

प्रगति-5

2018-2019

गणित

कक्षा VIII



बिक्री के लिए नहीं



स्वाध्यायान्मा प्रमदः
राज्य शैक्षिक अनुसंधान
एवं प्रशिक्षण परिषद्

सौजन्य से
दिल्ली पुस्तक ब्यूरो



शिक्षा निदेशालय
रा.रा.क्षे., दिल्ली सरकार

उत्पादन मंडल

अनिल कुमार शर्मा
दीपक तंवर

दिल्ली पाठ्य पुस्तक ब्यूरो में अनिल कौशल, सचिव, दिल्ली पाठ्य पुस्तक ब्यूरो, 25/2 पंखा रोड़, संस्थानीय क्षेत्र, नई दिल्ली द्वारा प्रकाशित तथा सुप्रीम ऑफसेट, 133, उधोग केन्द्र, एक्सटेंशन-1 ग्रेटर नोएडा, उ0प्र0 द्वारा मुद्रित।

Reviewed by :-

Dr. Anil Teotia, Principal, DIET Dilshad Garden

Editorial Group of Mentor Teachers :

1.	Dr. Ashok Kumar Tiwari	(19900432)	SBV C. C. Colony
2.	Mr. Rakesh Gujral	(20050846)	GSBV Ramesh Nagar
3.	Dr. Sushma Singh	(19930796)	SKV Pooth Kala, Sector-20, Rohini Extn
4.	Ms. Sunila Bhatia	(19930502)	VSSKV No. 1, Kalkaji
5.	Mr. Devender Kumar Juneja	(19875169)	GBSSS No. 1, Shakti Nagar
6.	Mr. Mukesh Jain	(20102389)	GBSSS No. 1, Punjabi Bagh
7.	Ms. Neeta Rani	(20130835)	S Co.Ed. Mangolpuri, C-Block
8.	Ms. Preeti Nanda	(19960587)	SV, Sector-6, Rohini
9.	Ms. Punam Sardana	(20036698)	RPVV, BT Block, Shalimar Bagh
10.	Mr. Rajeev Rattan	(19910068)	RSBV No.4, Roop Nagar
11.	Ms. Shalini Bahri	(20111699)	SKV No. 1, Narela
12.	Ms. Vandana Arora	(20050187)	GGSSS No.3, Badarpur
13.	Ms. Vilakshna	(20081060)	SKV Sector-20, Rohini Extn
14.	Ms. Vinod Bala	(20072429)	GGSSS, Sec-3, Dwarka
15.	Ms. Jaspal Kaur	(20100095)	SKV Prahladpur
16.	Ms. Amita Sharma	(BRP)	SSA
17.	Ms. Alpna Chaterjee	(BRP)	SSA

दिल्ली पाठ्य पुस्तक ब्यूरो में अनिल कौशल, सचिव, दिल्ली पाठ्य पुस्तक ब्यूरो, 25/2 पंखा रोड, संस्थानीय क्षेत्र,
नई दिल्ली द्वारा प्रकाशित तथा सुप्रीम ऑफसेट, 133, उद्योग केन्द्र, एक्सटेंशन-1 ग्रेटर नोएडा, उ0प्र0 द्वारा मुद्रित।

आमुख

शिक्षा निदेशालय, दिल्ली द्वारा चलाए गए मिशन बुनियाद के दौरान अध्यापकों तथा अभिभावकों द्वारा बच्चों की बुनियादी गणितीय अवधारणाओं की नींव मजबूत की है। इस मिशन के दौरान बच्चों की गणितीय अवधारणाओं की समझ विकसित करने के लिए प्रतिदिन अध्यापकों द्वारा गणित संबंधित बातचीत, संख्या संबंधित गतिविधियाँ, शाब्दिक सवालों पर बातचीत एवं औपचारिक रूप से गणितीय संक्रियाएँ तथा अन्य दक्षताओं जैसे – मापन और अनुमान, आकृतियों से परिचय, और बराबर भागों में बाँटना आदि पर कार्य किया गया।

हम आशा करते हैं कि हमारे नव निष्ठा एवं निष्ठा समूहों के बच्चे चार अंकों तक की संख्याओं पर संक्रियाएँ करना सीख चुके हैं। वे निश्चय ही द्विविमीय आकृतियों, आँकड़ों, मुद्रा, परिमाप आदि के बारे में अपनी समझ बनाने में कामयाब हुए होंगे।

बातचीत करने पर वे हमें बता पाएँगे कि विद्यालय, बाजार, गाँव, मेला, परिवार इत्यादि में हमें गणित कहाँ–कहाँ नज़र आता है। अब गणितीय अवधारणाओं पर बातचीत करते हुए वे झिझकेंगे नहीं, आत्मविश्वास के साथ बोल सकेंगे। और हम उनकी तर्क–वितर्क की क्षमता को बढ़ाने में उनका सहयोग कर पाएँगे। गणित की साधारण संक्रियाएँ जैसे जोड़, घटा, गुणा और भाग में कठिनाई महसूस नहीं करेंगे।

‘कमाल’ (Combined Activities for Maximized Learning) तकनीक का प्रयोग मिशन बुनियाद के दौरान बच्चों की आधारभूत क्षमताओं जैसे सुनना, बोलना, पढ़ना, करना और लिखना आदि को मजबूती देने के लिए किया गया। इससे बच्चों में जो क्षमता विकसित हुई, उससे उनकी कक्षा में भागीदारी बढ़ेगी। अर्थात् जो वे सुनेंगे, उसके बारे में बोल सकेंगे। जो बोलेंगे उसे खुद कर पाएँगे। जो करेंगे उसे लिख पाएँगे। जो लिखेंगे उसे पढ़ पाएँगे। इन सभी क्रियाओं के क्रम में वे बदलाव भी कर पाएँगे।

‘कमाल’ के अंतर्गत हम आसान से मुश्किल, मूर्त से अमूर्त, सरल से जटिल और परिचित से अपरिचित की तरफ अग्रसर होते हैं। लगभग यही अप्रोच प्रगति–5 में प्रयोग की गई है ताकि हम बच्चों की काबिलियत पर विश्वास रखते हुए उन्हें स्वयं सीखने का आनंद लेने देंगे।

प्रगति–3 एवं प्रगति–4 की मुख्य सामग्री (Content) को एक ही पुस्तक में समाहित करके प्रगति–5 के रूप में प्रस्तुत किया गया है।

कक्षा VIII में भी कुछ अध्यायों जैसे राशियों की तुलना (अध्याय–8) तथा गुणनखंड (अध्याय–14) आदि को प्रगति–5 में शामिल नहीं किया गया है। यदि अध्यापक/ अध्यापिका इन अध्यायों को पढ़ाना चाहते हैं तो NCERT से यह अध्याय पढ़ाए जा सकते हैं।

गणित में 'रोल प्ले' का इस्तेमाल करते हुए प्रगति के कई अध्यायों में 'रोल प्ले' दिए गए हैं। किसी भी विषय या प्रसंग को शुरू करने से पहले उसके बारे में संक्षिप्त नाट्य प्रस्तुति अगर हम देखते हैं तो वह हम सबको बाँधती है। और इससे विषय पर आना और उसके बारे में अवधारणा को स्पष्ट करना अपेक्षाकृत आसान तो हो ही जाता है, बल्कि वह बच्चों के साथ सीधे-सीधे जुड़ता भी है। इस तरह गणित शिक्षण में 'थियेटर इन एजुकेशन' की शिक्षण शास्त्रीय रणनीति को अच्छे से अपनाया जाय तो गणित शिक्षण को और रुचिकर बनाया जा सकता है। इसके चलते गणित के प्रति छात्रों के अंदर की तमाम भ्रांतियों को तोड़ा जा सकता है कि गणित मुश्किल है, उबाऊ है, डराऊ है – बगैरा बगैरा। 'रोल प्ले' उसी का एक अंग है। प्रगति में दिए गए 'रोल प्लेज़' को बच्चों के साथ मिलकर खेला जाना चाहिए। अगर इन सभी गतिविधियों में शिक्षक की सक्रिय भागीदारी संभव हो पाए तो बेहतर हो।

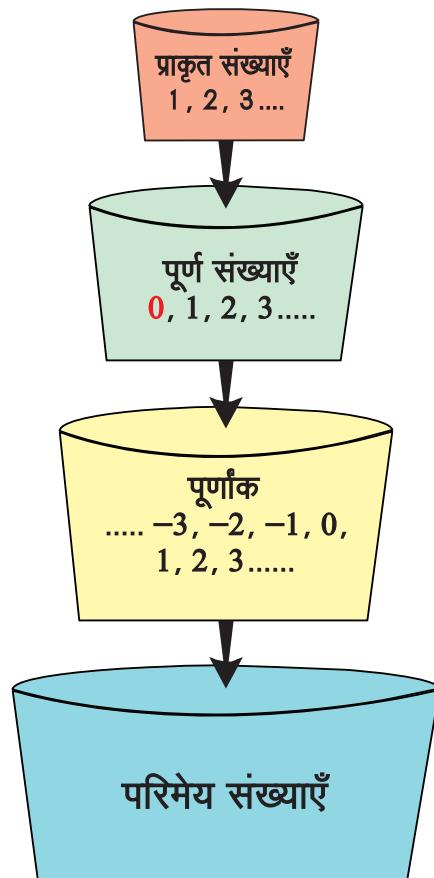
हम सभी शिक्षक अगर सुझाए गए 'रोल प्ले' का इस्तेमाल ही करें, ये ज़रूरी नहीं हैं। इसके लिए शिक्षक को संपूर्ण स्वायत्तता है कि वह अपने अनुसार काम करे। इसके अंदर इंप्रोवाइज़ेशन की पूरी छूट है, बशर्ते ये इंप्रोवाइज़ेशन शिक्षक की देख-रेख में हों। इंप्रोवाइज़ेशन में हम बच्चों को खेलने के लिए कोई स्थिति देते हैं, जिसे बच्चे अपने अनुभव और शिक्षक के निर्देशन के अनुसार खेलते हैं। ये स्थितियाँ छात्रों की रोज़मरा की ज़िंदगी से जुड़ी हों तो बेहतर है। हमारी कोशिश हो कि कक्षा के ज़्यादातर बच्चों को इसमें शरीक कर पाएँ। उनकी सहभागिता पूरी गतिविधि को जीवंत बना देगी। इसके लिए हम कक्षा के छात्रों के चार से पांच ग्रुप बना सकते हैं। सभी ग्रुप 'रोल प्ले' को अपने—अपने हिसाब से खेलेंगे। हाँ, इस बात का ध्यान रहे कि जब एक ग्रुप अपनी प्रस्तुति दे रहा हो, तो बाकी सभी ग्रुप उस प्रस्तुति को ध्यान से देखें। और उसके बारे में जो भी उनकी राय बने, उसे कापी के अंदर नोट कर लें। ताकि प्रस्तुतियों के बाद जब सभी प्रस्तुतियों की मूल्यांकन प्रक्रिया करें तो उन राय और मशविरों को सबके सामने रखा जाय। सुधार की हर संभावना का स्वागत किया जाय।

प्रगति पर आपके सुझाव निश्चय ही अगले अंकों को बेहतर बनाने में सहयोग देंगे।

विषय सूची

1.	परिमेय संख्याएँ	1-20
2.	एक चर वाले रैखिक समीकरण	21-39
3.	चतुर्भुजों को समझना	40-65
4.	वर्ग और वर्गमूल	66-83
5.	घन और घनमूल	84-91
6.	आँकड़ों का प्रबंधन	92-108
7.	बीजीय व्यंजक एवं सर्वसमिकाएँ	109-126
8.	क्षेत्रमिति	127-141
9.	घातांक और घात	142-154
10.	सीधा और प्रतिलोम अनुपात	155-180
11.	आलेखों से परिचय	181-193
	आओ खेलें 1 व 2	192-193

अध्याय - 1 परिमेय संख्याएँ



संजना अपने भाई-बहनों से संख्या पद्धति पर कुछ बातचीत कर रही है।
आइए हम उनकी बातचीत में भागीदारी करते हैं।

रीना

दीदी, शुरूआत में हमने वस्तुओं को गिनने के लिए संख्याओं का प्रयोग किया, जिसे हमने प्राकृत संख्याएँ नाम दिया जैसे 1, 2, 3, 4, 5

गोलू

दीदी, गिनती तो 1 से ही शुरू होती है, लेकिन जब हम प्राकृत संख्याओं में '0' को मिला देते हैं तो हमें पूर्ण संख्याएँ प्राप्त होती हैं।
0, 1, 2, 3, 4, 5

रीना

भैया पूर्ण संख्याओं के बाद हम पूर्णांक पर पहुँचे। पूर्ण संख्याओं में प्राकृत संख्याओं के ऋणात्मकों को शामिल किया गया जिसे पूर्णांक कहा गया जैसे -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3

संजना

जब हम किसी पूर्णांक को अन्य पूर्णांक से भाग करते हैं तब हमें कैसी संख्याएँ प्राप्त होती हैं?

गोलू

जब हमने पूर्णांकों के बीच में भाग की संक्रिया की,
तब हमें कुछ संख्याएँ ऐसी भी प्राप्त हुईं जो
पूर्णांक नहीं थीं जैसे $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{3}$ आदि

रीना

भैया, ऐसी संख्याओं को
परिमेय संख्या भी कहा जाता है
जिन्हें पूर्णांकों की मदद
द्वारा लिखा जाता है।

रीना

भैया $Q = 0$
क्यों नहीं हो सकता ?

गोलू

हाँ। बिल्कुल सही रीना, मगर
ध्यान रहे कि परिमेय संख्या में कभी भी हर
वाला पूर्णांक '0' नहीं होता है।
हम परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप
में दिखा सकते हैं जहाँ p और q पूर्णांक हैं,
लेकिन q का मान '0' नहीं होगा।

आप भी रीना द्वारा पूछे गए प्रश्न पर विचार कीजिए तथा अपने
अध्यापक व साथियों के साथ इसकी चर्चा कीजिए।

आओ करके देखें।

- a) $-3 + 5 = \underline{\hspace{2cm}}$
- b) $4 + 6 = \underline{\hspace{2cm}}$
- c) $5 - 9 = \underline{\hspace{2cm}}$
- d) $0 + 6 = \underline{\hspace{2cm}}$
- e) $-1 + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$
- f) $-2 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$
- g) $4 \times -7 = \underline{\hspace{2cm}}$
- h) $8 \div -2 = \underline{\hspace{2cm}}$
- i) $5 \div 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

आइए परिमेय संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक व प्राकृत संख्याओं में संबंध को समझते हैं।

$$1, 3, -5, \frac{-3}{4}, \frac{8}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, 3, 6, -8$$

$$1, 3, -5, \cancel{\frac{-3}{4}}, \frac{5}{7}, 18, -6$$

$$-8, \frac{4}{9}, \frac{-3}{2}, 8, 13, 25, -4, \frac{-3}{5}$$

दिए गए संख्या समूह में से संख्याएँ देखकर नीचे दिए गए समूहों में लिखिए।

प्राकृत संख्या समूह

पूर्ण संख्या समूह

पूर्णांक संख्या समूह

परिमेय संख्या समूह

आइए अब कुछ प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयास करें।

प्र० क) क्या 0 प्राकृत संख्या है? ----- (हाँ/नहीं)

प्र० ख) क्या $\frac{3}{4}$ पूर्णांक है? ----- (हाँ/नहीं)

प्र० ग) क्या 3 पूर्ण संख्या है? ----- (हाँ/नहीं)

प्र० घ) क्या -16 पूर्णांक है? ----- (हाँ/नहीं)

प्र० झ) क्या 2 एक परिमेय संख्या है? ----- (हाँ/नहीं)

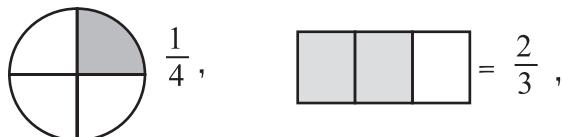
प्र० च) क्या $\frac{3}{5}$ एक संख्या है?

