीत के पास समान मात्रा में टॉफ़ियाँ हैं। चलिए अब देखते हैं कि इन चारों के पास कुल मिलाकर कितनी टॉफ़ियाँ हो गईं।

माना अहमद की टॉफ़ियाँ $= a$

तो रानी की टाफ़ियाँ $= a$

राम की टाफ़ियाँ $= a$

तथा गुरप्रीत की टॉफ़ियाँ $= a$

कुल टाफ़ियाँ $= a + a + a + a$

$= 4a$

अब यदि अहमद के पास a टॉफ़ियाँ, राम के पास b टॉफ़ियाँ, रानी के पास c टॉफ़ियाँ तथा गुरप्रीत के पास d टॉफ़ियाँ हों तो कुल टॉफ़ियाँ = $a+b+c+d$

अब यदि हमें $2x$ और $3y$ को **जोड़ने** को कहा जाए तो हम केवल $2x+3y$ लिखकर छोड़ देंगे।

कुछ दोस्त $2x+3y$ को $5x$ या $5y$ या $5xy$ लिख देते हैं जो बिल्कुल सही नहीं है। **असमान पदों को उस प्रकार जोड़ा या घटाया नहीं जा सकता जिस प्रकार कि समान पदों को जोड़ा या घटाया जाता है।**

इसी प्रकार हम व्यंजकों का **घटाव** करते हैं। समान पदों में हम संख्यात्मक गुणांकों का घटाव करेंगे। जैसे–

$4m - 2m = (4-2)\, m = 2m$

$5m - 8m = (5-8)\, m = -3m$

अब यदि हमें कुछ ऐसा व्यंजक दिया हो जैसे $3a+4b-5a+4c+2b$ तो हम पहले समान पदों को एक साथ लिखेंगे।

$$[3a+(-5a)] + (4b+2b) + 4c$$
$$= (3-5)a+(4+2)b+4c$$
$$= -2a + 6b + 4c$$

आओ बॉक्स में निम्न पदों का योग लिखें।

$5xy + 4yx =$	$9xy$
$4x+5y - 3x+7x =$	
$10y+ 5z =$	
$3a+4b - 5a + 7b =$	
$3b + 5c =$	
$5c - 2c =$	
$7c - 3c =$	
$7b - 5a =$	

आओ, कुछ और उदाहरण देखें।

उदाहरण 1

$9x^2-7x+8$ और $5x-12$ को जोड़ें।

समान पद

$$\begin{array}{r} 9x^2-\boxed{\begin{array}{c}7x\\5x\end{array}}\begin{array}{c}+\\-\end{array}\boxed{\begin{array}{c}8\\12\end{array}} \\ \hline 9x^2-2x-4 \\ \hline \end{array}$$

समान पद

हम देख सकते हैं कि हमने व्यंजकों को एक के नीचे एक करके इस प्रकार रखा है कि समान पद एक ही सीध में रहें।

ऊपर दिए गए व्यंजकों को हम कुछ इस प्रकार से भी जोड़ सकते हैं।

$9x^2-7x+8+5x-12$

$= 9x^2-7x+5x+8-12$

$= 9x^2-2x-4$

उदाहरण 2

$6xy+8yz-2zx$ और $-3xy+4zx+4x$ को जोड़ें।

समान पद

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{r}6xy\\-3xy\end{array}}\begin{array}{c}+8yz\\ \end{array}\boxed{\begin{array}{r}-2zx\\+4zx\end{array}}\begin{array}{c}\\+4x\end{array} \\ \hline 3xy+8yz+2zx+4x \\ \hline \end{array}$$

जिस प्रकार व्यंजकों के जोड़ में समान पदों को जोड़ा जाता है, इसी प्रकार घटाने की प्रक्रिया में समान पदों को घटाया जाता है।

उदाहरण 3

$12a-9ab+5b$ में से $-4a-7ab+3b$ को घटाइए।

$$\begin{array}{rrr} 12a & -9ab & +5b \\ -4a & -7ab & +3b \\ (+) & (+) & (-) \\ \hline 16a & -2ab & +2b \\ \hline \end{array}$$

ध्यान देने की बात है कि घटाने की प्रक्रिया में दूसरी पंक्ति में लिखे व्यंजक के पदों का चिन्ह बदला जाता है। अपने अध्यापक से इस बारे में चर्चा करें।

निम्न व्यंजकों का जोड़ ज्ञात कीजिए।

(1) $3x^2 - 5x+4$ तथा $-2x^2 - 4x+3$

(2) $3xy^2 - 5xy$ तथा $x+ xy^2 - x^2y$

(3) $a^2b - 3ab$ तथा $4ab^2+4x$

घटा ज्ञात करें।

(1) $3x^2 - 5x+4$ में से $-2x^2 -4x+3$

(2) $3xy^2 - 5xy$ में से $-5xy^2 -3xy$

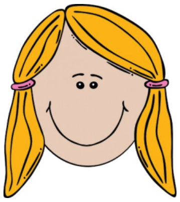
(3) $a^2b - 3ab$ में से $-3a^2b +4ab$

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

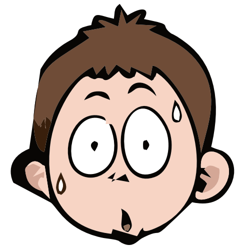
1. कथनों को बीजीय व्यंजक में बदलना तथा पदों की पहचान करना।
2. समान एवं असमान पदों को पहचानना।
3. व्यंजकों को जोड़ना तथा घटाना।

अध्याय 11 – घातांक और घात

योगेश और कविता आपस में संख्याओं को पढ़ने का खेल खेल रहे हैं।

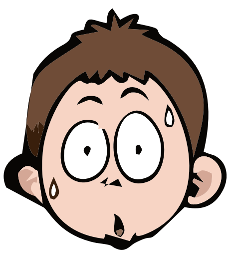


योगेश, इस संख्या को पढ़कर बताओ ?
1000000000000



अच्छा, तो तुम इस संख्या को पढ़कर बताओ ?
3,900,000,000,000,000,000

दोनों बच्चों को संख्याओं को पढ़ने में परेशानी हुई।
दोनों बच्चे अध्यापक के पास अपनी समस्या को लेकर जाते हैं।



सर, 1000000000000 और 3,900,000,000,000,000,000 जैसी बहुत बड़ी संख्याओं को हम किस प्रकार पढ़ेंगे ?

इन संख्याओं को किस प्रकार पढ़ते और लिखते हैं, आइए समझते हैं।

क्रम को ध्यानपूर्वक देखिए और आगे बढ़ाइए।

10	=	1 × 10
10+10	=	2 × 10
10+10+10	=	3 ×10
10+10+10+10	=	———
10+10+10+10+10	=	———
10+10+10+10+10+10	=	———

यहाँ हम एक ही संख्या को बार–बार जोड़ने के लिए उसे गुणा के रूप में लिख रहे हैं।

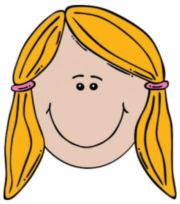
जब हम एक ही संख्या को बार–बार गुणा करते हैं तो उसे किस रूप में लिखेंगे ?

आओ देखें।

क्रम को ध्यानपूर्वक देखिए आगे बढ़ाइए।

10	=	10^1
10×10	=	10^2
10×10×10	=	10^3
10×10×10×10	=	———
10×10×10×10×10	=	———
10×10×10×10×10×10	=	———
10×10×10×10×10×10×10	=	———

अच्छा!!!
जब कोई संख्या बार–बार गुणा होती है तो हम उसे इस रूप में लिखते हैं।



लेकिन इस रूप को क्या कहते हैं,
और इसे कैसे पढ़ते हैं ?