आइए देखते हैं कि हमें परिमेय संख्याएँ कैसे—कैसे प्राप्त हो सकती हैं।

1. पूर्णांकों को एक दूसरे से भाग करके जैसे $4 \div 7 = \frac{4}{7}$, $-3 \div 2 = \frac{-3}{2}$,

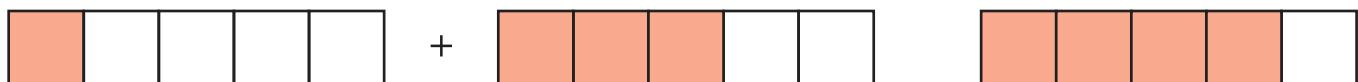
2. संख्याओं के अनुपात से $4 : 7 = \frac{4}{7}$, $3 : 2 = \frac{3}{2}$,

3. संपूर्ण के अंश भाग द्वारा



समान हर वाली परिमेय संख्याओं का जोड़ व घटाव

(1) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$



(2) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

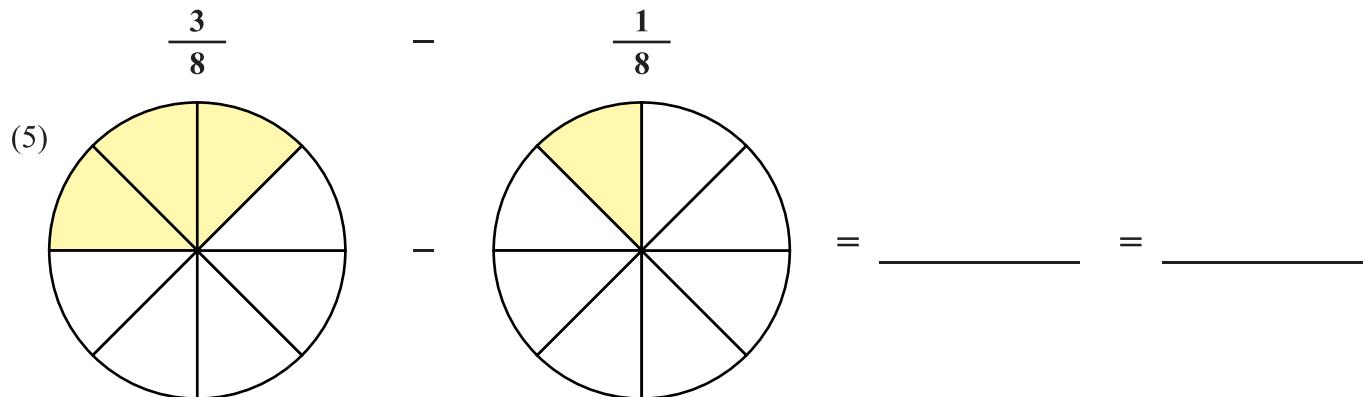
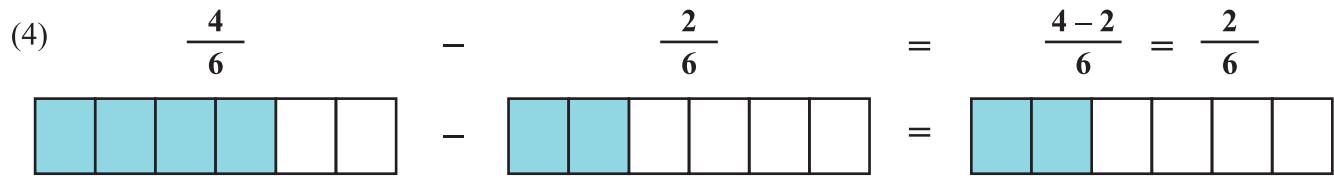


हमने देखा कि समान हर वाली परिमेय संख्याओं को जोड़ने के लिए उनके अंशों को ही जोड़ना पड़ता है तथा हर समान ही रहता है।

(3) $\frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8}$



(यहाँ 4 बराबर भागों में से एक बराबर भाग घटाने के बाद हमारे पास 3 ही भाग शेष हैं, एक पूर्ण के बराबर भागों में से 3 भाग)



हल कीजिए:-

(1) $\frac{8}{9} + \frac{3}{9} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\frac{12}{19} - \frac{6}{19} = \underline{\hspace{2cm}}$

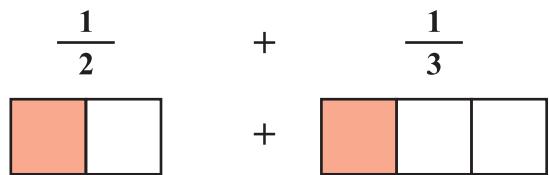
(2) $\frac{6}{17} + \frac{4}{17} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $\frac{17}{5} - \frac{6}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$

यहाँ अध्यापक मिश्रित भिन्न में बदलने पर चर्चा कर सकते हैं।

असमान हर वाली परिमेय संख्याओं का जोड़ व घटाव

उदाहरण:-



यहाँ दोनों आकृतियों में बराबर भाग नहीं हैं इसलिए हम इन्हें जोड़ नहीं पाएँगे।

आइए इन्हें जोड़ने के लिए आकृतियों को बराबर भागों में बाँटते हैं।

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

इसी प्रकार घटाने के लिए भी हर को समान बनाएँगे। जैसे:-

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

हल कीजिए:-

(1) $\frac{4}{5} + \frac{3}{10} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$

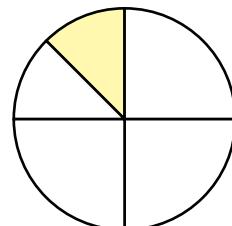
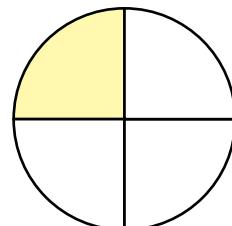
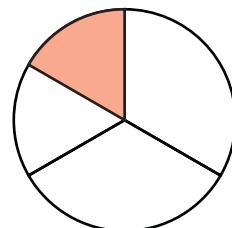
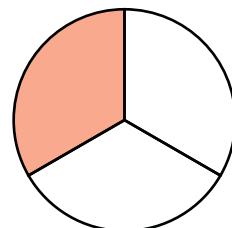
परिमेय संख्याओं का गुणन

उदाहरणः— $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

आइए इस स्थिति को समझते हैंः—

(a) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ का $\frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{6}$

(b) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ का $\frac{1}{2}$
 $= \underline{\hspace{2cm}}$



इस प्रकार हम देखते हैं कि परिमेय संख्याओं के गुणन में अंश, अंश से तथा हर, हर से गुणा होता है।

गुणन कीजिएः—

(1) $\frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\frac{1}{9} \times \frac{5}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $\frac{1}{5} \times \frac{2}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$

गुणन को सरलतम रूप में लिखना:-

उदारहणः—

(a) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{6} = \frac{2 \times 4}{3 \times 6} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

या

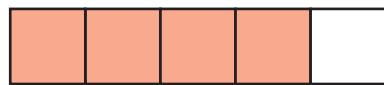
$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{6} = \frac{1 \cancel{2} \times 4}{3 \times \cancel{6}} = \frac{1 \times 4}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$$

(b) $\frac{4}{9} \times \frac{12}{6} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

परिमेय संख्याओं का भाग

आइए उदाहरण से समझते हैं—

हम $\frac{4}{5} \div 2$ करना चाहते हैं।



यहाँ $\frac{4}{5}$, छायांकित भागों को 2 बराबर भागों में बाँटना है—

$$\frac{4}{5} \div 2 = 4 \times \frac{1}{5} \div 2 = \frac{4}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{4 \times 1}{5 \times 2}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{Orange} & \text{Orange} & \text{White} & \text{White} & \text{White} \\ \hline \end{array} \\
 &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{2 \times 1}{5 \times 1} = \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{5} \div 2 &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

यहाँ हमने $\frac{4}{5}$ को $\frac{2}{1}$ के व्युत्क्रम से गुणा किया है।

परिमेय संख्याओं को भाग करने के लिए पहली परिमेय संख्या को भाजक परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।

हल कीजिए:-

(1) $\frac{2}{6} \div \frac{4}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\frac{4}{3} \div \frac{7}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$

योग के अंतर्गत संवृत्तता

दो परिमेय संख्याओं का योग
तालिका को पूरा कीजिए।

परिमेय संख्या + परिमेय संख्या = प्राप्त योग (परिमेय संख्या है या नहीं है)

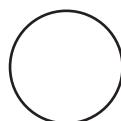
a) $\frac{2}{3}$ + $\frac{5}{3}$ = $\frac{7}{3}$ (परिमेय संख्या है)

b) _____ + 0 = _____ _____

c) _____ + _____ = _____ _____

प्र० क्या ऐसी कोई दो परिमेय संख्याएँ हैं जिनके योग से प्राप्त संख्या परिमेय संख्या नहीं है? सोचिए और उत्तर दीजिए।
उ०

परिमेय संख्याएँ, योग के लिए संवृत्त हैं।



दो परिमेय संख्याओं का घटाव

तालिका को पूरा कीजिए।

परिमेय संख्या - परिमेय संख्या = प्राप्त संख्या (परिमेय संख्या है या नहीं है)

a) $\frac{2}{3}$ - $\frac{5}{3}$ = $-\frac{3}{3}$ (परिमेय संख्या है)

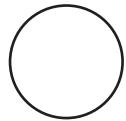
c) _____ - 0 = _____ _____

d) _____ - _____ = _____ _____

प्र० क्या ऐसी कोई दो परिमेय संख्याएँ हैं जिनके घटाव से प्राप्त संख्या परिमेय संख्या नहीं है? सोचिए और उत्तर दीजिए।

उ०

परिमेय संख्याएँ, घटाव के लिए संवृत्त हैं।



दो परिमेय संख्याओं का गुणन

तालिका को पूरा कीजिए।

परिमेय संख्या \times परिमेय संख्या = गुणनफल (परिमेय संख्या है या नहीं है)

a) $\frac{2}{3}$ \times $\frac{5}{3}$ = $\frac{10}{9}$ परिमेय संख्या है

b) _____ \times 0 = _____

c) _____ \times _____ = _____

प्र० क्या ऐसी कोई दो परिमेय संख्याएँ हैं जिनके गुणा से प्राप्त संख्या परिमेय संख्या नहीं है? सोचिए और उत्तर दीजिए।

उ०

परिमेय संख्याएँ, गुणन के लिए संवृत्त हैं।



दो परिमेय संख्याओं का भाग

परिमेय संख्या \div परिमेय संख्या = भागफल (परिमेय संख्या है या नहीं है)

a) $\frac{2}{3}$ \div $\frac{5}{3}$ = $\frac{2}{5}$ (परिमेय संख्या है)

b) $\frac{1}{5}$ \div $\frac{4}{5}$ = _____

c) 2 \div 0 = _____

परिमेय संख्याएँ, भाग के लिए संवृत्त नहीं हैं।



क्रमविनिमेयता का गुण (Commutative law)

क्रमविनिमेय \rightarrow क्रम + विनिमेय
क्रम बदलना

(क्रम बदलने पर भी समान प्रभाव का होना)

परिमेय संख्याओं के लिए योग की क्रमविनिमेयता

कोई भी दो परिमेय संख्या लीजिए

योग कीजिए

योगपफल

क्रम बदलकर योग

योगपफल

a) $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

b) $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \underline{\underline{}}$$

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \underline{\underline{}}$$

परिमेय संख्याओं के लिए घटाव की क्रमविनिमेयता

c) $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{3} = \boxed{\frac{-3}{3}} = -1$$

$$\frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{3}{3}} = 1$$

परिमेय संख्याओं के लिए गुणन की क्रमविनिमियता

d) $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$$

$$\frac{5}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

परिमेय संख्याओं के लिए भाग की क्रमविनिमेयता

e) $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{3} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

$$\frac{5}{3} \div \frac{2}{3} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

निम्नलिखित वाक्यों को पढ़कर सही बाक्स पर (✓) अथवा (✗) का निशान लगाये।

परिमेय संख्याओं का क्रम बदलकर जोड़ने पर भी उनका योगफल समान रहता है।



परिमेय संख्याओं का क्रम बदलकर घटाने पर भी उनका घटाव समान रहता है।



परिमेय संख्याओं का क्रम बदलकर गुणन करने पर भी उनका गुणनफल समान रहता है।



परिमेय संख्याओं का क्रम बदलकर भाग करने पर भी उनका भागफल समान रहता है।



(साथियों एवं अध्यापक से चर्चा करें)

साहचर्य गुण (Associative Law)

साहचर्य → साथ रहने/निर्वाह करने वाले

संख्याओं का युग्म (जोड़ा) बदलने पर भी हल का एक समान रहना, साहचर्य गुण कहलाता है।

कोई भी तीन परिमेय संख्या लीजिए।

a) $\frac{5}{3}$ $\frac{-2}{3}$ $\frac{4}{3}$

परिमेय संख्याओं का योग, अलग-अलग समूह बनाकर जाँचना

$$\left[\frac{5}{3} + \frac{(-2)}{3} \right] + \frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{5}{3} + \left[\frac{(-2)}{3} + \frac{4}{3} \right] = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

b) $\frac{2}{7}$ $\frac{-4}{7}$ $\frac{1}{7}$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

कोई भी तीन परिमेय संख्या लीजिए।

a) $\frac{5}{3}$ $\frac{-2}{3}$ $\frac{4}{3}$

परिमेय संख्याओं का घटाव, अलग-अलग समूह बनाकर जाँचना

$$\left[\frac{5}{3} - \frac{(-2)}{3} \right] - \frac{4}{3} = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$\frac{5}{3} - \left[\frac{(-2)}{3} - \frac{4}{3} \right] = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

सही बॉक्स का चुनाव (✓) कीजिए

परिमेय संख्याओं के लिए योग साहचर्य है।



परिमेय संख्याओं के लिए योग साहचर्य नहीं है।



परिमेय संख्याओं के लिए घटाव साहचर्य है।



परिमेय संख्याओं के लिए घटाव साहचर्य नहीं है।



(साथियों एवं अध्यापक से चर्चा करें)

गुणन व भाग के लिए साहचर्य गुण की जाँच

कोई भी तीन परिमेय संख्या लीजिए।

a) $\frac{5}{3}$ $-\frac{2}{3}$ $\frac{4}{3}$

b) $\frac{2}{5}$ $-\frac{3}{5}$ $-\frac{4}{5}$

परिमेय संख्याओं का गुणन, अलग-अलग समूह बनाकर जाँचना

$$\left[\frac{5}{3} \times \frac{(-2)}{3} \right] \times \frac{4}{3} = \boxed{-\frac{10}{9}} \times \boxed{\frac{4}{3}} = \boxed{-\frac{40}{27}}$$

$$\frac{5}{3} \times \left[\frac{(-2)}{3} \times \frac{4}{3} \right] = \boxed{\frac{5}{3}} \times \boxed{-\frac{8}{9}} = \boxed{-\frac{40}{27}}$$

$$= \quad = \quad =$$

कोई भी तीन परिमेय संख्या लीजिए।

a) $\frac{5}{3}$ $-\frac{2}{3}$ $\frac{4}{3}$

परिमेय संख्याओं का भाग, अलग-अलग समूह बनाकर जाँचना

$$\left[\frac{5}{3} \div \frac{(-2)}{3} \right] \div \frac{4}{3} = \boxed{} \div \boxed{\frac{4}{3}} = \boxed{}$$

$$\frac{5}{3} \div \left[\frac{(-2)}{3} \div \frac{4}{3} \right] = \boxed{\frac{5}{3}} \div \boxed{} = \boxed{}$$

सही बॉक्स का चुनाव (3) कीजिए

परिमेय संख्याओं के लिए गुणन साहचर्य है।



परिमेय संख्याओं के लिए गुणन साहचर्य नहीं है।



परिमेय संख्याओं के लिए भाग साहचर्य है।



परिमेय संख्याओं के लिए भाग साहचर्य नहीं है।



(साथियों एवं अध्यापक से चर्चा करें)

वितरकता गुण (Distributive law)