संख्याओं के इस रूप को घातांकीय रूप (Exponential form) कहते हैं।
यहाँ '10' को आधार (base) संख्या तथा इसके ऊपर की
संख्या को घात (Power) कहते हैं।

घातांकीय रूप में संख्या 7^3 (घात → 3, 7 ← आधार)

→ घातांकीय रूप में लिखी गई संख्याओं के आधार और घात को पहचानिए।

घातांकीय रूप	आधार	घात
a) 2^5	2	5
b) 10^{13}		
c) 9^3		
d) 3^{12}		

घातांकीय रूप में लिखिए

I) $2 \times 2 \times 2 = 2^3$

II) $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$

III) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 =$ __

IV) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 =$ __

V) $3 \times 3 =$ __

VI) $c \times c \times c \times c \times c \times c \times c =$ __

VII) $a \times a \times a \times a =$ __

विस्तारित रूप में लिखिए

a) $3^3 = 3 \times 3 \times 3$

b) $2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

c) $5^2 =$

d) $10^4 =$

e) $7 =$

f) $b^3 =$

g) $y^5 =$

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए	घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए
a) $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$	1) $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3$
b) $2^5 =$ ________ = ___	2) $y \times y \times y \times z \times z \times z \times z = y^3 \times z^4$
c) $7^2 =$ ________ = ___	3) $t \times t =$ ______
d) $3^4 =$ ________ = ___	4) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 2 \times 2 =$ ______
e) $10^6 =$ ________ = ___	5) $a \times a \times b \times b \times b \times c \times c =$ ______
f) $2^3 \times 3^2 =$ ________ = ___	
g) $7^2 \times 4^2 =$ ________ = ___	

क्या आपका राज़ सुरक्षित है ? घातांकीय रूप में सोचिए।

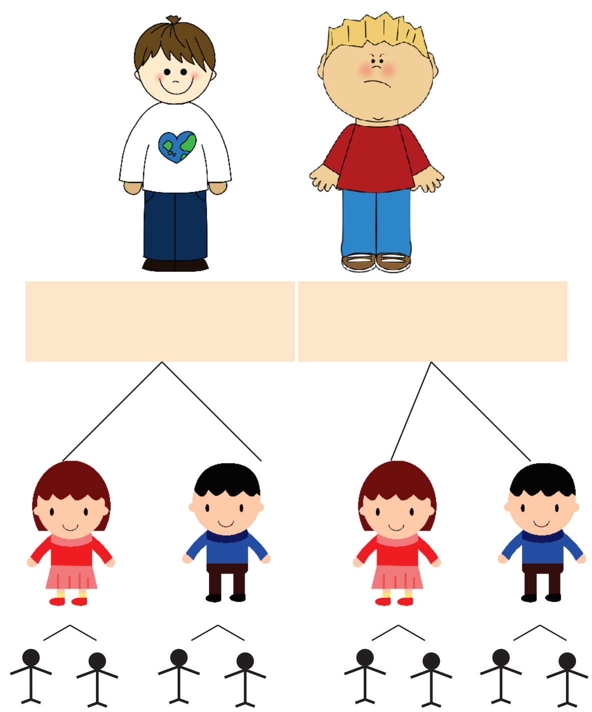
→ आप एक ऐसी बात सोचिए जो आप सभी से छिपाना चाहते थे।
अब वह राज़ की बात आप किसी को बताना चाहते हो।

पहले दिन आपने अपने दो मित्रों को वह राज़ बता दिया। उन मित्रों का नाम लिखिए

दूसरे दिन आपके दोनों दोस्तों ने, अपने दो–दो दोस्तों को वह राज़ बता दिया।

तीसरे दिन, उन सभी ने अपने दो–दो अन्य दोस्तों को वह राज़ बता दिया।

चौथे दिन, उन सभी ने अपने और दो–दो दोस्तों को वह राज़ बता दिया।



यह क्रम इसी प्रकार बढ़ता चला जाएगा

आइए अब घातांकीय रूप में सोचते हैं।

पहले दिन, कितने लोगों को राज़ का पता चला ?	=	2	=	2^1	=	2
दूसरे दिन, कितने लोगों को राज़ का पता चला ?	=	2×2	=	2^2	=	4
तीसरे दिन, कितने लोगों को राज़ का पता चला ?	=	______	=	______	=	______
चौथे दिन, कितने लोगों को राज़ का पता चला ?	=	______	=	______	=	______
पाँचवे दिन, कितने लोगों को राज़ का पता चल जाएगा ?	=	______	=	______	=	______

अब प्रश्नों के उत्तर दीजिए

प्र०1 अनुमान लगाकर बताइए कि कितने दिनों में आपके पूरे गाँव या कॉलोनी को आपके राज़ के बारे में पता चल जाएगा ?

उ०–

प्र०2 आपको इस कहानी से क्या सीखने को मिला ?

उ०–

अभाज्य गुणनखंड विधि से संख्याओं को घातांकीय रूप में लिखिए।

(a)

3	81
3	27
3	9
3	3
	1

$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 3^4$

(b)

2	1000
2	500
2	250
5	125
5	25
5	5
	1

$1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 2^3 \times 5^3$

(c) 64 = ______________

= _____

	64

(d) 36 = ______________

= _____

	36

(e) 256 = ______________

= _____

256

(f) 729 = ______________

= _____

729

(g) 144 = ______________

= _____

144

(h) 420 = ______________

= _____

420

आओ जाँचें। जब घातांकीय रूप में आधार संख्या, ऋणात्मक हो।

घातांकीय रूप में लिखिए	विस्तारित रूप में लिखिए
a) $(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = (-2)^5$	क) $(-5)^5 = (-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)$
b) $(-1)\times(-1)\times(-1) = (-1)^3$	ख) $(-3)^4 =$ ______________
c) $(-13)\times(-13)\times(-13)\times(-13) =$ ___	ग) $(-9)^3 =$ ______________
d) $(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7) =$ ___	घ) $(-2)^2 =$ ______________
e) $(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a) =$ ___	ङ) $(-b)^3 =$ ______________

आओ, घातांक से संबंधित कुछ नियम बनाएँ

पैटर्न को समझकर, आगे बढ़ाइए।

$(-1)^1 = (-1) = -1$

$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$(-1)^3 = \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ = \_\_\_$

$(-1)^4 = \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ = \_\_\_$

$(-1)^5 = \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ = \_\_\_$

$(-1)^6 = \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ \times \_\_\_ = \_\_\_$

प्राप्त उत्तर

$(-1)^{\text{सम संख्या}} = \_\_\_\_\_\_\_\_$

$(-1)^{\text{विषम संख्या}} = \_\_\_\_\_\_\_\_$

मान ज्ञात कीजिए

(a) $(-1)^8 = \_\_\_\_\_$ (b) $(-1)^{17} = \_\_\_\_\_$ (c) $(-1)^{100} = \_\_\_\_\_$

(d) $(-1)^7 = \_\_\_\_\_$ (e) $(-1)^{90} = \_\_\_\_\_$ (f) $(-1)^{21} = \_\_\_\_\_$

आइए घातांकों के नियम समझने की कोशिश करते हैं।

दिए गए उदाहरणों को समझकर रिक्त स्थान भरिए

(i) $3^2 \times 3^5 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) = 3^{2+5} = 3^7$

(ii) $2^3 \times 2^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2) = 2^{3+2} = 2^5$

(iii) $a^4 \times a^2 = (a \times a \times a \times a) \times (a \times a) = a^{4+2} = a^6$

(iv) $5^2 \times 5^2 =$ ______________ = ____ = ____

(v) $7^2 \times 7^1 =$ ______________ = ____ = ____

(vi) $y^2 \times y^2 =$ ______________ = ____ = ____

प्राप्त नियम 1

$$a^m x a^n = a^{m+n}$$

समान आधार वाले घातांकों का गुणन कीजिए।

(a) $4^7 \times 4^2 = 4^{7+2} = 4^9$

(b) $2^5 \times 2^3 =$ ____ = ____

(c) $a^2 \times a^6 =$ ____ = ____

(d) $5^2 \times 5 =$ ____ = ____

(e) $7^4 \times 7^2 \times 7^3 =$ ____ = ____

(f) $y^3 \times y^2 \times y^1 =$ ____ = ____

ध्यान दीजिए

$2^3 x 5^2$, क्या इस स्थिति में हम घातांकों की घात को जोड़ सकते हैं?

साथियों के साथ चर्चा कीजिए।

दिए गए उदाहरणों को समझकर, रिक्त स्थान भरिए

i) $3^5 \div 3^2 = \dfrac{3^5}{3^2} = \dfrac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3} = 3^{5-2} = 3^3$

ii) $7^4 \div 7^3 = \dfrac{7^4}{7^3} = \dfrac{7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} = 7^{4-3} = 7^1$

iii) $a^6 \div a^2 = \dfrac{a^6}{a^2} = \dfrac{a \times a \times a \times a \times a \times a}{a \times a} = a^{6-2} = a^4$

iv) $2^7 \div 2^6$ = ____ = ________ = ____ = ____

v) $5^4 \div 5^4$ = ____ = ________ = ____ = ____

प्राप्त नियम 2

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

सरल कीजिए।

a) $2^9 \div 2^4 = 2^{9-4} = 2^5$

b) $3^5 \div 3^4$ = ___ = ___

c) $x^7 \div x^3$ = ___ = ___

d) $11^8 \div 11^4$ = ___ = ___

e) $5^9 \div 5^9$ = ___ = ___

f) $y^8 \div y^8$ = ___ = ___

ध्यान दीजिए

$2^3 \div 5^2$, क्या इस स्थिति में भी हम घातांकों की घात का घटाव करेंगे?