गुणन की योग व घटाव पर वितरकता

कोई भी तीन परिमेय संख्या लीजिए।

a) $\frac{2}{3}, \quad \frac{-4}{3}, \quad \frac{5}{3}$

b) $\frac{-3}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{7}{5}$

परिमेय संख्याओं के लिए वितरकता गुण की जाँच

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{-4}{3} + \frac{5}{3} \right) = \boxed{\frac{2}{3}} \times \boxed{\frac{1}{3}} = \boxed{\quad}$$

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{(-4)}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{3} \right) = \boxed{\frac{-8}{9}} + \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$$

$$\frac{-3}{5} \times \left(\boxed{\quad} - \boxed{\quad} \right) = \boxed{\quad} - \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$$

$$\left(\boxed{\quad} \times \frac{7}{5} \right) - \left(\boxed{\quad} \times \frac{2}{5} \right) = \boxed{\quad} - \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$$

क्या परिमेय संख्याओं के लिए गुणन की घटाव पर वितरकता संभव है ? साथियों एवं अध्यापक के साथ चर्चा कीजिए।

रिक्त स्थान भरिए

i) $\frac{2}{13} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{-2}{5} \right) = \frac{2}{13} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{13} \times \underline{\quad}$

(ii) $\frac{-1}{7} \times \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3} \right) = \underline{\quad} \times \frac{2}{5} - \underline{\quad} \times \frac{1}{3}$

(iii) $\underline{\quad} \times \left(\frac{-1}{2} + \frac{3}{2} \right) = \underline{\quad} \times \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$

(iv) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5} \right) = \frac{2}{3} \times \left(\underline{\quad} \right) - \frac{2}{3} \times \left(\underline{\quad} \right) = \underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}$

पैटर्न को ध्यानपूर्वक देखिए तथा रिक्त स्थान भरिएः—

योज्य प्रतिलोम (Additive Inverse)

$$\begin{array}{rclcrcl} -10 & + & 10 & = & 0 \\ -\frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & = & 0 \\ \frac{4}{7} & + & \left(\frac{-4}{7}\right) & = & \underline{\quad} \\ -5 & + & \underline{\quad} & = & 0 \\ \frac{-2}{7} & + & \underline{\quad} & = & 0 \end{array}$$

योज्य तत्समक (Additive Identity)

$$\begin{array}{rclcrcl} -10 & + & \underline{\quad} & = & -10 \\ -\frac{1}{2} & + & \underline{\quad} & = & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{7} & + & 0 & = & \underline{\quad} \\ -5 & + & 0 & = & \underline{\quad} \\ \frac{13}{12} & + & \underline{\quad} & = & \frac{13}{12} \end{array}$$

रिक्त स्थान भरिएः

- 1) $\frac{3}{4}$ का योज्य प्रतिलोम _____ है।
- 2) -1 का योज्य प्रतिलोम _____ है।
- 3) $\frac{-9}{12}$ का योज्य प्रतिलोम _____ है।
- 4) _____ एक योज्य तत्समक है।

पैटर्न को ध्यानपूर्वक देखिए

गुणात्मक प्रतिलिपि (Multiplicative Inverse)

$$\begin{array}{rcl}
 4 & \times & \frac{1}{4} = 1 \\
 -10 & \times & \frac{-1}{10} = 1 \\
 \frac{1}{2} & \times & 2 = 1 \\
 \frac{-4}{7} & \times & \frac{-7}{4} = 1 \\
 -5 & \times & \underline{\quad} = 1 \\
 \frac{-2}{7} & \times & \underline{\quad} = 1
 \end{array}$$

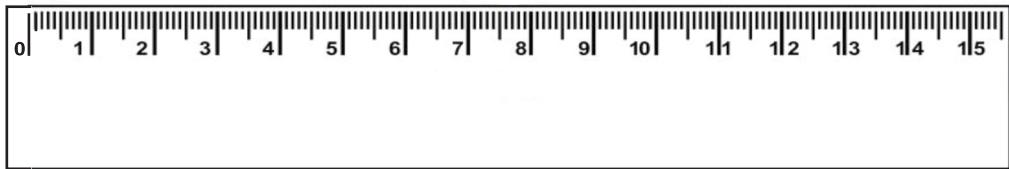
गुणात्मक तत्समक (Multiplicative Identity)

$$\begin{array}{rcl}
 4 & \times & 1 = 4 \\
 -10 & \times & \underline{\quad} = -10 \\
 \frac{-1}{2} & \times & \underline{\quad} = \frac{-1}{2} \\
 \frac{4}{7} & \times & 1 = \underline{\quad} \\
 -5 & \times & 1 = \underline{\quad} \\
 \frac{13}{12} & \times & \underline{\quad} = \frac{13}{12}
 \end{array}$$

रिक्त स्थान भरिए:

- 1) $\frac{4}{3}$ का गुणात्मक प्रतिलिपि _____ है।
- 2) -2 का गुणात्मक प्रतिलिपि _____ है।
- 3) $\frac{-9}{12}$ का व्युत्क्रम _____ है।
- 4) $\frac{4}{9}$ का व्युत्क्रम _____ है।
- 5) _____ गुणात्मक तत्समक संख्या है।

परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण पैमाना (scale) के प्रयोग से गतिविधि



सभी छात्र/छात्राएँ अपने—अपने पैमाने को साथ लेकर, पूछे गए प्रश्नों का उत्तर देने का प्रयास कीजिए।

प्र. 1 छात्रों से पूछा जाएगा कि स्केल पर उन्हें कौन—कौन सी संख्याएँ दिख रही हैं?

उ.

प्र. 2 क्या इन पूर्ण संख्याओं के बीच में भी संख्याएँ हैं?

उ.

प्र. 3 5 व 6 के बीच में चौथा छोटा निशान कौन सी संख्या को दिखाता है?

उ.

प्र. 4 इन सभी संख्याओं को दशमलव रूप में लिखिए

उ.

$$\frac{11}{10}, \quad \frac{12}{10}, \quad \frac{13}{10}, \quad \frac{14}{10}, \quad \frac{15}{10}, \quad \frac{16}{10}, \quad \frac{17}{10}, \quad \frac{18}{10}, \quad \frac{19}{10}$$

प्र. 5 1 और 2 के बीच के सभी निशानों को दशमलव संख्याओं के रूप में बताइए?

उ.

_____ , _____ , _____ , _____ , _____ , _____ , _____ , _____

प्र. 6 हम पैमाने के सभी बिंदुओं को परिमेय संख्या के रूप में दर्शा सकते हैं।

दी गई दशमलव संख्याओं को $\frac{P}{q}$ के रूप में बदलिए।

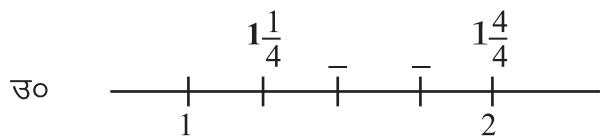
उ.

$$4.3 = \boxed{}, \quad 0.7 = \boxed{}, \quad 2.9 = \boxed{}, \quad 3.7 = \boxed{}$$

→ सभी परिमेय संख्याओं के हर में 10 आ रहा है। ऐसा क्यों?

छात्र/छात्राएँ उत्तर न दे पाएँ तो वह अध्यापक से जान सकते हैं कि सभी पूर्ण संख्याओं के बीच में पैमाने पर 10 बराबर भाग हो रहे हैं। इसलिए परिमेय संख्याओं के हर में 10 आ रहा है।

प्र० 7 अगर हम पूर्ण संख्याओं के बीच में 4 बराबर भाग करेंगे तो प्रत्येक भाग के हर में कौन–सी संख्या आएगी?



इस प्रकार विद्यार्थी पैमाने (scale) का प्रयोग कर परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाना सीख सकते हैं।

दशमलव संख्याओं पर साथियों एवं अध्यापक से चर्चा की जाए।

निम्नलिखित तालिका के वर्गों में (हाँ/नहीं) भरिए।

निम्न तालिका की पंक्तियों में दी गई परिमेय संख्याओं को उनके सामने स्तम्भों की परिमेय संख्याओं में जोड़कर प्राप्त उत्तर को संबंधित वर्गों में लिखिए।

+	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{3}$						
$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{2}$				
$\frac{1}{4}$					$\frac{1}{4}$		
0							
$-\frac{1}{4}$							
$-\frac{1}{2}$							

आओ अभ्यास करें।

$$(i) \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{}$$

$$(v) \quad \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \boxed{}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{}$$

$$(vi) \quad \frac{7}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{}$$

$$(iii) \quad \frac{1}{4} + \left(\frac{-1}{4}\right) = \boxed{}$$

$$(vii) \quad \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \boxed{}$$

$$(iv) \quad 0 + \frac{1}{2} = \boxed{}$$

$$(viii) \quad \frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \boxed{}$$

नीचे तालिका में दी गई परिमेय संख्याओं को उनके सामने स्तंभों की परिमेय संख्याओं से गुणा कर उत्तर को संबंधित वर्गों में भरिए जैसा कि कुछ वर्गों में दिखाया गया है।

x	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$						
$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{4}$				
$\frac{1}{4}$							
0							
$-\frac{1}{4}$						$\frac{1}{16}$	
$-\frac{1}{2}$							

करके देखें—

$\text{—} \times \text{—} = \text{_____}$

(f) $\text{—} \times 1 = \text{_____}$

(b) $\frac{1}{2} \times \frac{-1}{4} = \text{_____}$

(g) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{3} = \text{_____}$

(c) $\frac{4}{3} \times \frac{3}{5} = \text{_____}$

(h) $\frac{5}{7} \div 3 = \text{_____}$

(d) $\frac{-1}{3} \times \frac{-2}{7} = \text{_____}$

(i) $\frac{3}{4} \div \frac{4}{7} = \text{_____}$

(e) $\frac{5}{6} \times 0 = \text{_____}$

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

- परिवेश में से उदाहरण देकर परिमेय संख्याओं को पहचानना।
- परिमेय संख्याओं पर चारों संक्रियाओं (योग, घटा, गुणा एवं भाग) को आसानी से हल कर पाना।
- परिमेय संख्याओं के लिए विभिन्न गुणधर्मों का प्रयोग करना।
- दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्याएँ को ज्ञात कर पाना।

अध्याय - 2 एक चर वाले ऐखिक समीकरण

पाठ परिचय :-

बच्चों पिछली कक्षा में हमने बीजीय व्यंजकों से समीकरण बनाना सीखा है।

समीकरण के बारे में हम यह भी जानते हैं:

- (1) समीकरण की पहचान ' $=$ ' के चिह्न से होती है। और समीकरण में सदैव समता " $=$ " का चिह्न होता है। जबकि व्यंजकों में समता का चिह्न नहीं होता।
- (2) यदि हम एक चर का प्रयोग करके ऐखिक व्यंजकों (अधिकतम एक घात वाले व्यंजक) से समीकरण बनाते हैं।

तो ऐसे समीकरण $\times - 7 = 12$ में

$\times \rightarrow$ चर

$(\times - 7) \rightarrow$ ऐखिक व्यंजक

$'='$ \rightarrow समता का चिह्न

अधिकतम घात $\rightarrow 1$

हमने यह भी सीखा :

- (3) समीकरण में
बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष या $LHS = RHS$
- (4) बाएँ पक्ष में व्यंजक का मान = दाएँ पक्ष में व्यंजक का मान, ऐसा केवल चर के कुछ मानों के लिए ही संभव है।
चर के ऐसे मानों को हल कहते हैं।
- (5) समीकरण का हल : समीकरण के दोनों पक्ष तुला के पलड़ों की तरह संतुलन में होते हैं।

इसीलिए समीकरण के दोनों पक्षों में एक तरह की संक्रियाएँ ($+, -, \times, \div$) की जाती हैं। जिससे समीकरण का संतुलन बना रहे और समीकरण सरल होता जाए और हमें उसका हल मिल सके।

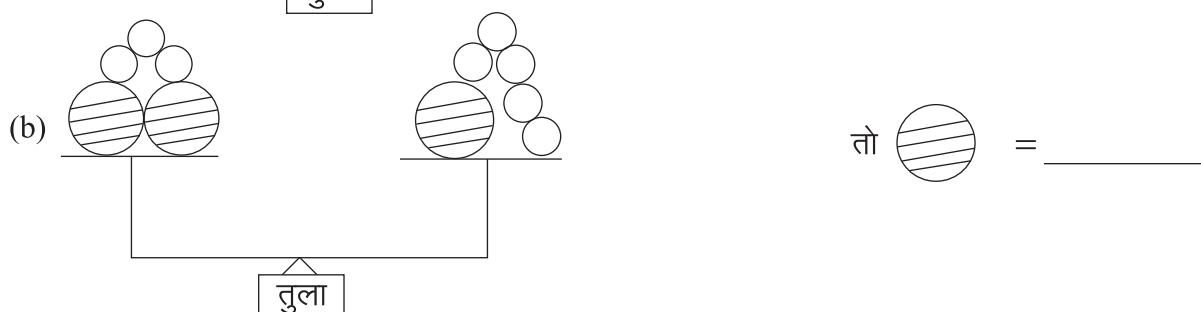
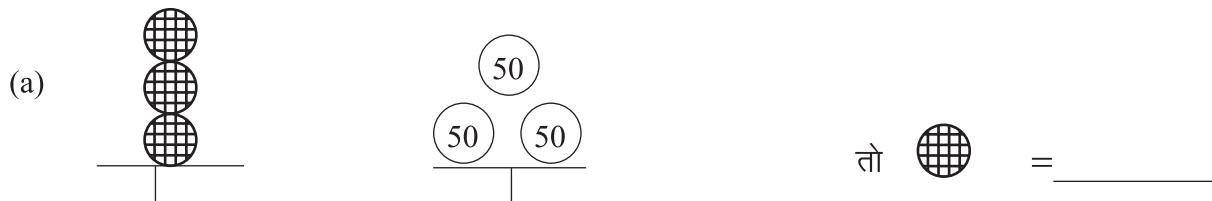
आज हम सीखेंगे :

- (1) समीकरणों को हल करना जिनके एक पक्ष में ऐखिक व्यंजक तथा दूसरे पक्ष में केवल संख्या हों।
- (2) उन समीकरणों का हल जिनके दोनों पक्षों में चर हो।
- (3) समीकरणों को सरल रूप में बदलना तथा हल करना।
- (4) समीकरणों की मदद से दैनिक जीवन की समस्याओं का हल ढूँढ़ना।

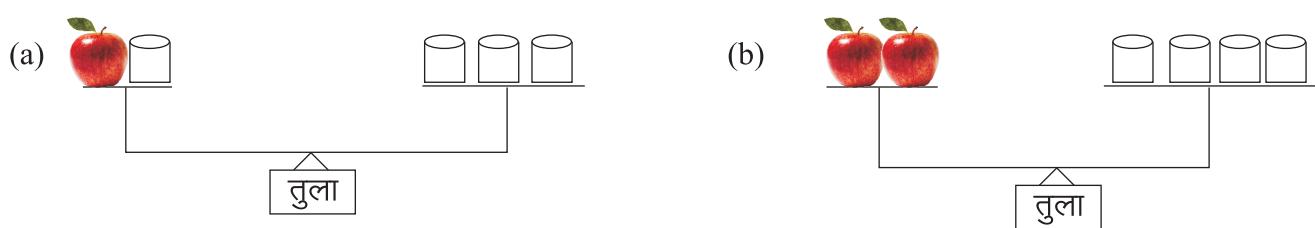
चित्रों से खेलना :

क्या आप हल कर सकते हैं ?:

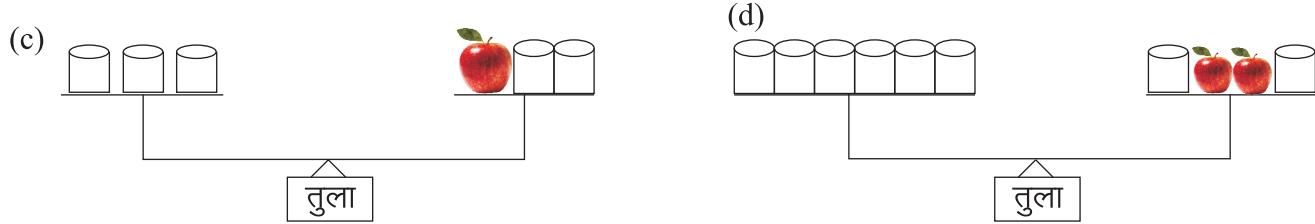
- 1) नीचे दिए गए चित्रों को देखकर रिक्त स्थान भरिए।



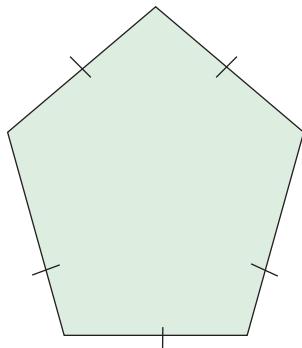
- 2) 'a' को आधार मानते हुए नीचे दी गई आकृतियों में कौन सी आकृति संभव नहीं हैं! और कौन सी संभव हैं, लिखिए।



संभव है / _____

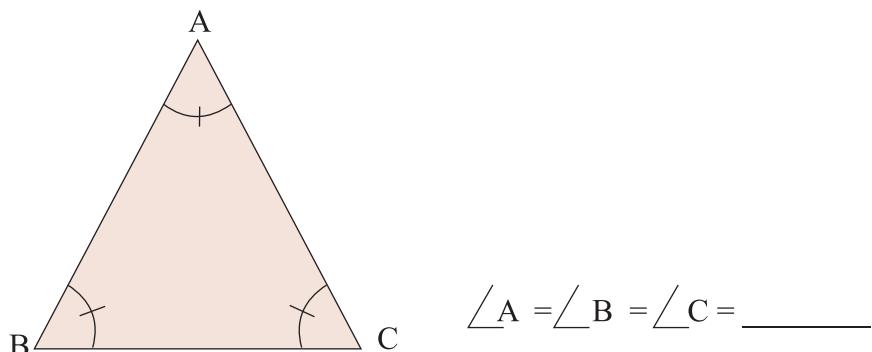


3) दी गई आकृति में पाँचों भुजाएँ बराबर हैं और आकृति का परिमाप 55 cm है। तो एक भुजा की लम्बाई कितनी होगी?



भुजा की लम्बाई _____ cm

4) एक त्रिभुज के तीनों कोण बराबर हैं तथा तीनों कोणों का जोड़ 180° है तो प्रत्येक कोण की माप ज्ञात कीजिए।



$\angle A = \angle B = \angle C = _____$

संख्याओं से खेलें खेल :

- | | | |
|-----------|---|---------------------------------------|
| अध्यापिका | : | सब बच्चे एक-एक संख्या सोच लो |
| कबीर | : | सोच ली |
| अध्यापिका | : | इसका दुगना कर लो |
| कबीर | : | कर लिया |
| अध्यापिका | : | इसमें 20 जोड़ दो |
| कबीर | : | जोड़ लिया |
| अध्यापिका | : | उत्तर का आधा कर दो |
| कबीर | : | कर दिया |
| अध्यापिका | : | अब इसमें 10 घटा दो |
| कबीर | : | घटा दिया |
| अध्यापिका | : | क्या सबकी सोची हुई संख्या वापिस आ गई। |
| कबीर | : | अरे वाह! ये तो मजेदार खेल हैं। |

(इस खेल से हम सीख सकते हैं कि समीकरण का हल प्राप्त करने के लिए किसी संख्या या चर पर कौन सी संक्रियाएँ $(+,-,\times,\div)$ कब और कैसे की जा सकती हैं।)

वीजगणितीय कौशल

अपना स्कोर कार्ड बनाइए। (Score Card)

नियम : सही उत्तर के लिए 10 points.

गलत उत्तर के लिए 0 points.

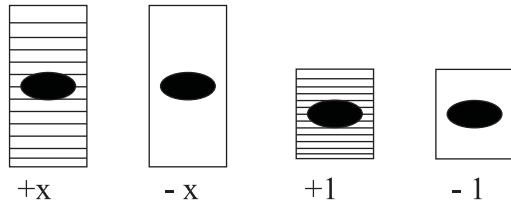
समीकरण को हल करके नीचे दिए गए बॉक्स से उत्तर मिलाइए तथा अपना Score Card तैयार कीजिए।

(1) $\frac{P}{8} = 5$ $P = 40$	points 10	(2) $13 = 10 - 5c$	points																				
(3) $3 = 7x - 12x$		(4) $6 = p - 3$																					
(5) $8 = 4 - z$		(6) $x - 2 = 12$																					
(7) $6 - p = 9 - 4$		(8) $2 - v = 4 - 11$																					
उत्तर 1. $p = 40$ 5. $z = -4$ 2. $c = \frac{-3}{5}$ 6. $x = 14$ 3. $x = \frac{-3}{5}$ 7. $p = 1$ 4. $p = 9$ 8. $V = 9$		Score Card (स्कोर कार्ड)																					
		<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>Q.No</th> <th>Points</th> <th>Q.No</th> <th>Points</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>10</td> <td>5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> <td>6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td></td> <td>8</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> कुल स्कोर =	Q.No	Points	Q.No	Points	1	10	5		2		6		3		7		4		8		
Q.No	Points	Q.No	Points																				
1	10	5																					
2		6																					
3		7																					
4		8																					

चित्र या कार्ड गेम (Card game) द्वारा समीकरण हल करना। समीकरण में दोनों पक्षों में चर हैं।

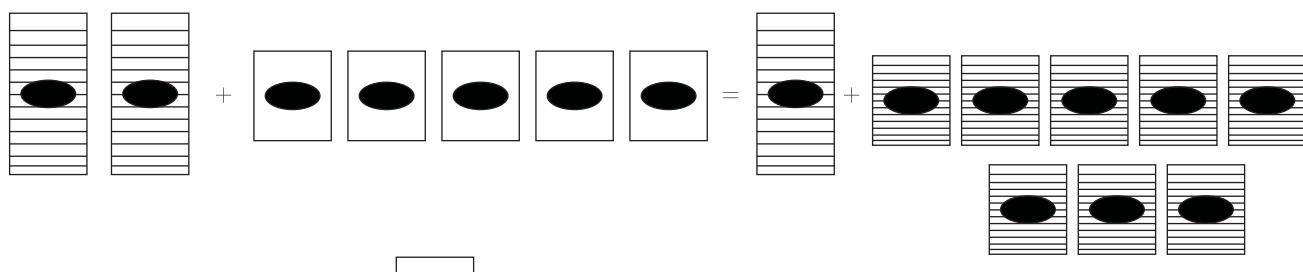
[कार्ड या चित्र]

4 तरह के कार्ड या चित्र कार्ड या चित्र लीजिए

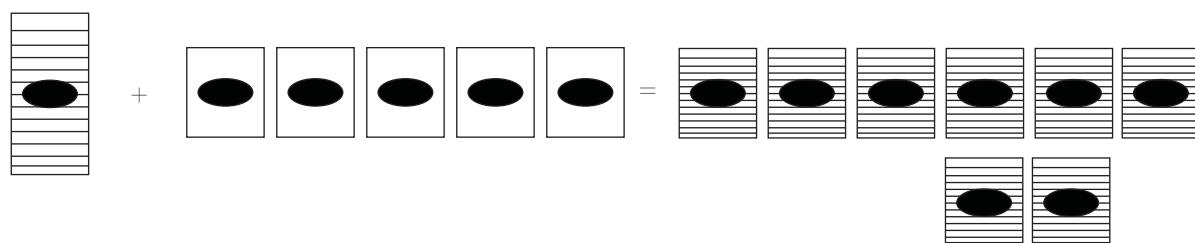


$$(1) \text{ समीकरण } 2x + (-5) = x + 8$$

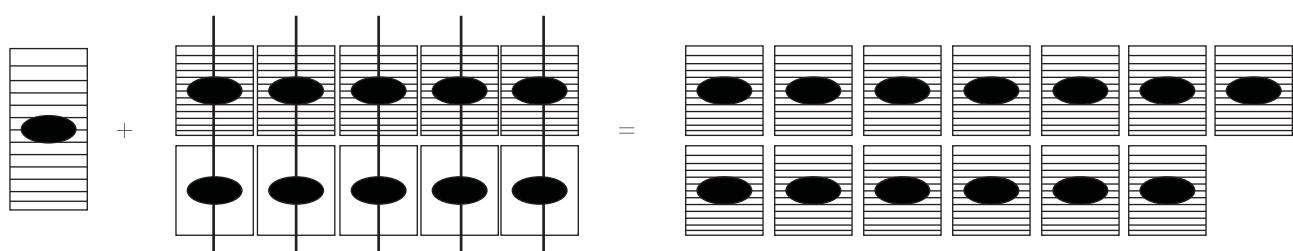
चित्र या कार्ड द्वारा समीकरण को इस तरह निरूपित किया जा सकता है।



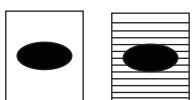
बराबर के दोनों तरफ से एक निकालने पर



दानों तरफ पाँच जोड़ने पर या रखने पर



क्योंकि $+1 - 1 = 0$ हैं इसलिए



$$x = 13$$

2) समीकरण $3x + 4 = -x + 2$

$$+ = +$$

दोनों तरफ एक जोड़ने पर

$$+ = +$$

दोनों तरफ 4 जोड़ने पर

$$=$$

$$4 = 2$$

$$2 =$$

$$= \frac{1}{2} \text{ or } = \frac{-1}{2}$$

कार्ड या चित्र की सहायता से खुद करके देखिए :

(1) $5x + 4 = 3x - 7$

(2) $2x + 5 = 3x - 4$

निम्नलिखित समीकरणों में से एक चर / दो चर वाले ऐसिक समीकरण छाँटिए तथा नीचे दिए गए बादल में लिखिए :-

1. $x+5=7,$

4. $x+9+z=9,$

7. $\frac{p}{5}+8=11$

2. $3x - z=10,$

5. $6 - 15y=23,$

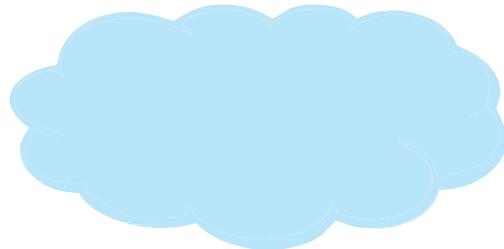
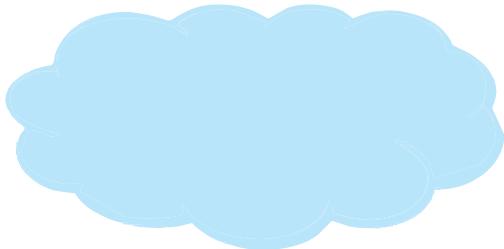
8. $3y - t=12$

3. $z - 11=18p,$

6. $9q+85=15$

एक चर वाले ऐसिक
समीकरण

दो चर वाले ऐसिक
समीकरण



हल कीजिए

एक चर वाले ऐसिक समीकरण

प्र० (1) यदि अवनी के पास कुछ कंचे हैं तथा गुरप्रीत ने उससे 9 कंचे ले लिए तो अवनी के पास कितने कंचे शेष रह गए? इस स्थिति को बीजगणितीय रूप में लिखें।

--

प्र० (2) यदि साहिल के पास कुछ पेन हैं तथा गौतम ने उसे कुछ पेन और दे दिए तो कुल मिलाकर कितने पेन हो गए?

माना साहिल के पास पेन

x

माना गौतम द्वारा दिए गए पेन

y

तो कुल पेन

$x+y$

प्र० (3) माहिरा के पास कुछ रुपये थे। उसमें से कुछ रुपये चीनी खरीदने में खर्च हो गए। अब माहिरा के पास कितने रुपये शेष हैं?

माना माहिरा के पास रुपये = _____

चीनी खरीदने में खर्च हुए रुपये = _____

माहिरा के पास शेष रुपये = _____

समीकरण जिनके एक पक्ष में ऐखिक व्यंजक तथा दूसरे में केवल संख्या हो।

प्र० (4) एक आयताकार पार्क की लम्बाई उसकी चौड़ाई से दोगुनी है। यदि इसका परिमाप 120 मी. है तो इसकी लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर :—माना पार्क की चौड़ाई = x

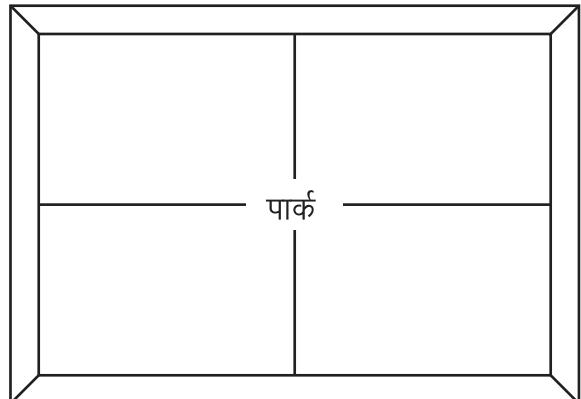
पार्क की लम्बाई = $2x$

आयत का परिमाप = $2(\text{लम्बाई} + \text{चौड़ाई})$

$$= 2(x+2x)$$

$$= 2(3x)$$

$$= 6x$$



दी गई स्थिति के अनुसार परिमाप 120 मीटर

$$\text{तो } 6x = 120$$

$$x = \frac{120}{6} = 20 \text{ मीटर}$$

$$\therefore \text{चौड़ाई} = 20 \text{ मीटर}$$

$$\text{लम्बाई} = 2x = 2 \times 20 = 40 \text{ मीटर}$$

$$\text{लम्बाई} = 40 \text{ मीटर}$$

प्र० (5) दो संख्याओं का योग 42 है। यदि एक संख्या दूसरी से 12 अधिक है। तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

माना एक संख्या $= \underline{\hspace{2cm}}$

दूसरी संख्या $= \underline{\hspace{2cm}}$

इन दो संख्याओं का योग $= \underline{\hspace{2cm}}$

दी गई स्थिति के अनुसार योग $= \underline{\hspace{2cm}}$

समीकरण

और समीकरण को हल कीजिए तथा संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

प्र० (6) तीन लगातार पूर्ण संख्याओं का योग 27 है। तो पूर्णांक संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

प्र० (7) यदि आशिमा की आयु उसकी माता की आयु की आधी है। इन दोनों की आयु का योग 75 वर्ष है, तो आशिमा तथा उसकी माता की आयु ज्ञात कीजिए।

प्र० (8) निम्न समीकरणों को हल कीजिए

(i) $y + 3 = 10$ (2) $\frac{6x}{5} = 10$

प्र० (9) एक आयत का परिमाप 12 cm है और उसकी चौड़ाई 2 cm है। उसकी लंबाई ज्ञात कीजिए।

प्र० (10) महिमा की चाची की आयु महिमा की वर्तमान आयु की तीन गुनी है। 5 वर्ष बाद उन दोनों की आयु का योग 66 वर्ष हो जाएगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

समीकरण जिनके दोनों पक्षों में चर उपस्थित हैं

नीचे दिए गए समीकरणों में से उन समीकरणों पर गोला लगाएँ जिसमें दोनों पक्षों में चर उपस्थित हैं—

$$1. \ 2x - 3 = x + 2, \ 4. \ 4x + 5 = 7$$

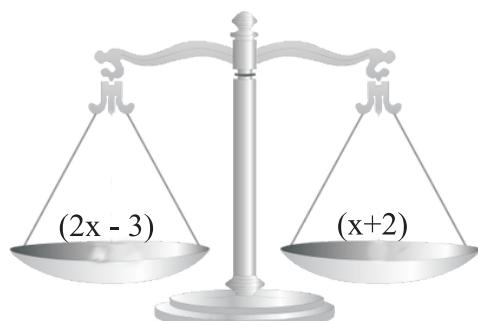
$$2. \ 5t + 9 = t + 10, \ 5. \ 3x = 5 + 4x$$

$$3. \ 9s + 27 = 65, \ 6. \ 10z - 20 = 5z + 15$$

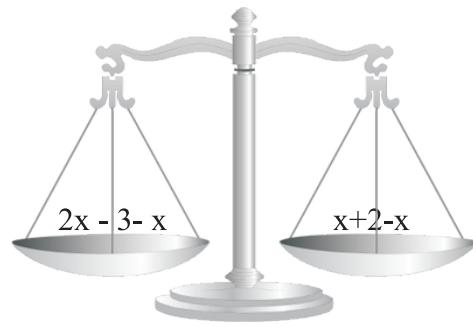
आइए $2x - 3 = x + 2$ को तराजू की सहायता से हल करें —