साथियों के साथ चर्चा कीजिए।

आइए, अब हम कुछ उदाहरणों से शून्य घात वाले घातांकों का मान निकालने का प्रयास करते हैं।

i) $3^4 \div 3^4 = \frac{3^4}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = 1$ $\boxed{\frac{3^4}{3^4} = 3^{4-4} = 3^0 = 1}$

ii) $7^5 \div 7^5 = \frac{7^5}{7^5} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7} = 1$ $\boxed{\frac{7^5}{7^5} = 7^{5-5} = 7^0 = 1}$

प्राप्त नियम 3

$a^0 = 1$

हल ज्ञात कीजिए

1) $10^0 = \_\_\_$ 1

2) $3^0 = \_\_\_$

3) $10^0 = \_\_\_$

4) $5^2 \div 5^2 = \_\_\_$

दिए गए उदाहरणों को समझकर, रिक्त स्थान भरिए।

a) $(3^2)^3 = (3^2) \times (3^2) \times (3^2) = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) = 3^{2x3} = 3^6$

b) $(5^3)^2 = (5^3) \times (5^3) = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) = \underline{5^{3x2}} = \underline{5^6}$

c) $(7^2)^2 = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_$

d) $(2^2)^4 = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_$

e) $(a^3)^3 = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_$

प्राप्त नियम 4

$(a^m)^n = a^{mn}$

प्राप्त नियम 4 का प्रयोग कर सरल कीजिए

i)	$(6^2)^3$	$= 6^{2x3}$	$= 6^6$		(iv)	$(11^2)^4 =$	11^{2x4}	$= \underline{11^8}$
ii)	$(5^{10})^4$	=______	=______		(v)	$(3^4)^2$ =	______	=______
iii)	$(7^{15})^2$	=______	=______		(vi)	$(2^7)^2$ =	______	=______

अभाज्य संख्या की घात के रूप में लिखिए

a) 8^5	=	$(2 \times 2 \times 2)^5$	=	$(2^3)^5$	=	2^{5x3}	=	2^{15}
b) 4^3	=	______	=	______	=	______	=	______
c) 9^2	=	______	=	______	=	______	=	______
d) 27^4	=	______	=	______	=	______	=	______
e) 25^5	=	______	=	______	=	______	=	______

दिए गए उदाहरणों को समझकर, रिक्त स्थान भरिए:-

a) $3^2 \times 5^2$	$= 3 \times 3 \times 5 \times 5$	$= (3 \times 5) \times (3 \times 5)$		$= (3 \times 5)^2$	$= 15^2$
b) $5^3 \times 3^3$	$= 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3$	$= (5 \times 3) \times (5 \times 3) \times (5 \times 3)$		$= (5 \times 3)^3$	$= 15^3$
c) $7^2 \times 3^2$	=__________________	= _________	= _________	= _______	= __
d) $2^4 \times 3^4$	=__________________	= _________	= _________	= _______	= __
e) $2^2 \times 5^2$	=__________________	= _________	= _________	= _______	= __

प्राप्त नियम 5

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

प्राप्त नियम 5 का प्रयोग कर, सरल कीजिए			घातांकीय रूप का विस्तार कीजिए		
1) $7^5 \times 3^5$	$= (7 \times 3)^5$	$= 21^5$	(i) 15^4	$= (3 \times 5)^4$	$= 3^4 \times 5^4$
2) $2^4 \times 9^4$	= ____	= ___	(ii) 10^3	= ____	= ____
3) $7^2 \times 2^2$	= ____	= ___	(iii) 21^3	= ____	= ____
(6) $8^{10} \times 3^{10}$	= ____	= ___	(vi) $(35)^2$	= ____	= ____

दिए गए उदाहरणों को समझकर, रिक्त स्थान भरिए:-

a) $3^5 \div 4^5 = \dfrac{3^5}{4^5} = \dfrac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^5$

b) $a^3 \div b^3 = \dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$

c) $5^2 \div 2^2$ = ___ = __________ = _________ = _________ = ___

d) $9^4 \div 5^4$ = ___ = __________ = _________ = _________ = ___

प्राप्त नियम 6

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

घातांकीय रूप में लिखिए		विस्तारित रूप में लिखिए
1) $\frac{2^4}{5^4} = \left(\frac{2}{5}\right)^4$	4) $\frac{10^4}{5^4} =$ ___	i) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5}$
2) $\frac{x^3}{y^3} =$ ___	5) $\frac{11^7}{3^7} =$ ___	ii) $\left(\frac{7}{2}\right)^2 =$ ___ $=$ ______
3) $\frac{3^3}{2^3} =$ ___	6) $\frac{8^5}{3^5} =$ ___	iii) $\left(\frac{4}{2}\right)^3 =$ ___ $=$ ______
		iv) $\left(\frac{5}{3}\right)^4 =$ ___ $=$ ______

सही घातांकीय नियम से मिलान कीजिए

1) $x^n \times x^m$	a) $(x \times y)^n$
2) $x^n \div x^m$	b) x^{n+m}
3) $(x^n)^m$	c) $\left(\frac{x}{y}\right)^n$
4) $x^n \times y^n$	d) x^{nm}
5) $x^n \div y^n$	e) x^{n-m}

सही मिलान कीजिए

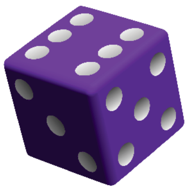
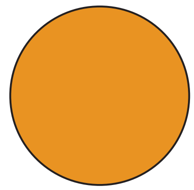
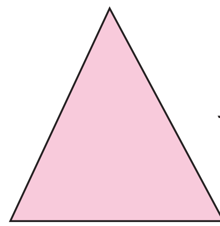
1) 7^0	a) 3^8
2) $(3^2)^4$	b) 6^7
3) $6^2 x 6^5$	c) 12^5
4) $7^7 \div 7^2$	d) 1
5) $3^5 \times 4^5$	e) 7^5

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

1. संख्या को घातांकीय रूप में लिखना।
2. संख्या को घांताकीय रूप से विस्तारित रूप में लिखना।
3. घांताकों के नियमों को समझ कर उनका प्रयोग करना।

अध्याय 12 – ठोस आकारों का चित्रण

निम्न आकृतियों में समझते हुए कॉलम 1 का कॉलम 2 से मिलान कीजिए।

	Column I			Column II	
1.		ईंट	A		वर्ग
2.		पासा	B		वृत
3.		सूरज	C		त्रिभुज
4.		आइसक्रीम कोन	D		आयत

उपरोक्त मिलान की गई आकृतियों में संबंध भी है और अंतर भी।

यदि हम ध्यानपूर्वक देखें तो हम यह कह सकते हैं कि Column I में दी गई आकृतियाँ Column II में दी गई आकृतियों का विस्तृत रूप (extended form) हैं।

तथा Column I में दी गई आकृतियों में तथा Column II में दी गई आकृतियों में समानता के अलावा गहराई/ऊँचाई (height/depth) भी है।

	Column I में		Column II में
1	दी गई आकृतियाँ–3D या त्रिविमीय आकृतियाँ कहलाती हैं। (Solid Shapes)	1	दी गई आकृतियाँ–2D या द्विविमीय आकृतियाँ कहलाती हैं (Plane figures)
2	इनमें लंबाई, चौड़ाई व गहराई (ऊँचाई) होती है।	2	इनमें केवल लंबाई व चौड़ाई होती है।

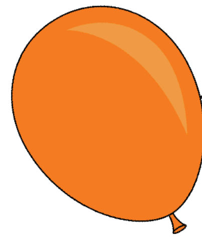
क्रियाकलाप (Activity Time-1)

बच्चो ऊँचाई/चौड़ाई की विमा के लिए एक क्रियाकलाप (Activity) करते हैं!

एक गुब्बारा लें तथा कल्पना करें कि इसमें न तो ऊँचाई हो और न ही चौड़ाई – वह एक तल आकृति पर बिंदु है।

गुब्बारा (बिना हवा भरे हुए)

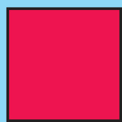
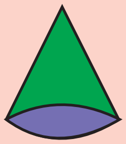
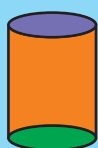
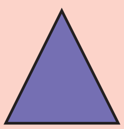
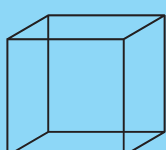
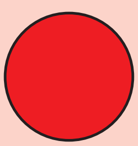
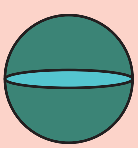
बच्चों से इसमें हवा भरने के लिए कहा जाए। जैसे-जैसे इसमें हवा भरती जाएगी तो गुब्बारा फैलना शुरू कर देगा तथा इसमें लंबाई, चौड़ाई व ऊँचाई दिखाई देगी ।



हवा से भरा हुआ गुब्बारा

- हवा भरने से पहले आपको गुब्बारा कैसा दिखाई देता है?
- क्या आपको तब लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई दिखाई दे रही थी? ढूंढ़ने की कोशिश करो।
- हवा भरने के बाद जब गुब्बारा फूल गया तो आपको बिना फूले गुब्बारे और फूले हुए गुब्बारे में कोई अंतर दिखाई दिया?