दोनों पक्षों में से x घटाने पर

चरण-1



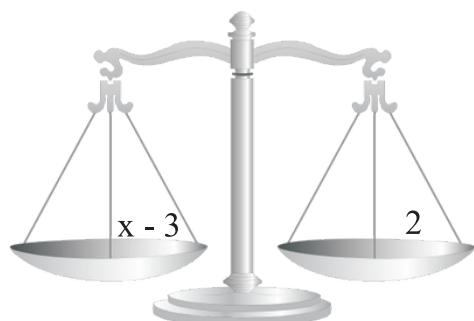
चरण-2



हम प्रयास करेंगे कि केवल एक पक्ष में चर रहे।

इसके लिए हम दाएँ पलड़े पर संक्रिया करके x को हटाने का प्रयास करते हैं।

चरण-3



चरण-4



दोनों पक्षों में 3 जोड़ने पर

अब स्वयं प्रयास कीजिए :-

$$5t + 9 = t + 10$$

चरण-1



चरण-3



चरण-2



चरण-4



यह भी करके देखिए

यदि

$$\triangle + \square = 9$$

$$\triangle + \circle = 6$$

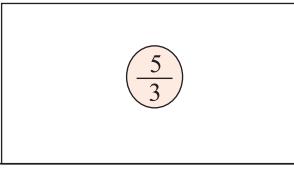
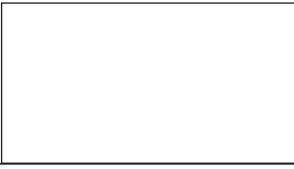
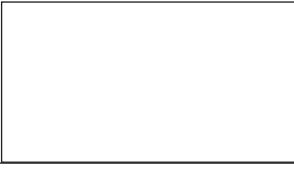
$$\circle + \circle = \triangle$$

तो

$$\triangle = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \circle = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \square = \underline{\hspace{2cm}}$$

Hit & Trial

समीकरण हल कीजिए तथा नीचे दिए गए Coins में से सही बॉक्स में एक Coin Drop कीजिए

Coins :        							
(1) $2z = 5 - 2$ $3z = 5$ $z = \frac{5}{3}$				(2) $5 = 5v - 10v$			
							
(3) $5 + 12v = 3 + v$				(4) $10a - 3 = 8a$			
							
(5) $6 = 3t$				(6) $\frac{v + 11}{9} = v$			
							
(7) $\frac{z + 7}{5} = 2z$				(8) $3 - z = \frac{z}{4}$			
							

बिना तराजू का प्रयोग किए समीकरण हल करने का प्रयास कीजिए।

(i) $10z - 9 = 5 + 3z$

दोनों पक्षों से $3z$ घटाएँ

$$10z - 9 - 3z = 5 + 3z - 3z$$

$$10z - 3z - 9 = 5 + 3z - 3z$$

$$7z - 9 = 5$$

दोनों पक्षों में 9 जोड़िए

$$7z - 9 + 9 = 5 + 9$$

$$7z = 14$$

$$z = 2$$

ध्यान दें:-

चर दोनों पक्षों में उपस्थित हैं।

चर एक ही पक्ष में रहें।

समीकरणों को सरल बनाना या ऐखिक रूप में बदले जाने वाले समीकरण

(ii) $3x + 7 = \frac{x}{5} + 7$

दोनों पक्षों को 5 से गुणा कीजिए—

$$5(3x + 7) = 5\left(\frac{x}{5} + 7\right)$$

$$15x + 35 = x + 35$$

दोनों पक्षों में से x घटाइए

$$15x + 35 - x = x + 35 - x$$

$$14x + 35 = 35$$

दोनों पक्षों में से 35 घटाइए

$$14x + 35 - 35 = 35 - 35$$

$$14x = 0$$

$$\therefore x = 0$$

$$\therefore 14 \neq 0$$

(iii) $6x = 10x - \frac{x}{5}$ को हल कीजिए।

(iv) $2y + \frac{5}{3} = \frac{26}{3} - y$ को हल कीजिए।

ऐखिक समीकरणों का उपयोग करके संख्याओं, आयु, परिमापों तथा मुद्रा (नोटों) पर आधारित अनेक प्रकार की समस्याएँ हल की जा सकती हैं।

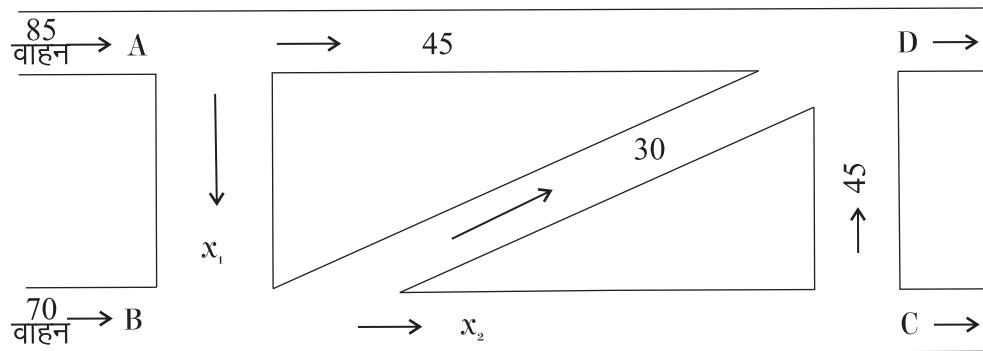
प्रश्न 1 आरुषि की अध्यापिका की आयु आरुषि की आयु से चार गुनी है। दोनों की आयु में 26 जोड़ने पर अध्यापिका की आयु आरुषि की आयु से दोगुनी हो जाती है। दोनों की आयु ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 2 अमन ने एक संख्या सोची। वह इसमें से $\frac{2}{3}$ घटाकर प्राप्त संख्या को 4 से गुणा करता है। जो परिणाम उसे मिला, वह सोची गई संख्या का तीन गुना है। अमन द्वारा सोची गई संख्या बताइए।

प्रश्न 3 एक वर्गाकार पार्क का परिमाप 16 मी॰ है। पार्क की एक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 4 रीमा के पास 100 रुपये, 50 रुपये और 10 रुपये के नोट हैं, तथा उनका अनुपात 2:3:5 है। उसके पास कुल राशि 400 रुपये है। बताइए उसके पास प्रत्येक प्रकार के कितने – कितने नोट हैं।

क्या आप ट्रेफ़िक पुलिस की मदद कर सकते हैं ?



ट्रेफ़िक नियम : (Traffic is one-way)

- (1) सभी सड़कों पर वाहन केवल एक ही तरफ (दिशा में) जा सकता है।
- (2) A तथा B points से सभी वाहन अन्दर जाने हैं तथा सभी वाहन C तथा D points से बाहर निकलने हैं।

Points C तथा D पर खड़े ट्रेफ़िक मैन की क्या आप मदद कर सकते हैं कि कितने वाहन बाहर निकले हैं। जबकि A point से 85 वाहन तथा B point से 70 वाहन अन्दर गए हैं। बताइए

- (1) सड़क x_1 पर कितने वाहन चले ? _____
- (2) सड़क x_2 पर कितने वाहन चले ? _____
- (3) D point से कितने वाहन बाहर निकले ? _____
- (4) C point से बाहर निकले वाहनों की संख्या _____

कहानी में गणित

मगरमच्छ दादा



एक बगुला, हंस तथा एक बूढ़ा मगरमच्छ दोस्त थे तथा गाँव के तालाब के किनारे बैठकर अक्सर गप्पे हाँका करते थे। आइए, उनकी बातों का आनंद उठाते हैं।



: मगरमच्छ दादा! आपकी आयु कितनी है ?



: बेटा ! मेरी आयु तुम दोनों की आयु की 4 गुनी से 30 वर्ष अधिक है। अब तुम्हें बताओ कि मेरी आयु कितनी है ?



: अच्छा दादा ! मेरी और हंसा की आयु का अनुपात $1:2$ है। 5 वर्ष बाद हमारी आयु का अनुपात $3:5$ हो जाएगा। क्या आप हमारी आयु बता सकते हैं ? बताओ—बताओ दादा।

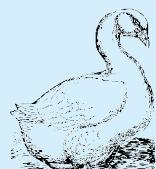


: मैंने पिछले तरण ताल (Swimming Pool) में समीकरण सीखे तो थे! सोचता हूँ शायद याद आ जाएँ।



: चलो दादा ! एक और Hint दे देता हूँ।

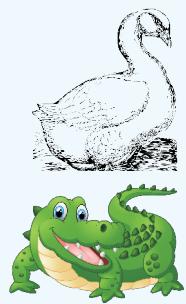
हंसा की आयु मेरी आयु की दुगनी है। पाँच वर्ष पहले उसकी आयु मेरी आयु की तिगुनी थी। सोचो – सोचो दादा शायद याद आ जाए।



: दादा! तुम तो आकार में बहुत बड़े हो तो आपका वज़न भी हमसे अधिक होगा।



: हाँ बेटा! सारी ज़िन्दगी इस तालाब की मछलियाँ खाई हैं और रेत पर धूप में आराम किया है। कुछ भी काम नहीं किया इसलिए अब मोटा हो गया हूँ। तुम अन्दाजा लगाओ मेरा वज़न कितना होगा ?



- : दादा ! 100 किं ग्रा० तो होगा ही। मेरा वज़न तो 10 किं ग्रा० है।
- : अरे नहीं रे! अभी मैं इतना भी मोटा नहीं हुआ हूँ। तुम्हारा वज़न इस (बगुला) बगु भाई से दो गुना है। तुम अपना और बगु का वज़न जोड़ लो, उसको 6 से गुणा कर लो, फिर उसमें 30 जोड़ोगे तो तुम्हें मेरा वज़न पता चल जाएगा।

(एक दिन बाद)



आज मेरा मन कुछ स्वादिष्ट खाना खाने का कर रहा है। मैं मछलियाँ खाते-खाते ऊब गया हूँ।



: दादा! तालाब के पास वाले पार्क में कभी – कभी हिरण घास चरने आते हैं। मैं देखकर आता हूँ और आपके लिए एक दो लेकर आता हूँ।

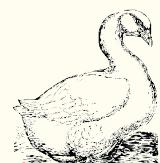


: चल रे चूजे! क्या तुम हिरण को उठा पाओगे ? और सुनो! मेरी भूख एक–दो हिरण को खाने से तो मिटने वाली नहीं ।



: दादा! बहुत सारे हिरण दिखाई दे रहे हैं।

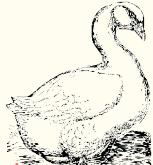
हिरणों के एक झुंड का आधा भाग पार्क में घास चर रहा है। और शेष का तीन चौथाई पड़ोस में ही खेलकूद रहा है। शेष बचे 9 हिरण तालाब के किनारे पानी पी रहे हैं। तुम तैरकर तालाब के दूसरे छोर पर चले जाओ, एक दो नहीं 9 – 9 हिरण खाने को मिलेंगे। थोड़ा सा मुझे भी चखने को दे देना।



: दादा! तुम तालाब के बारे में तो अधिकतर सब कुछ जानते हो।



हौं ! जहाँ तक मुझे याद है, मैं नन्हा सा बच्चा था । गाँव के साहूकार ने मुझे इस तालाब में आश्रय दिया था । मैं तो इस गाँव की रग-रग से वाकिफ हूँ ।



इस तालाब में कितनी मछलियाँ होंगी ?



इस तालाब में दो तरह की मछलियाँ हैं । सुनहरी रंग की मछलियाँ तथा गुलाबी रंग की मछलियाँ । सुनहरी तथा गुलाबी रंग की मछलियों का अनुपात 7: 5 है । सुनहरी मछलियों की संख्या, गुलाबी रंग की मछलियों की संख्या से 8 अधिक है । अब तुम खुद ही निकालो इस तालाब में कितनी मछलियाँ हैं । मुझे तो भूख लगी है, मैं तो हिरण का शिकार करने चला ।



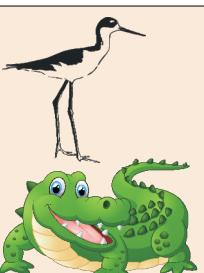
दादा ! आपने बताया था कि साहूकार चाचा बहुत अच्छे हैं । उन्होंने आपकी सुरक्षा के लिए तालाब के चारों तरफ बाड़ लगवाई थी । इस तालाब की लम्बाई और चौड़ाई कितनी होगी ?



तालाब में आने से पहले मैं साहूकार चाचा के घर के तरण-ताल (Swimming Pool) में रहता था । तब मैंने चाचा को राज मिस्त्री से बात करते सुना था । मिस्त्री ने बताया कि इस तालाब की लम्बाई और चौड़ाई में 11:4 का अनुपात है । इसकी बाड़ कराने में 100 रुपये प्रतिमीटर की दर से 75,000 रुपये खर्च करने होंगे । अब तुम ही साचो कि तालाब कितना लम्बा है और कितना चौड़ा है ?

आज मैं लालच में कुछ ज़्यादा ही हिरण खा गया हूँ, उनको पचाने के लिए रेत में जाकर थोड़ा लोट लगाकर आता हूँ ।

(अगले दिन)



दादा ! आप उस दिन बता रहे थे कि तालाब को साहूकार चाचा ने ठीक करवाया था और उसमें 75,000 रुपये लगे थे । तो चाचा को अपने बैंक से बहुत सारे पैसे और रुपये निकालने पड़े होंगे ।

हाँ ! चाचा एक थैली भर कर लाए थे । उसमें 2000 रुपये, 500 रुपये और 100 रुपये वाले नोट भरे हुए थे । उनकी संख्याओं का अनुपात 5:6:20 था और उनका कुल मूल्य 75,000 रुपये था । अब तुम ही निकालो कि प्रत्येक प्रकार के कितने नोट थे । मेरा हिसाब जरा कमज़ोर है । मुझे जोरों से नींद आ रही है मैं तो चला सोने ।

कहानी से ढूँढ़कर प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

- (1) ऐखिक समीकरणों का प्रयोग करके हम किन–किन समस्याओं का हल कर सकते हैं?
- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- (e)
- (2) कहानी में दिए गए प्रश्नों को हल करके निम्नलिखित का उत्तर दीजिए।
- (a) मगरमच्छ दादा, हंसा तथा बगुले की वर्तमान आयु कितनी – कितनी हैं?
- (b) तीनों का सही वज़न क्या होगा ?
- (c) हिरणों के झुंड में कितने हिरण होंगे?
- (d) तालाब में मछलियों की संख्या कितनी है ?
- (e) राज मिस्त्री ने साहूकार चाचा को तालाब की लम्बाई तथा चौड़ाई कितनी बताई होगी ?
- (f) चाचा की थैली में 2000 रुपये 500 रुपये तथा 100 रुपये के कितने नोट होंगे ?
- (g) किसको अधिक गणित आता है—**मगरमच्छ/बगुला/हंसा/या आपको** ——————

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

- (1) बीजीय व्यंजकों में '=' के चिह्न के एक ओर वाले व्यंजक का मान उसके दूसरी ओर वाले व्यंजक के मान के बराबर होता है।
- (2) ऐखिक समीकरण वह होते हैं जिन समीकरणों में चर की अधिकतम घात 1 होती है।
- (3) संख्याओं की भांति चरों को भी एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाया जाना।
- (4) ऐखिक समीकरणों का प्रयोग संख्याओं, आयु, परिमापों तथा मुद्रा के रूप में प्रयोग हाने वाले सिक्के व नोटों पर आधारित समस्याओं को हल करने के लिए किया जाना।

अध्याय - 3 चतुर्भुजों को समझना

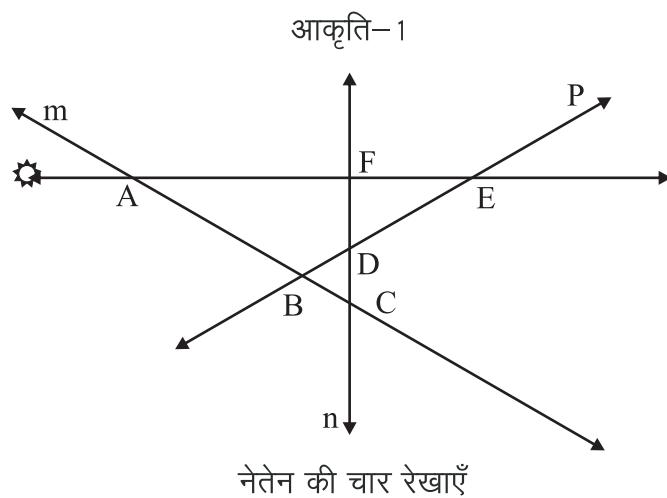
Activity-Time -1

आओ करके देखें।

अपनी कॉपी में चार रेखाएँ बनाते हुए हम देखने की कोशिश करते हैं कि ये चार रेखाएँ अधिक से अधिक कितने बिन्दुओं पर एक दूसरे को प्रतिच्छेद कर सकती हैं।

आपके द्वारा बनायी गयी रेखाएँ कितने बिन्दुओं पर काट रही हैं?