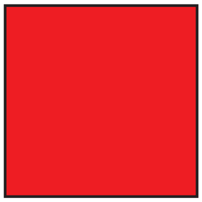
मिलान कीजिए (आकार, आकार का प्रकार तथा आकार का नाम)

आकार	आकार का प्रकार	आकार का नाम
	तीन विमाएँ (त्रि-विमीय)	गोला
	दो विमाएँ (द्वि-विमीय)	बेलन
	त्रि-विमीय	वर्ग
	द्वि-विमीय	वृत्त
	त्रि-विमीय	घनाभ
	त्रि-विमीय	घन
	द्वि-विमीय	शंकु
	त्रि-विमीय	त्रिभुज

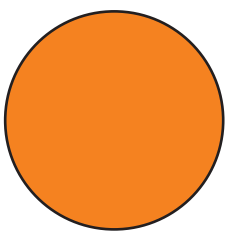
अब करके देखिए।

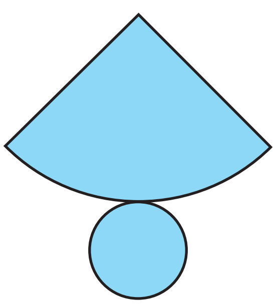
नाम लिखिए और मिलान कीजिए।

(द्विविमीय)
2D

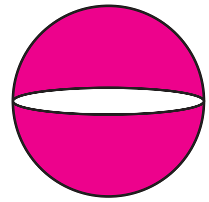
1. 

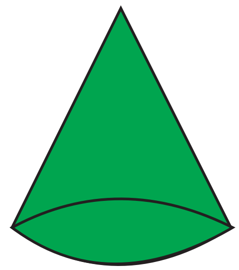
2. 

3. 

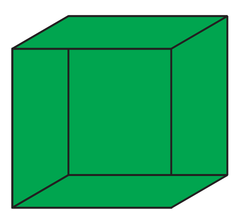
4. 

(त्रि-विमीय)
3D

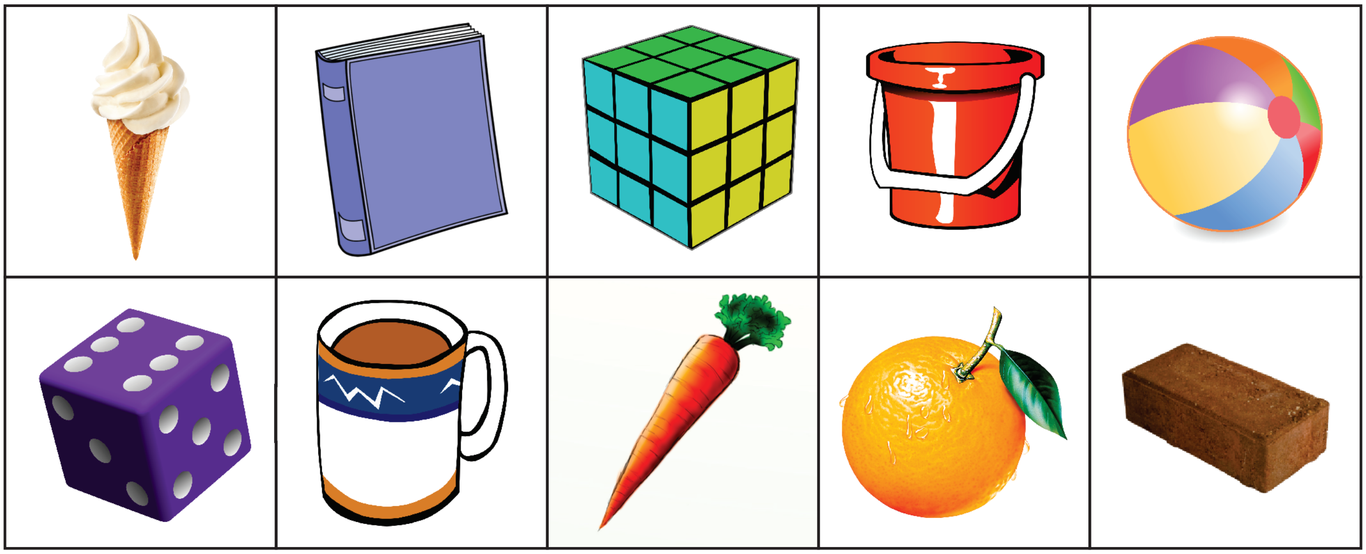
A 

B 

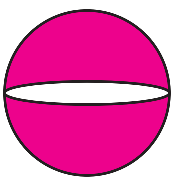
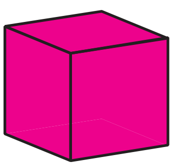
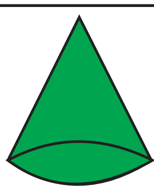
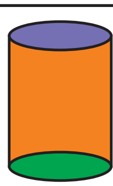
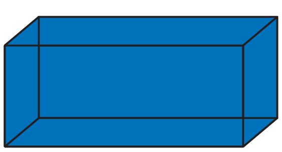
C\ 

D 

ठोस आकार तथा वस्तुएँ



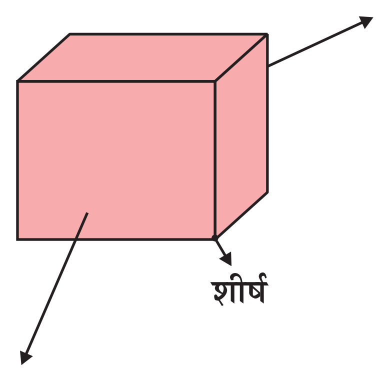
ऊपर रखी वस्तुओं को उनकी आकृति अनुसार बनाइए

1. 		
2. 		
3. 		
4. 		
5. 		

फलक, किनारे तथा शीर्ष

ठोस आकारों को और अधिक समझने के लिए हमें फलक, किनारे तथा शीर्ष की पहचान करनी होगी।

इस घन के चित्र को देखिए।



,

आओ फलक, किनारे तथा शीर्ष की पहचान करें।

1. घन का प्रत्येक ऊपरी सपाट पृष्ठ एक फलक (face) है।
2. इसके दो फलक एक रेखाखंड में मिलते हैं। जो घन का एक किनारा (edge) कहलाता है।
3. तीन किनारे एक बिंदु पर मिलते हैं, जो घन का शीर्ष (vertex) कहलाता है।

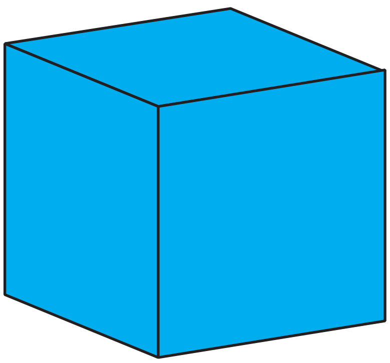
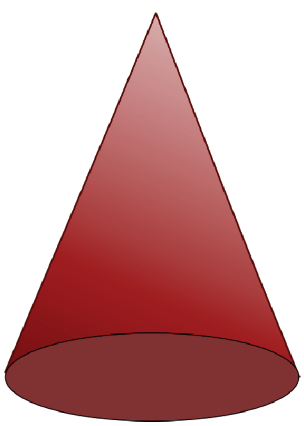
अब अपनी गणित की पुस्तक को देखकर बताओ।

1. इसमें कितने फलक हैं। ☐
2. इसमें कितने किनारे हैं। ☐
3. इसमें कितने फलक हैं। ☐

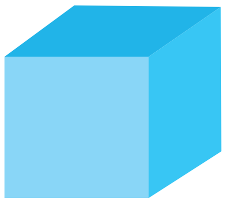
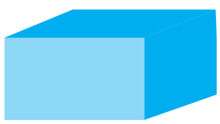
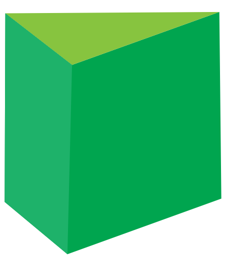
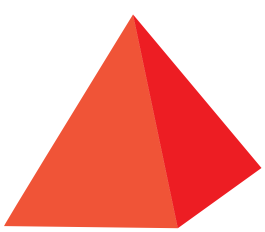
क्या आपको अपनी पुस्तक में 6 फलक, 12 किनारे, तथा 8 शीर्ष मिले? क्या आप जानते हैं कि

- बेलन, शंकु और गोले में कोई सीधा किनारा नहीं होता।
- शंकु का आधार वृत है।
- बेलन का आधार वृत है।
- बेलन का ऊपरी सिरा और आधार एक जैसे वृत होते हैं।
- गोले का कोई फलक नहीं होता।

बूझो, मैं कौन हूँ।

1. 	मैं एक ठोस आकार, मेरा न कोई फलक, न ही कोई विस्तार, न ही कोई किनारा। मैं हूँ गोल बताओ मैं कौन?	....
2. 	मैं एक ठोस आकार 6 फलक, 8 शीर्ष तथा 12 हैं किनारे, सब हैं समान आकार बताओ मैं कौन?	....
3. 	मैं एक ठोस आकार मैं हूँ गोल, गोल मेरा फलक मेरा केवल एक शीर्ष, एक गोल किनारा बताओ मैं कौन?	....