नेतेन, जो कि दिल्ली के एक सरकारी स्कूल में सातवीं कक्षा में पढ़ता है, ने भी ऐसी चार रेखाएँ बनाई। उसने अपने साथियों से बातचीत करके कुछ इस तरह से रेखाएँ बनाई कि उन्होंने एक दूसरे को छः बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद किया।



आकृति 1 में हम देख सकते हैं कि चार रेखाएँ l, m, n, p एक दूसरे को छः बिन्दुओं पर काट रही है। बिन्दु A, B, C, D, E, F

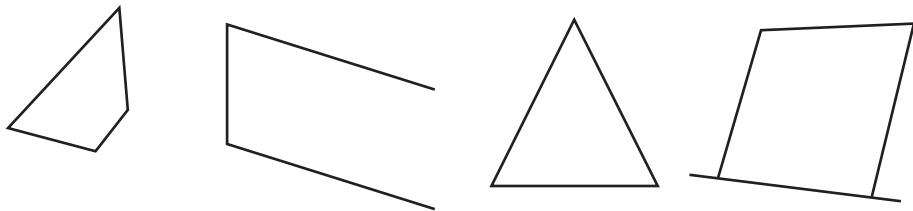
चारों रेखाएँ l, m, n और p समानान्तर नहीं हैं।

हमने देखा नेतेन की चार रेखाएँ छः बिन्दुओं पर काटती हैं। क्या आप छः से अधिक बिन्दुओं पर अपनी रेखाओं को प्रतिच्छेद करा सकते हैं? करके देखिए।

- नेतेन की आकृति में हम देख सकते हैं कि ऐसी तीन आकृतियाँ हैं जो चारों ओर से बंद हैं तथा जिनमें एक आकृति ऐसी है जिसकी चार भुजाएँ हैं।
- अगर आपका उत्तर 'नहीं' है तो आप भी अपनी चार रेखाओं को छः अलग-अलग बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद कराएँ।
- नेतेन की बनायी आकृति को देखकर बताएँ कि रेखाओं के काटने पर कितनी आकृतियाँ ऐसी बनी जो हर तरफ से बंद हैं?
- आकृतियों के नाम भी दीजिए जैसे BDC, DEF, ABDF,,,,,

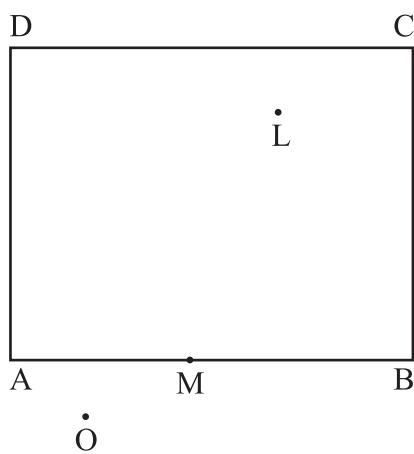
चार भुजाओं वाली ऐसी बंद आकृतियाँ, चतुर्भुज कहलाती हैं?

चतुर्भुज आकृतियों पर धेरा कीजिए।



- अब अपने आस-पास दिखने वाली उन वस्तुओं के नामों की सूची बनाएँ जिनमें चतुर्भुज की आकृति दिखती है।
- 1 कमरे के अन्दर दिखने वाली दीवार
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5

नीचे दी गयी आकृतियों को देखकर कुछ प्रश्नों के उत्तर दें।



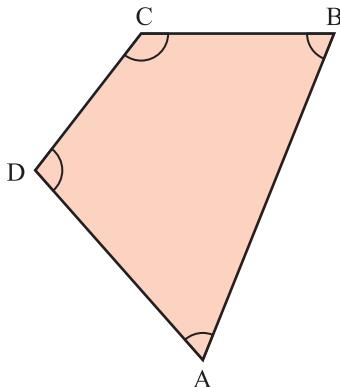
- 1) बिन्दु L चतुर्भुज के अन्दर है या बाहर? _____
- 2) बिन्दु O चतुर्भुज के अन्दर है या बाहर? _____
- 3) बिन्दु M कहाँ पर है? _____

जो भाग चतुर्भुज की परिसीमा (Boundary) के अन्दर है उसे अभ्यंतर भाग तथा बाहर वाले भाग को बाह्य भाग कहते हैं।

आइए अब हम कोशिश करते हैं कि एक चतुर्भुज में कौन-कौन से भाग हो सकते हैं।

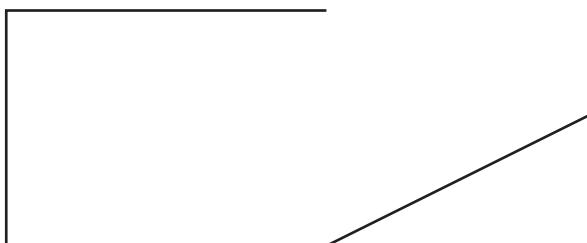
रिक्त स्थान भरिए।

हम चतुर्भुज में देख सकते हैं कि



1. चतुर्भुज ABCD कीभुजाएँ हैं।
इनके नाम AB, ..., ..., ...
2. चतुर्भुज ABCD मेंशीर्ष होते हैं।
इनके नाम A, ..., ..., ...
3. चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर (अंदर वाले) भाग मेंकोण होते हैं। इनके नाम
 $\angle ABC$

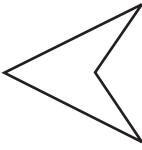
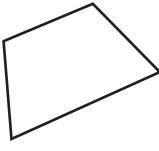
नीचे दी गयी आकृतियों को ध्यान से देखते हैं और यह जानने की कोशिश करते हैं कि क्या ये आकृतियाँ चतुर्भुज है? अगर ये आकृतियाँ चतुर्भुज नहीं हैं तो क्यों नहीं हैं?



- (a) क्या ऊपर दी गई आकृति चतुर्भुज है? (हाँ/नहीं)
अगर आपका उत्तर नहीं है तो कारण बताओ

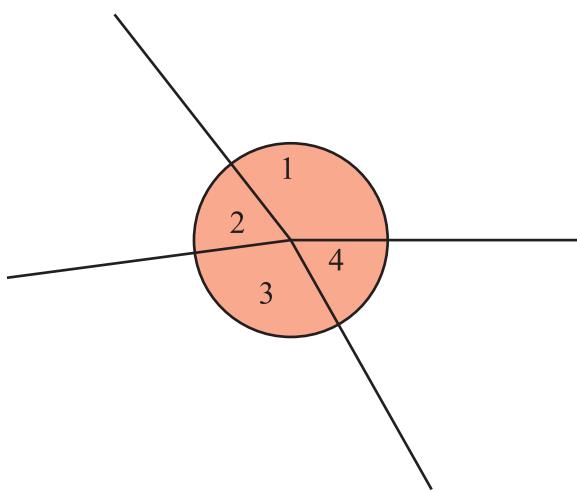
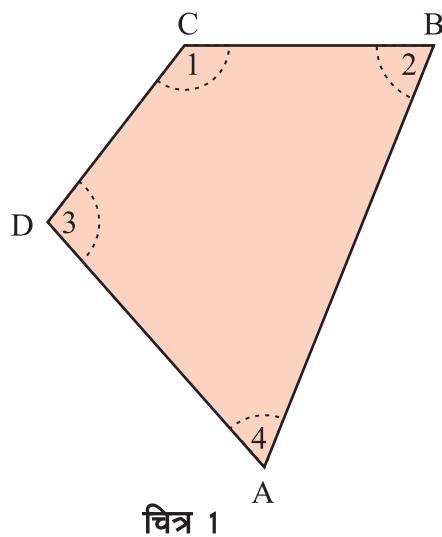
- (b)
-
- क्या ये आकृति चतुर्भुज है? (हाँ/नहीं)
यदि आपका उत्तर नहीं है तो कारण बताओ

- (c)
-
- क्या ये आकृति चतुर्भुज है? (हाँ/नहीं)
यदि आपका उत्तर नहीं है तो कारण बताओ

- (d)  क्या ये आकृति चतुर्भुज है? (हाँ/नहीं)
यदि आपका उत्तर नहीं है तो कारण बताओ
- (e)  क्या ये आकृति चतुर्भुज है? (हाँ/नहीं)
यदि आपका उत्तर नहीं है तो कारण बताओ
- (f)  क्या ये आकृति चतुर्भुज है? (हाँ/नहीं)
यदि आपका उत्तर नहीं है तो कारण बताओ

Activity-Time -2

करके देखो



कागज से दिखाए गए चित्र 1 के अनुसार चतुर्भुज काट लें तथा इसके चारों कोणों को काटकर चित्र 2 के अनुसार एक बिन्दु के चारों ओर चिपकाएँ। इससे हमें पता लगता है कि चतुर्भुज के चारों अंतर्कोणों का योग 360° होता है।

हमने देखा कि चारों कोणों का जोड़ 360° आया है। इसलिए **चतुर्भुज के चारों कोणों का जोड़ 360° होता है।**

अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दो :

1. किसी चतुर्भुज में क्या चार से अधिक कोण हो सकते हैं?

उत्तर :—

2. किसी चतुर्भुज में क्या चार न्यूनकोण हो सकते हैं?

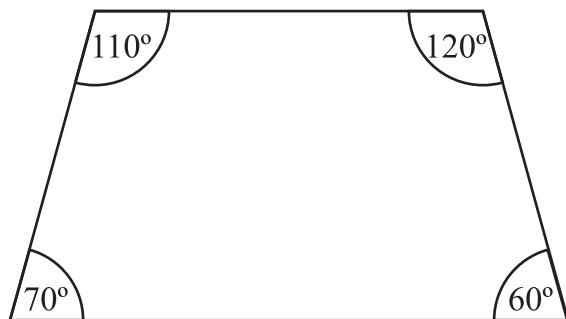
उत्तर :—

3. किसी चतुर्भुज में अधिक से अधिक कितने समकोण हो सकते हैं?

उत्तर :—

कुछ करिए : नीचे दिए गए उदाहरण के अनुसार अलग-अलग प्रकार के दो चतुर्भुज बनाइए। फिर चारों कोणों को मापकर उनका योग लिखिए।

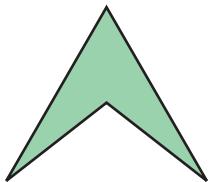
1. कोणों का योग $70^\circ + 110^\circ + 120^\circ + 60^\circ = 360^\circ$



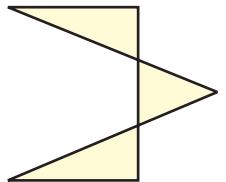
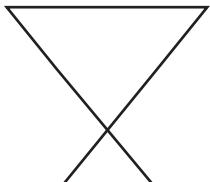
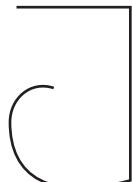
2. कोणों का योग

3. कोणों का योग

केवल रेखाखण्डों से बनी सरल बंद आकृति को बहुभुज कहते हैं।

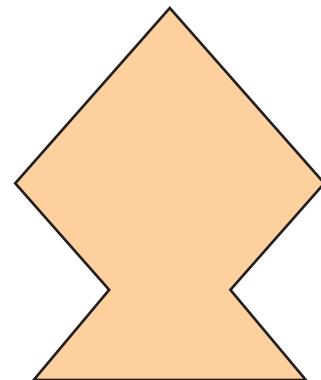


वक्र जो बहुभुज हैं

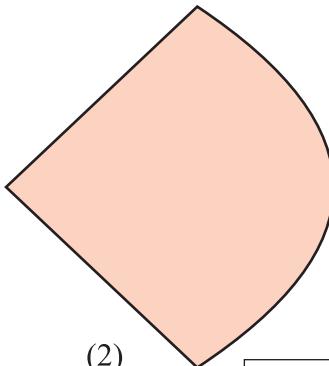


वक्र जो बहुभुज नहीं हैं

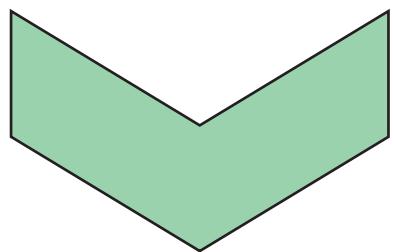
निम्नलिखित में कौन सी आकृतियाँ बहुभुज हैं?