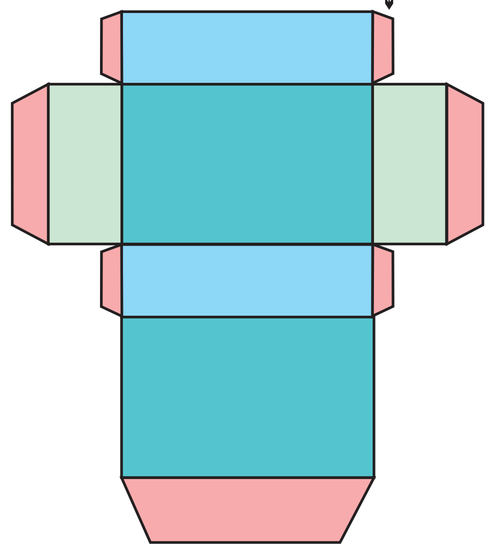
ठोस आकारों के फलक, शीर्ष तथा किनारे Box में लिखिए।

	ठोस आकार	फलक	शीर्ष	किनारे
1.				
2.				
3.				
4.				

3-D आकार बनाने के लिए जाल

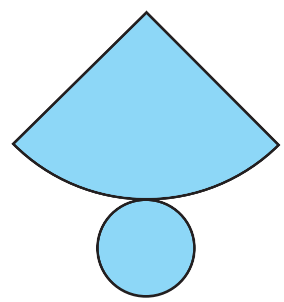
क्रियाकलाप :-

बच्चो, क्या आपने कभी टूथपेस्ट का डिब्बा, जूते का डिब्बा, खोलकर देखा है। चलो आज ऐसा करके देखते हैं। एक गत्ते का डिब्बा (box) लें। इसके किनारों को काटकर खोल लें, और जमीन पर सीधा सपाट फैला दें। कुछ इस प्रकार से



इसे हम बक्से का जाल कहते हैं। पहले यह 3-D था। परंतु खोलने पर यह सपाट हो गया, जिसे हम 2-D की तरह देख सकते हैं। यह जाल का ढांचा कहलाता है। इसे अब वापिस जोड़िए। आपको बक्सा प्राप्त होगा जो अब 3-D आकार का है। यह ठोस है।

चलो अब कोई और 3-D आकार को खोलकर देखते हैं जैसे शंकु

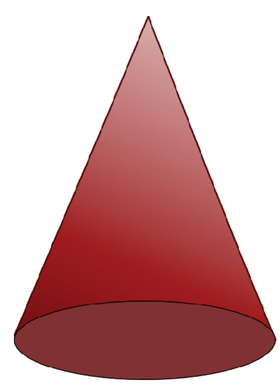


इसे इसके तिर्यक पृष्ठ की तरफ से काटकर खोलें। खोलने पर यह कुछ इस प्रकार दिखेगा।

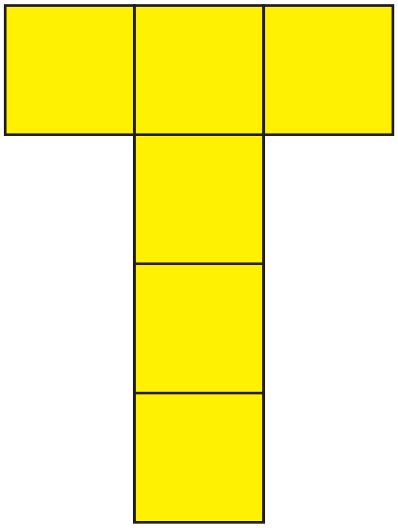
इस तरह यह अब 3-D शंकु का जाल बन गया है, जो 2-D ढाँचे के रूप में है।

ऐसे ही हम बेलनाकार 3-D को भी जाल के रूप दिखा सकते हैं।

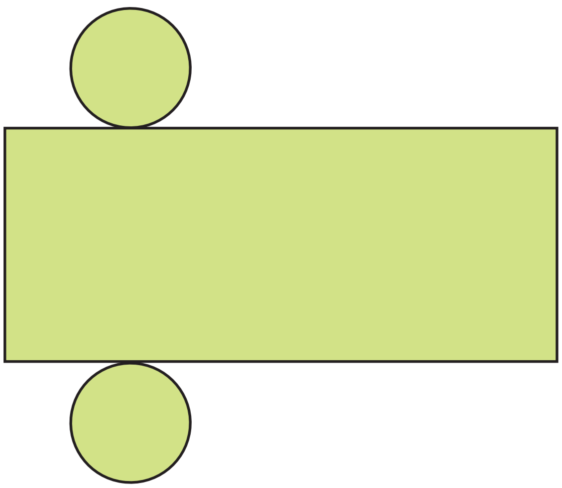
हम पाते हैं कि भिन्न-भिन्न आकारों के लिए भिन्न-भिन्न जाल होते हैं।



अगले पृष्ठ पर कुछ 3-D आकारों के जाल दिखाए गए हैं। आप इनके किनारों से मोड़कर इनका प्रतिरूप बनाइए।



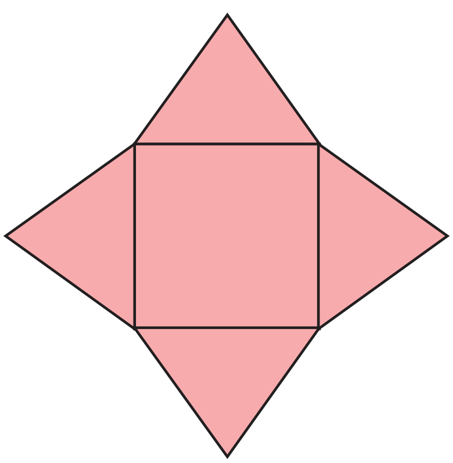
घन



बेलन

पिरामिड

पिरामिड वह बहुफलक होता है जिसका आधार एक बहुभुज होता है तथा इसके पार्श्व फलक एक शीर्ष वाले त्रिभुज होते हैं।

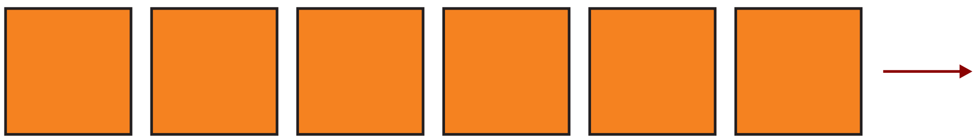


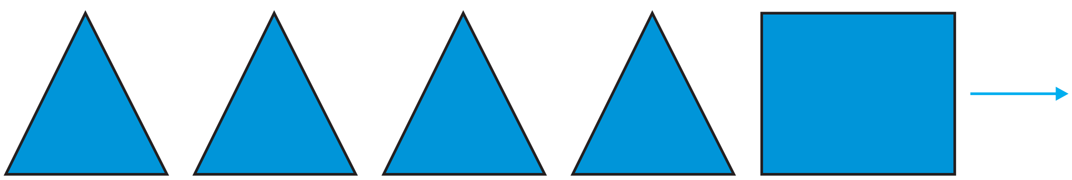
यह पिरामिड का जाल है। इसके शीर्षों को एक बिंदु पर मिलाने पर हमें पिरामिड का मॉडल प्राप्त होगा।

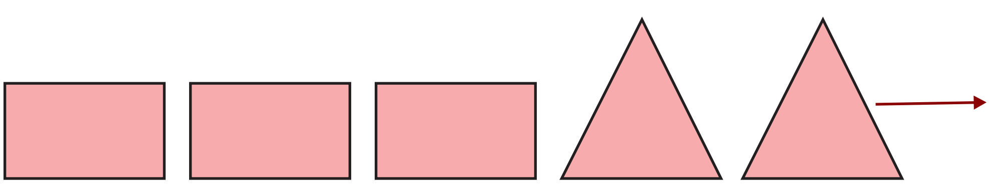
2-D आकृतियों को जोड़कर 3-D बनाना

प्रयास करें

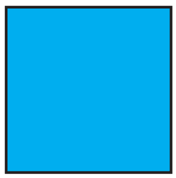
1. 

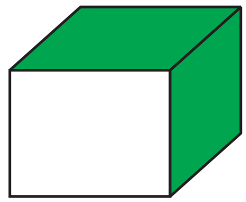
2. 

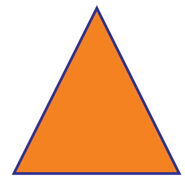
3. 

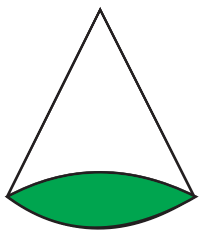
4. 