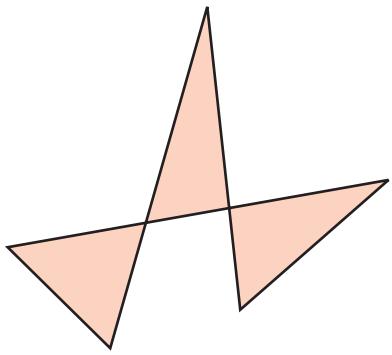
(1)



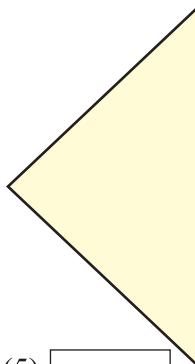
(2)



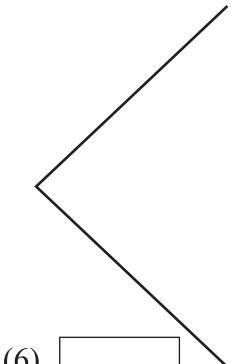
(3)



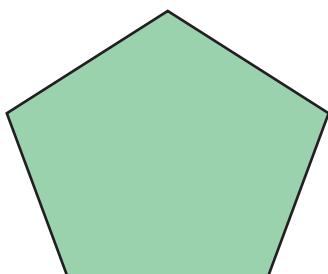
(4)



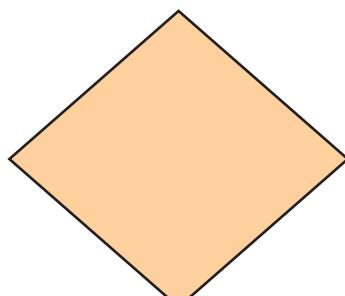
(5)



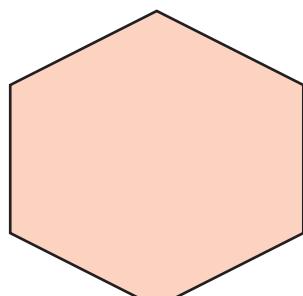
(6)



(7)

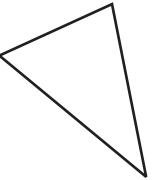
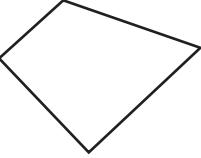


(8)



(9)

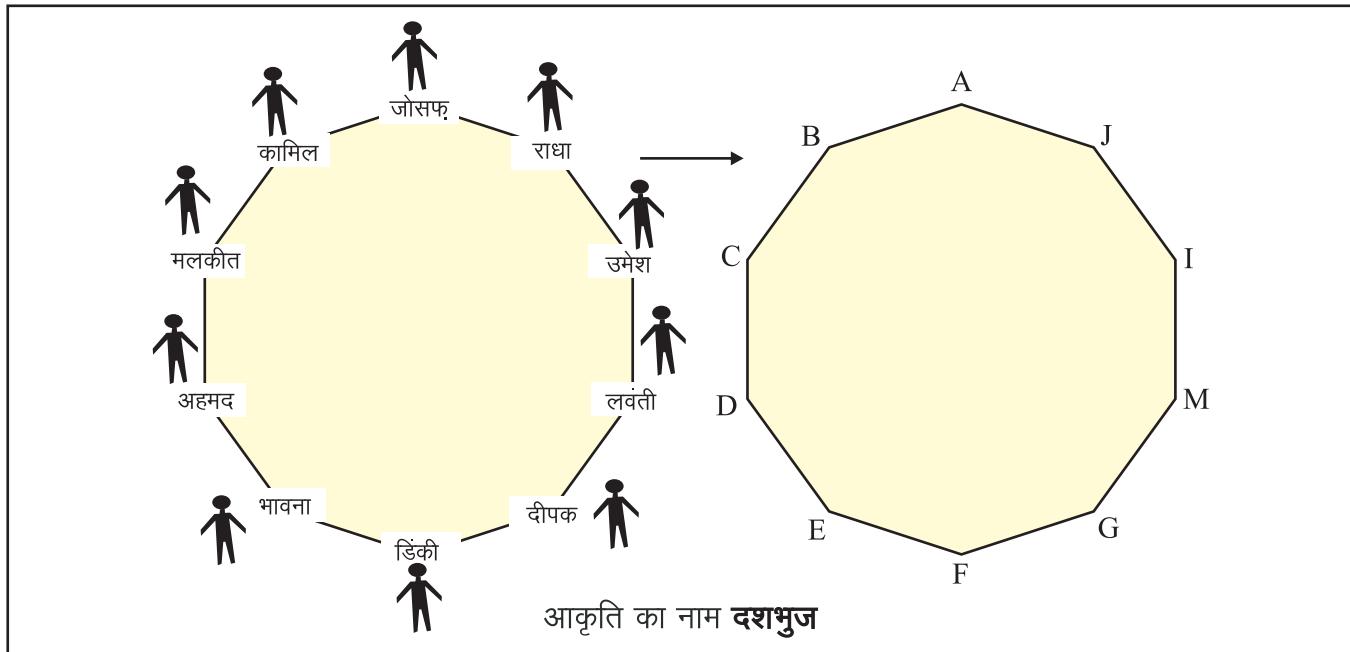
भुजाओं तथा शीर्षों के अनुसार बहुभुजों का वर्गीकरण।
 नीचे दी गई सारणी को देखें, समझें और पूरा करें।

क्र.सं	आकृति का नाम	भुजाओं की संख्या	आकृति	शीर्षों की संख्या
1.	त्रिभुजभुजाएँ		3
2.	चतुर्भुजभुजाएँ		
3.	पंचभुजभुजाएँ		
4.	षट्भुजभुजाएँ		
5.	सप्तभुजभुजाएँ		
6.	अष्टभुजभुजाएँ		
7.	n - भुजभुजाएँ		

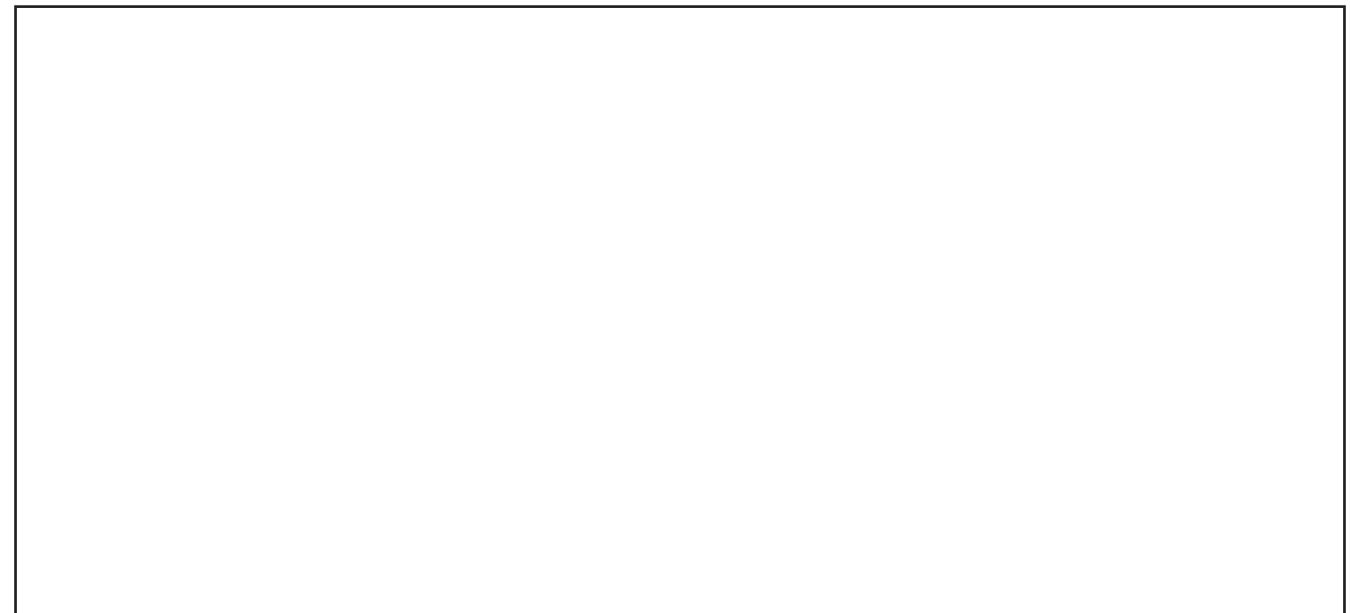
Activity-Time -3

करके देखिए

कुछ छात्र/छात्राएँ आपस में हाथ से हाथ मिलाकर एक घेरे के रूप में बंद आकृति बनायें। अगर आप ज्यादा लोग हैं तो ज्यादा लोग भी घेरा बना सकते हैं। अब उस आकृति को नीचे दिये गये स्थान पर चित्र द्वारा बनाएँ, जैसे जोसफ़ ने बनायी है। तथा आकृति का नाम भी लिखिए।

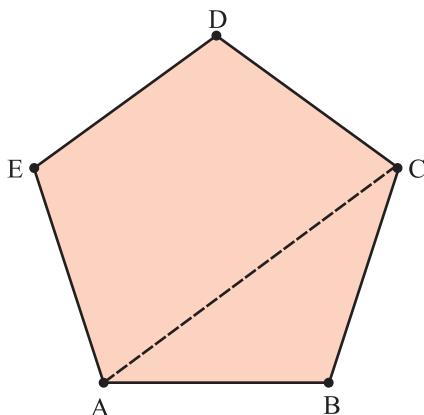


आपका चित्र



हम देख सकते हैं कि जोसफ के बगल में कामिल और राधा हैं, तो ये दोनों उसके पड़ोसी हुए। आप भी अपने बनाए घेरे के पड़ोसी के नाम लिखो। यदि किसी बहुभुज के रूप में खड़े होकर आप अपने दो अड़ोसी-पड़ोसी साथियों को शीर्ष मानकर धागे से एक रेखाखण्ड बनाएँ तो वह रेखाखण्ड उस बहुभुज का एक विकर्ण होगा।

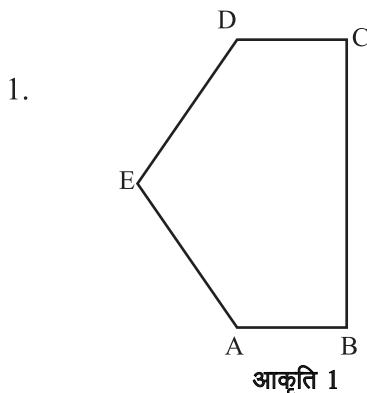
नीचे दी गये बहुभुज के सारे विकर्ण बनाइए तथा उनके नाम भी लिखिए।



विकर्णों के नाम

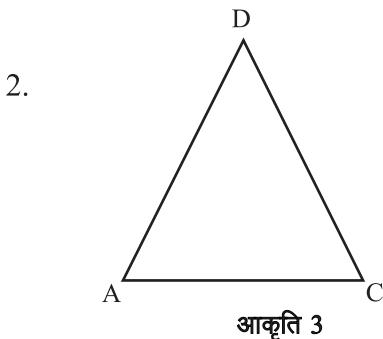
1) AC 2) 3) 4) 5)

अब नीचे दी गयी आकृतियों के विकर्ण बनाइए तथा उनके नाम भी लिखिए।



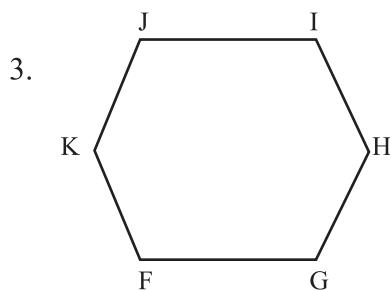
आकृति 1

विकर्ण 1) 2) 3) 4) 5)



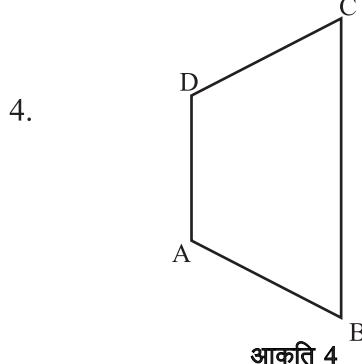
आकृति 3

विकर्ण 1) (क्या यहाँ कोई विकर्ण बना) हॉ/नहीं



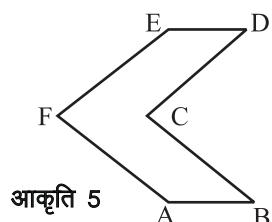
आकृति 2

विकर्ण 1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) 8) 9)



आकृति 4

विकर्ण 1) 2)



विकर्ण 1) 2) 3) 4) 5) 6)

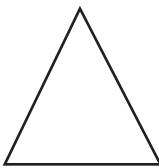
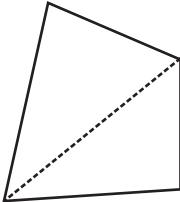
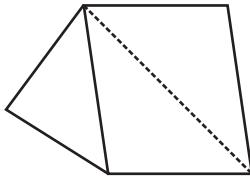
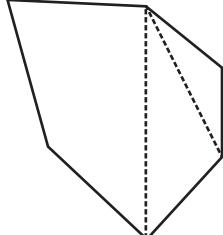
अतः किसी बहुभुज का विकर्ण उसके किन्हीं दो शीर्षों (आसन्न कोणों को छोड़कर) को जोड़ने से प्राप्त रेखाखण्ड होता है।

क्या आप बता सकते हैं कि आकृति (5) एवं (1,2 व 4) के विकर्णों में क्या अन्तर है? अपने साथियों एवं अध्यापक से इसकी चर्चा करें।

जिस बहुभुज के विकर्णों का कोई भी भाग उस बहुभुज के बाहर हो वो बहुभुज अवतल बहुभुज (Concave Polygon) होते हैं तथा जिन बहुभुज में विकर्णों के सभी भाग अन्दर हों वह उत्तल बहुभुज (Convex Polygon) होते हैं।

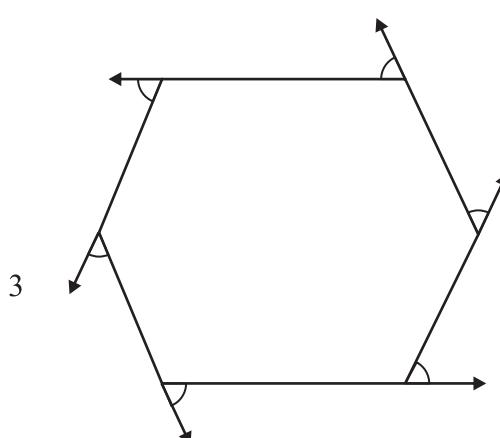
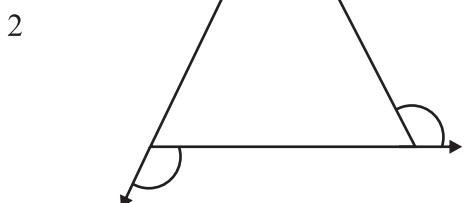
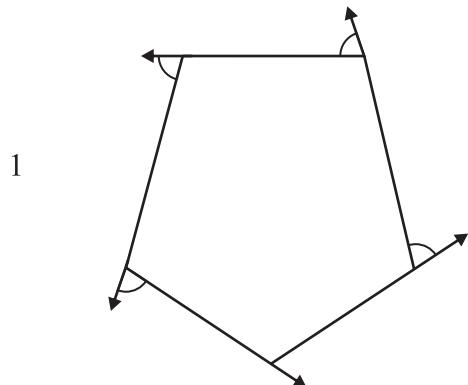
बहुभुज के अंतः कोणों का योगफल

तालिका को समझकर पूरा कीजिए :

आकृति	भुजाएँ	त्रिभुजों की संख्या	कोणों का योगफल
1 	3	1	180°
2 	4	2	$2 \times 180^\circ$ $(4-2) \times 180^\circ = \dots$
3 	5	3	$3 \times 180^\circ$ $(5-2) \times 180^\circ = \dots$
4 	6	4	$4 \times 180^\circ$ $(6-2) \times 180^\circ = \dots$