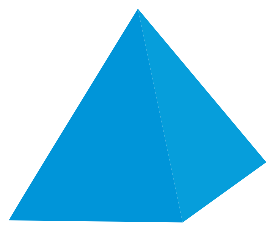
प्र.1 नीचे दिए गए चित्रों में 2-D व 3-D चित्रों की पहचान कीजिए और उनके नाम लिखिए तथा यह भी लिखिए कि ये आकृतियाँ 2D हैं या 3D ?

a) 

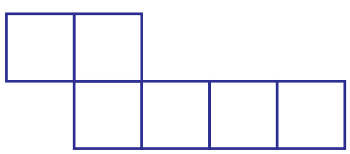
b) 

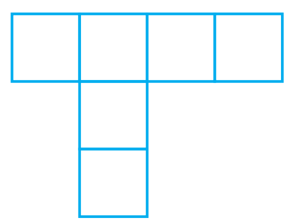
c) 

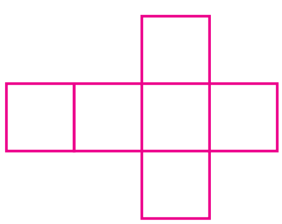
d) 

e) 

प्र.2 उन जालों को पहचानिए तथा (✓) कीजिए जिनका प्रयोग करके आप घनों को बना सकते हैं –

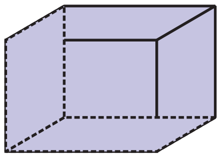
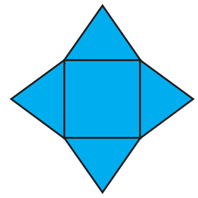
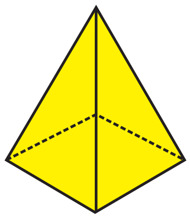
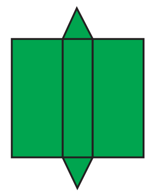
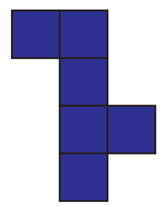
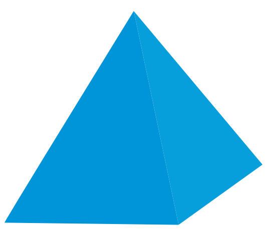
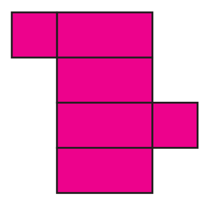
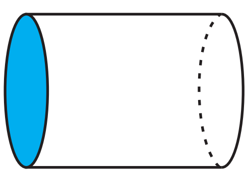
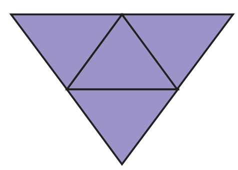
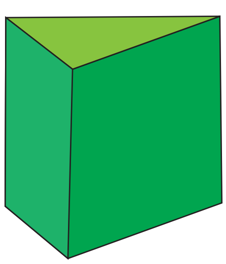
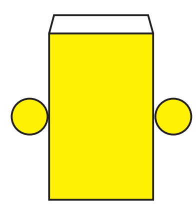
a) 

c) 

b) 

मिलान कीजिए

प्र.8 3D **(त्रिविमीय आकृति) का जाल से मिलान करें।**

(3D) **(त्रिविमीय आकृति)**		**(जाल)**	
1.		A.	
2.		B.	
3.		C.	
4.		D.	
5.		E.	
6.		F.	

बच्चो

अभी तक हमने ठोस आकारों के फलक, किनारे तथा शीर्ष की पहचान की और ठोस आकारों (3D–त्रिविमीय आकारों) के लिए जाल बनाए।

क्या आप जानते हैं?

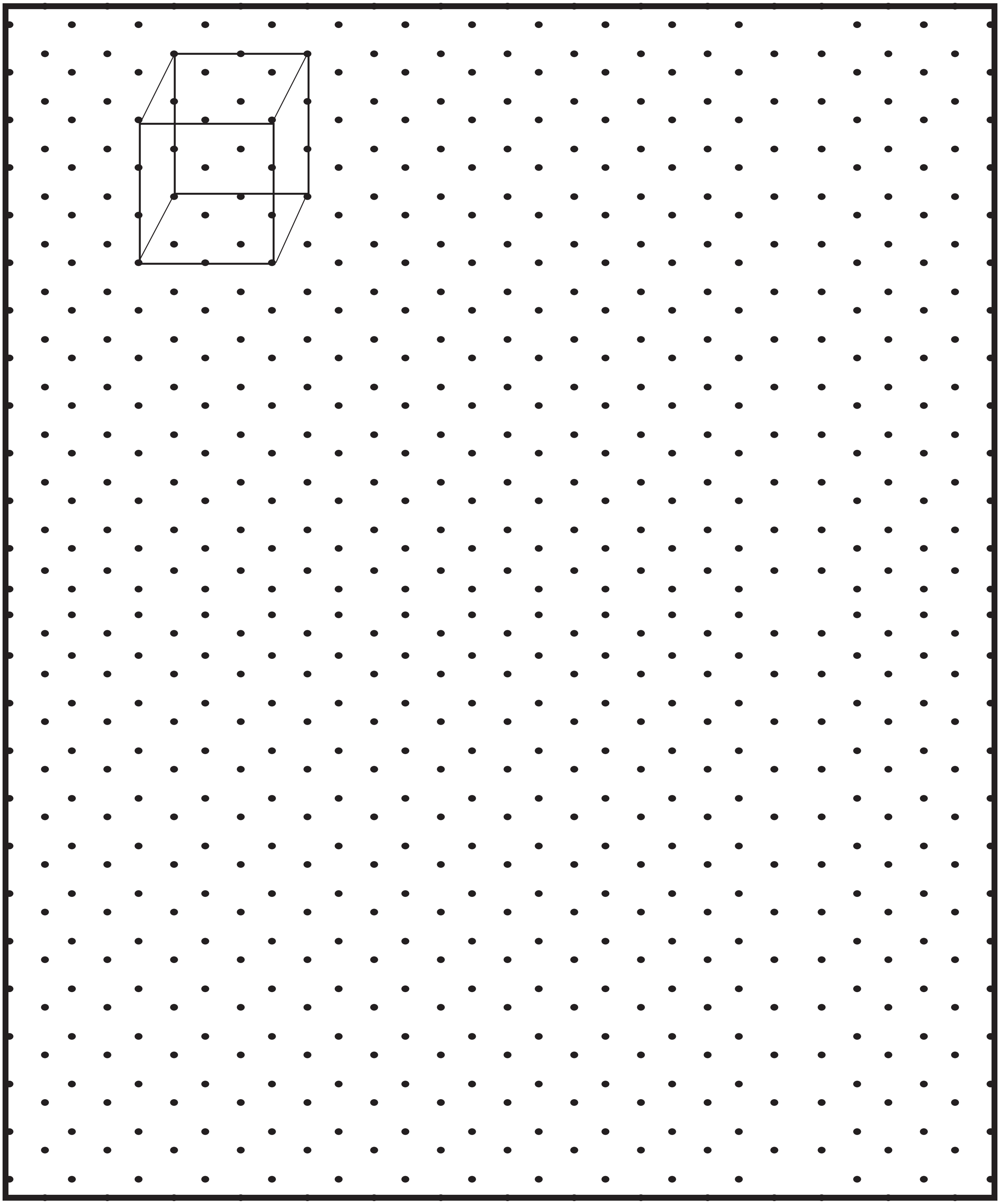
जो कुछ हमने सीखा, इससे हम अपने बहन/भाई, दोस्त तथा माता पिता के लिए गिफ़्ट बॉक्स Gift Box, Birthday Cap आदि भी बना सकते हैं।

करके देखो

1. एक गिफ़्ट बॉक्स बनाओ तथा अपने अध्यापक/अध्यापिका को दिखाओ।
2. अपने दोस्तों के लिए Birthday Cap बनाओ।

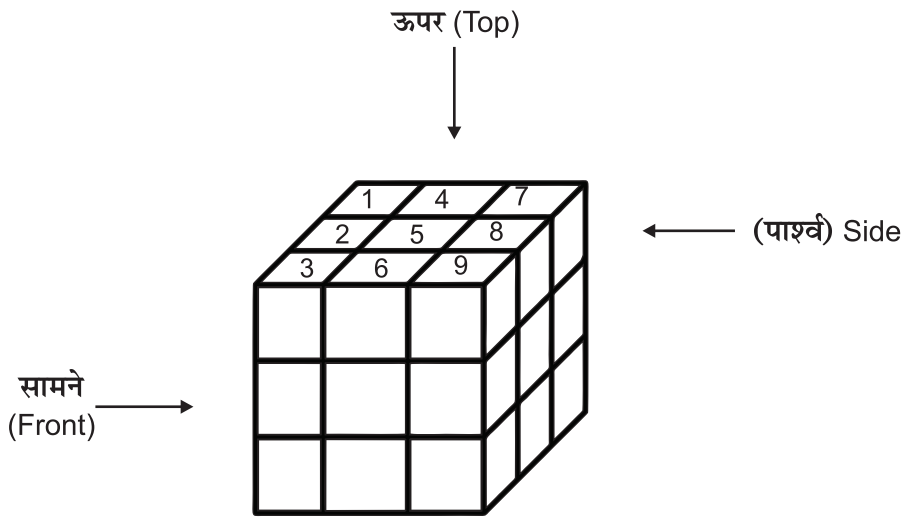
विभिन्न प्रकार की समदूरीक आकृतियाँ बनाना

घन, घनाभ पिरामिड, बेलन, प्रिज़्म के समदूरीक चित्र बनाइए।



3-D **आकारों के दृश्य**

अब हम ठोस आकारों को भिन्न-भिन्न परिपेक्षों (दृष्टियों) से देखने की कोशिश करते हैं।



आइए, गिनते हैं कि आकृति कितने घनों से मिलकर बनी है।

• ऊपर की तरफ़ कितने घन दिखाई दे रहे हैं?	
• सामने या साइड से देखें तो क्या पता लगता है कि घन के ऊपर घन कितनी बार रखे गए हैं?	
• कुल कितने घन हुए?	**27**
• क्या हम चित्र में सभी 27 घन देख पा रहे हैं?	**हाँ/नहीं**

नहीं!

तो इसका मतलब है कि हम ठोस आकारों का पूरे परिपेक्षों में एक तरफ़ से नहीं देख पाते हैं। क्योंकि उनमें तीन विमाएँ होती हैं।

इन्हें देखने के लिए तीन तरीकों का इस्तेमाल करते हैं।

1. ठोस के विभिन्न भागों में काटकर दिखाना (Cutting & Slicing)
2. छाया खेल (Shadow)
3. कोण से देखना (Looking from certain Angle)

जैसे सामने से (Front View), ऊपर से (Top View) या एक तरफ़ से (Side View)

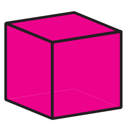
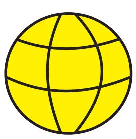
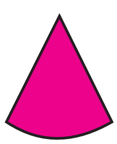
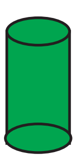
Cutting - Slicing **(काटकर देखना)**

किसी ब्रेड के कई Slice करने पर Slice का आकार वर्ग होगा। जिसे हम ठोस आकृति की अनुप्रस्थ काट कहते हैं।

अनुप्रस्थ काट को दो प्रकार से किया जा सकता है।

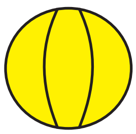
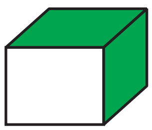
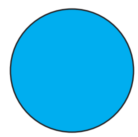
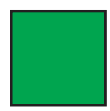
1. ऊर्ध्वाधर रूप (Vertically)
2. क्षैतिज रूप (Horizontally)

निम्न ठोस आकारों को Vertical और Horizontal काटने के बाद प्राप्त आकार का नाम लिखिए।

ठोस आकार	**उर्ध्वाधर**	**क्षैतिज**
1. 	**वर्ग**	....
2. 	**वर्ग**	**आयत**
3. 	**वृत**	....
4. 	....	....
5. 	....	....

छाया खेल

ठोस आकारों की छाया को देखकर भी हम 2D तथा 3D का संबंध समझ सकते हैं। यदि हम प्रकाश के स्रोत के रास्ते में कोई ठोस आकार रखते हैं तो उसकी छाया तल आकृति जैसी होती है।
मिलान कीजिए :- ठोस आकार - छाया (Shadow)

ठोस आकार/आकार का नाम			छाया/आकृति का नाम		
1.		**गोला**	A		**आयत**
2.		**घन**	B		**वृत**
3.		**घनाभ**	C		**वर्ग**

3-D **आकारों के दृश्य**

ठोस आकारों या वस्तुओं को हम भिन्न कोणों पर खड़े होकर देख सकते हैं।

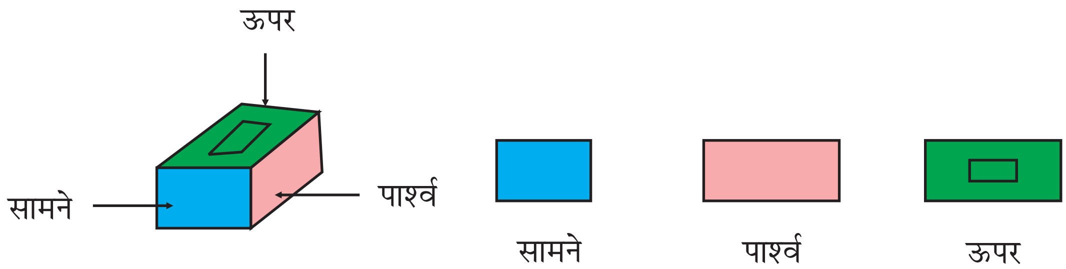
वस्तु

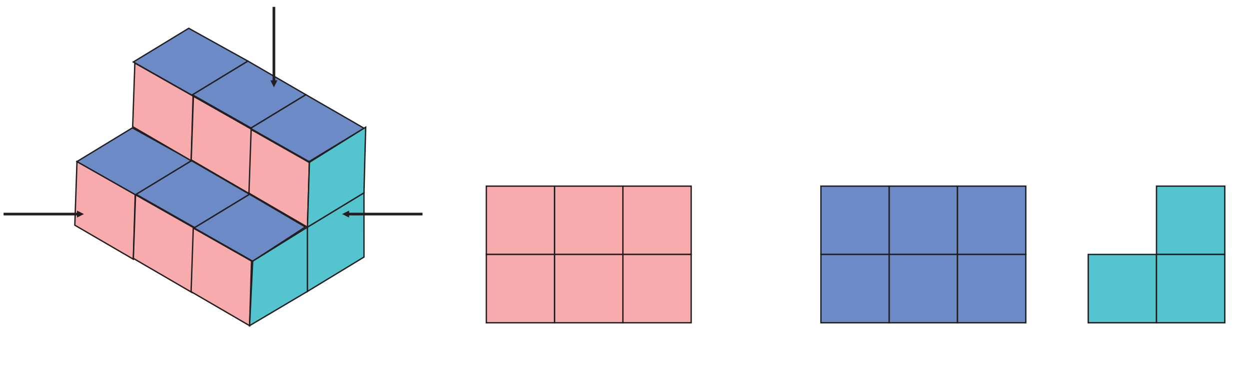
सामने से
Front View

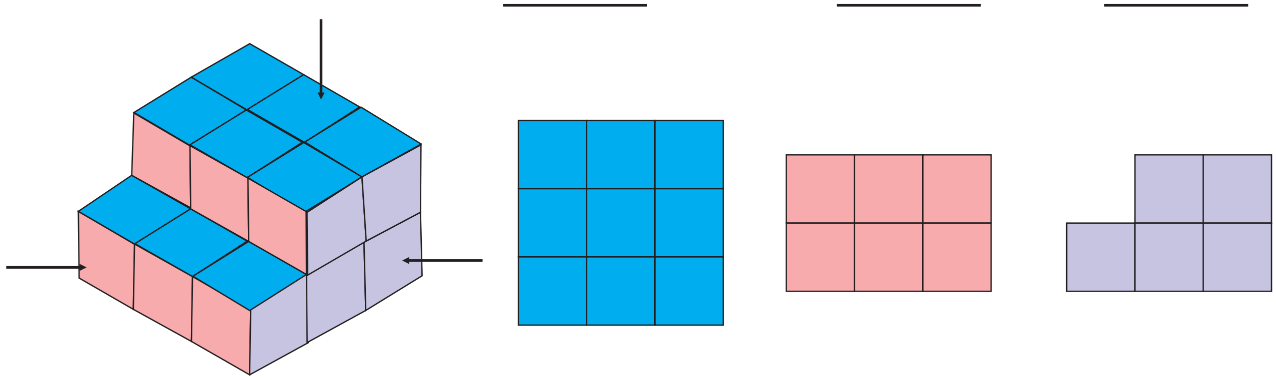
ऊपर से
Top View

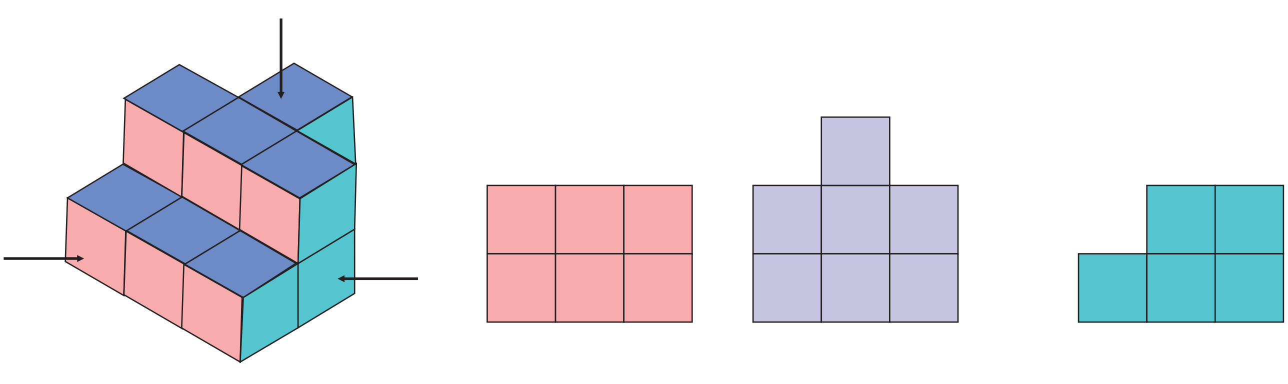
एक तरफ़ से
(पार्श्व)
Side View

दृश्यों को अंकित कीजिए- (सामने/पार्श्व/ऊपर)

1.


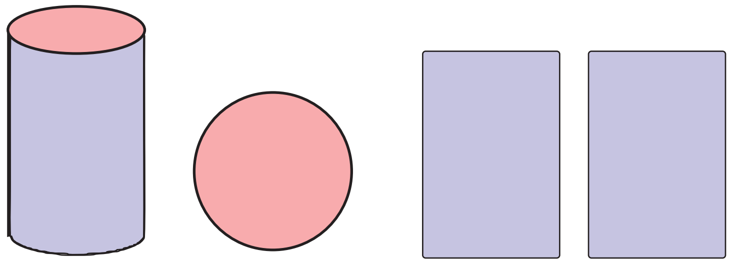
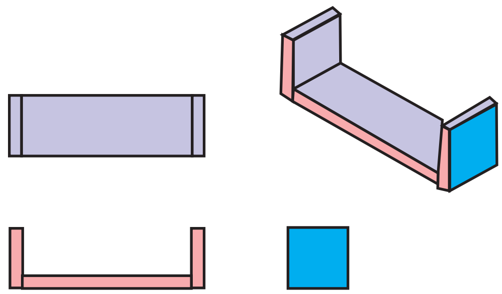
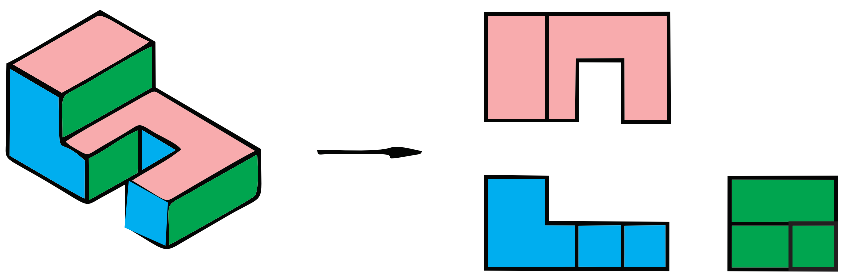
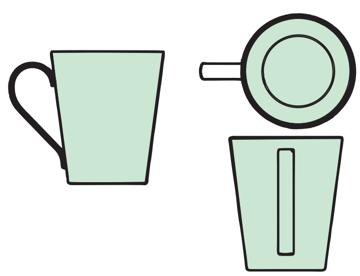
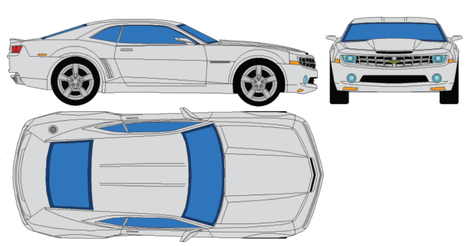
2.


3.


4.


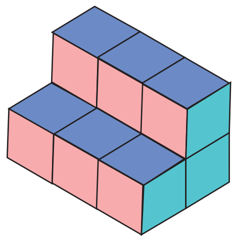
प्रत्येक वस्तु के लिए दिए गए दृश्य का नाम लिखिए।

त्रिविमीय वस्तुएँ (3D) विभिन्न परिपेक्षों से भिन्न-भिन्न रूप में दिखाई दे सकती हैं। इसलिए इनको विभिन्न परिपेक्षों (दृष्टियों) से खींचा जा सकता है।

1.		बेलन
2.		बेंच
3.		बेंच
4.		कप
5.		कार

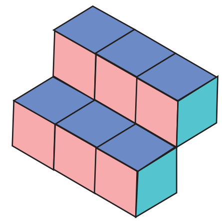
निम्न ठोस आकारों के सामने, पार्श्व और ऊपर के दृश्य बनाइए।

1.



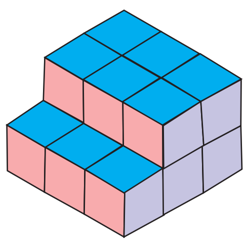
सामने	ऊपर	पार्श्व

2.



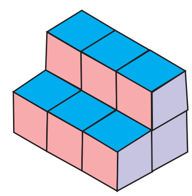
सामने	ऊपर	पार्श्व

3.



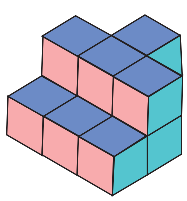
सामने	ऊपर	पार्श्व

4.



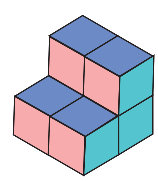
सामने	ऊपर	पार्श्व

5



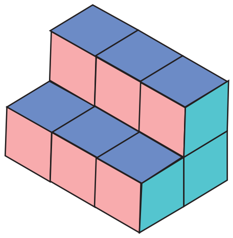
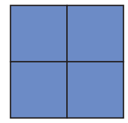
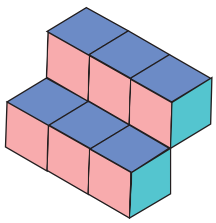
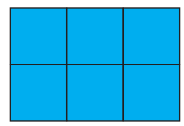
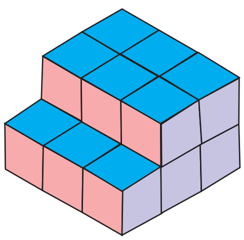
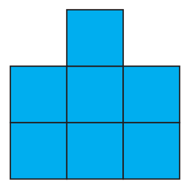
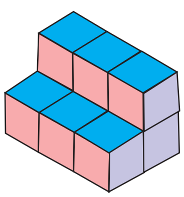
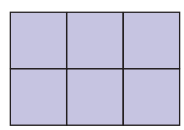
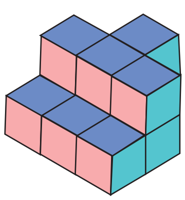
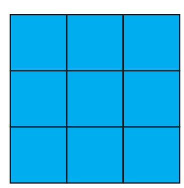
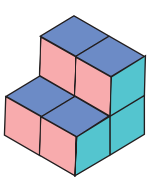
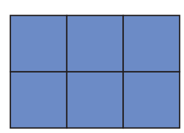
सामने	ऊपर	पार्श्व

6.



सामने	ऊपर	पार्श्व

मिलान कीजिए

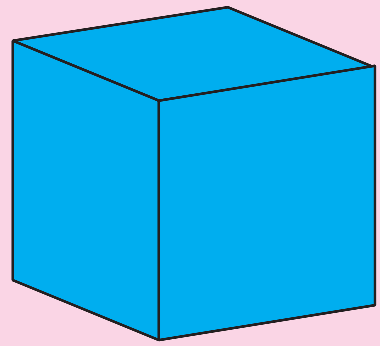
	ठोस आकार		ऊपर से दृश्य
1.		A	
2.		B	
3.		C	
4.		D	
5.		E	
6.		F	

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

अब तक हमने सीखा

1. तल आकृतियाँ तथा ठोस आकारों का संबंध।

2. लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई की विमाएँ (2D तथा 3D)।



3. फलक, किनारे तथा शीर्ष की पहचान।

4. 3D आकारों को बनाने के जाल।

5. ठोस आकारों को देखने के तरीके।
   (a) ठोस को काटकर देखना
   (b) छाया खेल
   (c) सामने से, ऊपर से तथा पार्श्व दृश्य
   (भिन्न-भिन्न स्थानों से 3D वस्तुओं के भिन्न-भिन्न दृश्य मिलते हैं।)
6. विभिन्न ठोस आकार जैसे गोला, घन, घनाभ, बेलन, शंकु को अपने आसपास के परिवेश में पहचान कर बताना।
7. दैनिक जीवन में ठोस आकारों के उदाहरण एवम् उनके बारे में विस्तृत रूप में बताना।

नोट्स

नोट्स

नोट्स