n भुजाओं वाले बहुभुज के सभी अन्तः कोणों का योग = $(n-2) \times 180^\circ$

आओ करें :-



भुजाओं की संख्या = _____

बाह्य कोणों की संख्या = _____

बाह्य कोणों की माप का योग = _____

एक बाह्य कोण की माप = _____

भुजाओं की संख्या = _____

बाह्य कोणों की संख्या = _____

बाह्य कोणों की माप का योग = _____

एक बाह्य कोण का माप = _____

भुजाओं की संख्या = _____

बाह्य कोणों की संख्या = _____

बाह्य कोणों की माप का योग = _____

एक बाह्य कोण का माप = _____

1. किसी भी समबहुभुज के बाह्य कोणों की मापों का योग 360° होता है।

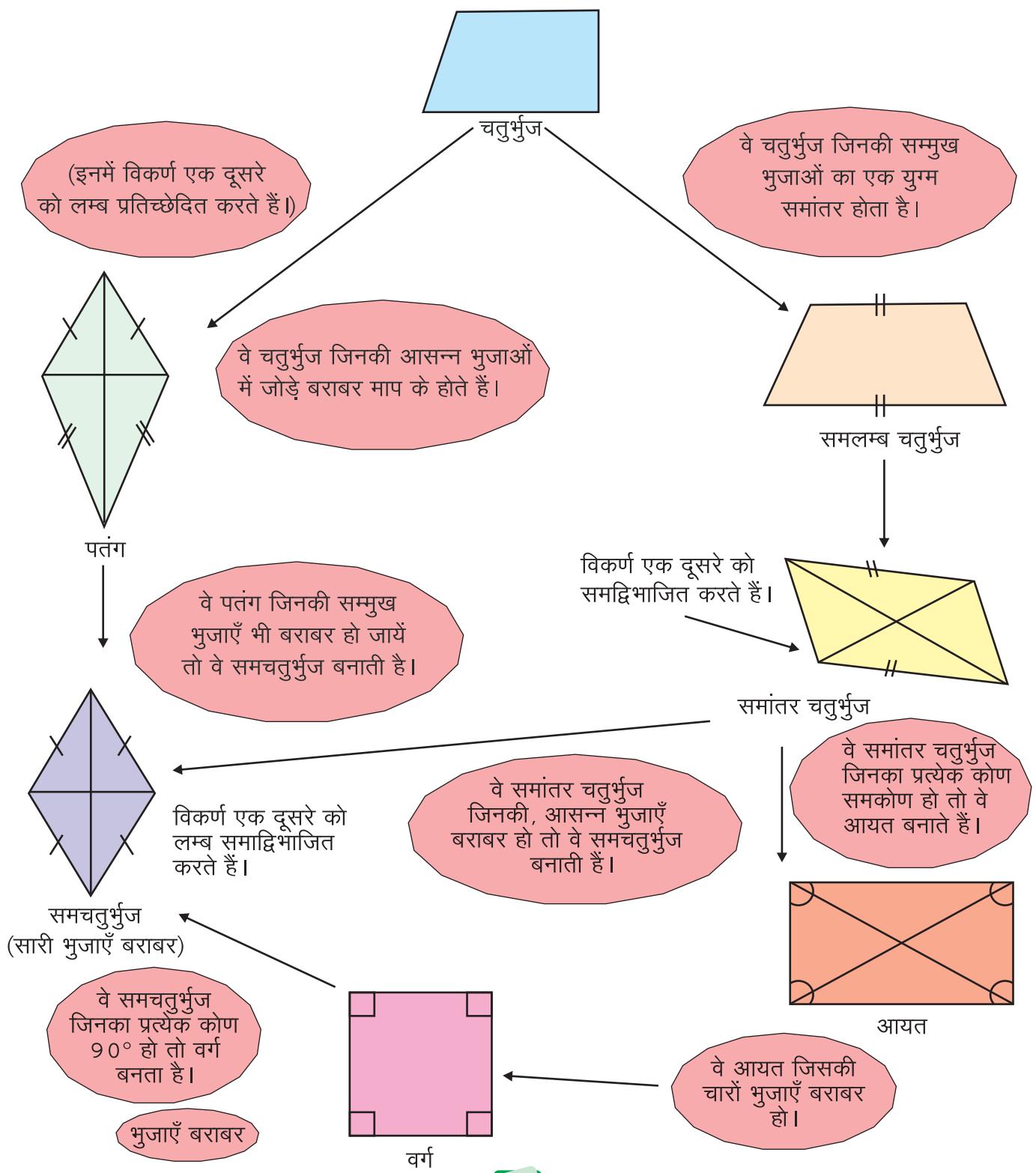
2. समबहुभुज की भुजाओं की संख्या = $\frac{360^\circ}{\text{एक बाह्य कोण की माप}}$

यदि किसी सम बहुभुज में एक कोण की माप = 24°

सम बहुभुज में भुजाओं की संख्या =.....

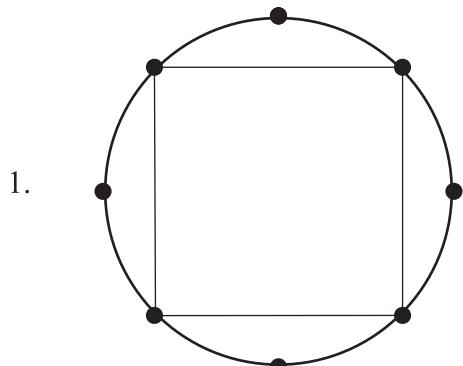
बाह्य कोणों का योग =.....

नीचे दिये गये चित्र को ध्यान से पढ़ें और समझें। अपने अध्यापक की मदद लें। जैसे—जैसे हम नीचे बढ़ते हैं हम देखते हैं कि नीचे वाले चतुर्भुज ऊपर वाले चतुर्भुजों से थोड़ा—थोड़ा अलग होते जाते हैं।



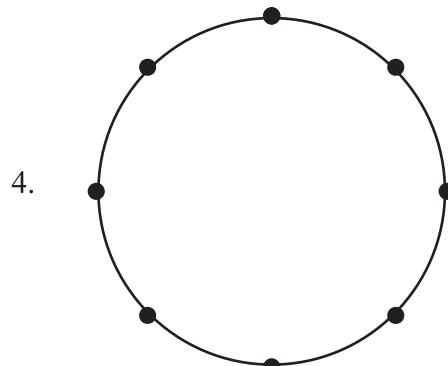
आओ बनाकर देखें

नीचे वृत्त के ऊपर कुछ बिन्दु दिये गये हैं। किन्हीं चार बिन्दुओं को जोड़कर अलग-अलग तरह के चतुर्भुज बनाने का प्रयत्न कीजिए तथा उनके नाम भी लिखिए।

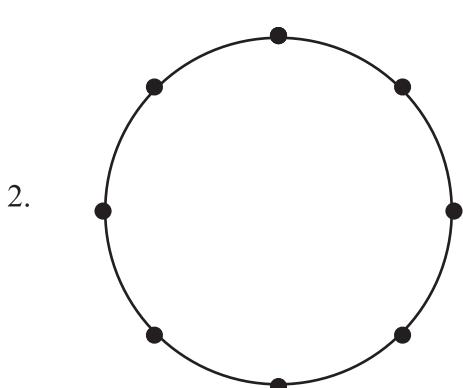


1.

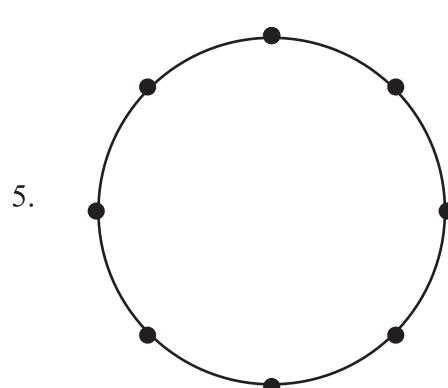
वर्ग



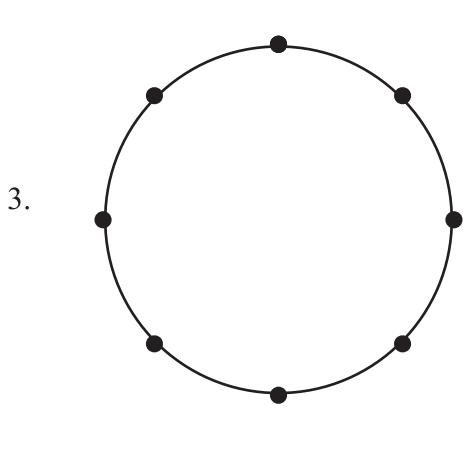
4.



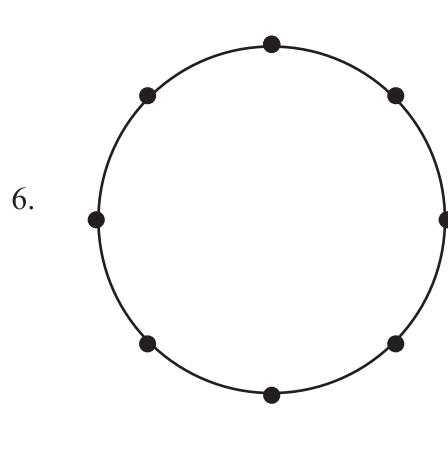
2.



5.

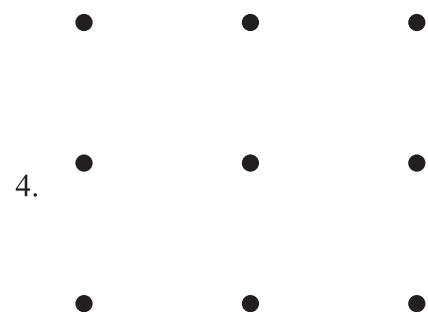
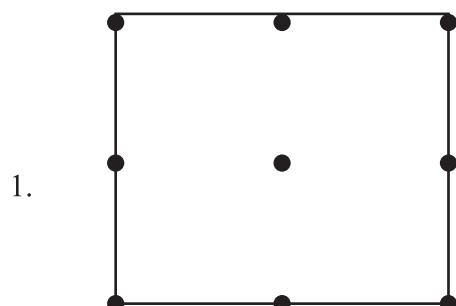


3.

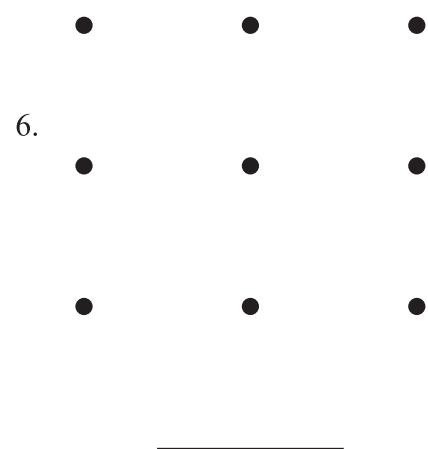
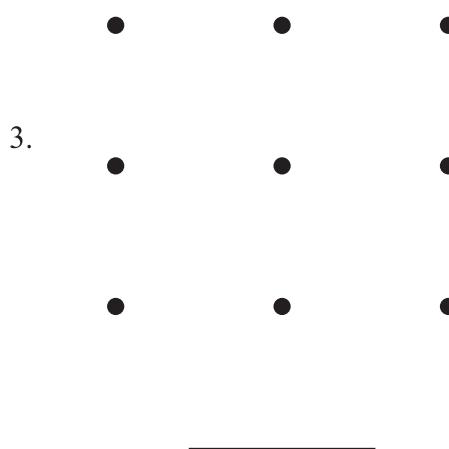
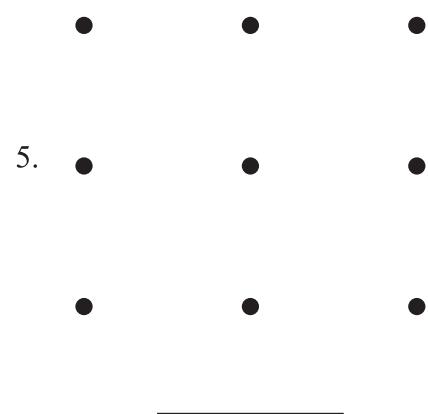
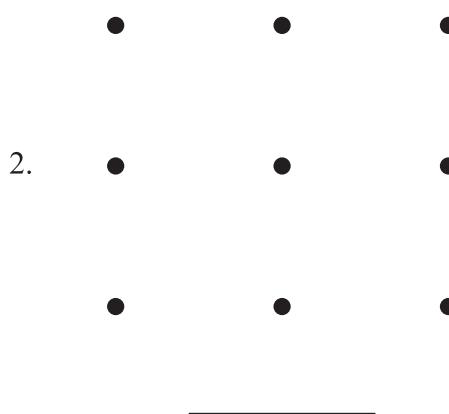


6.

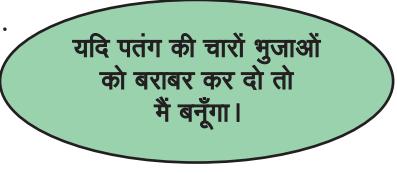
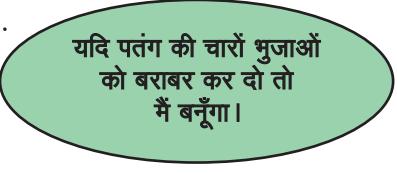
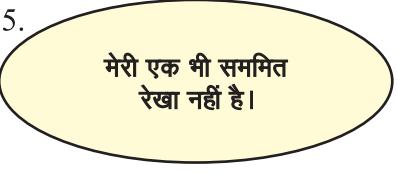
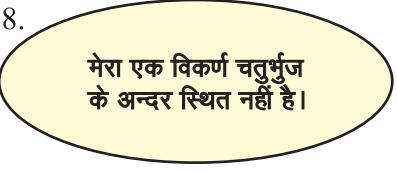
नीचे दिए गए बिन्दुओं को शीर्ष बनाकर एक समांतर चतुर्भुज, एक समलम्ब चतुर्भुज, एक आयत, एक वर्ग तथा एक पंत्र तथा समलंब बनाइए।



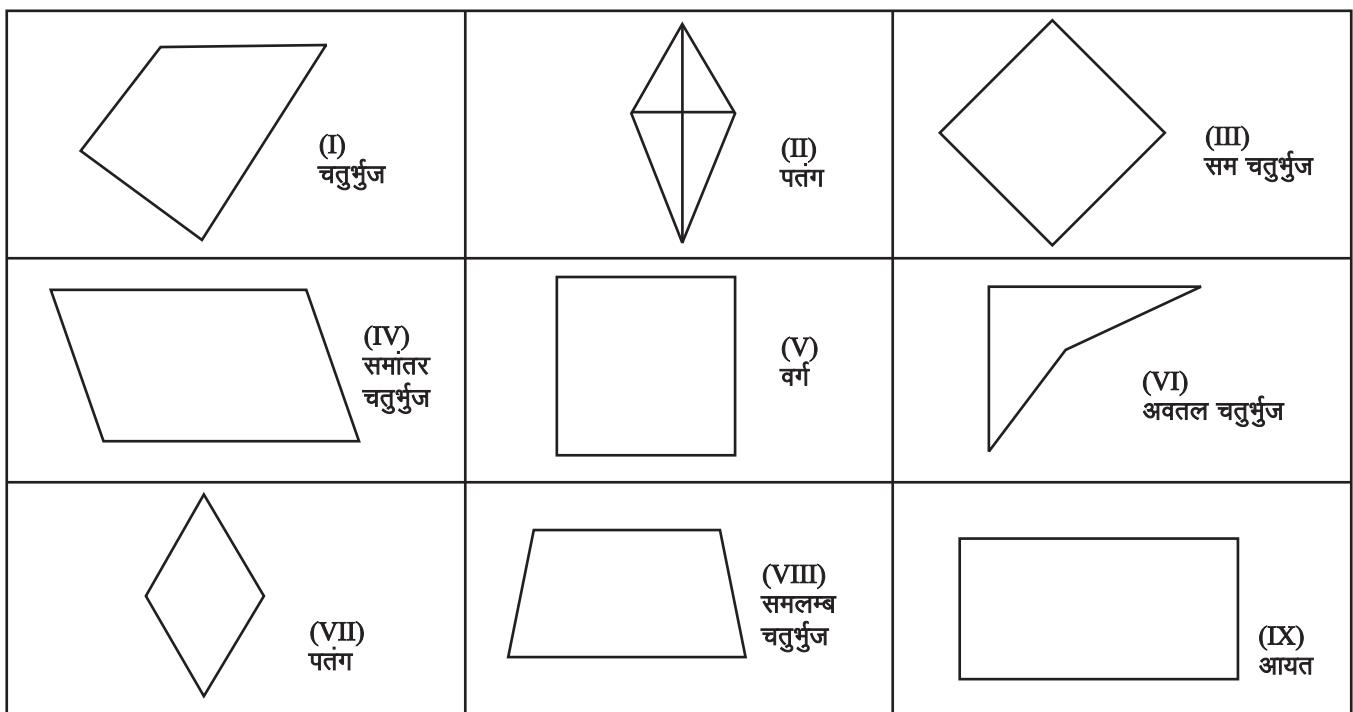
आकृति का नाम: वर्ग _____



नीचे दो बॉक्स दिये गये हैं। ऊपर वाले बॉक्स में कुछ पहेलियाँ दी गयी हैं। हमने पहेलियों के उत्तर देने हैं। उनका उत्तर दूसरे बॉक्स में बने चतुर्भुजों में सही पहेली का नंबर लिखिए।

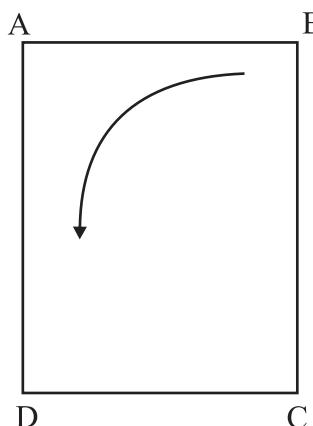
1.  उत्तर  उत्तर	2.  उत्तर	3.  उत्तर
4.  उत्तर	5.  उत्तर	6.  उत्तर
7.  उत्तर	8.  उत्तर	9.  उत्तर

दी गई पहेलियों के हल नीचे बॉक्सों में से छाँटें।

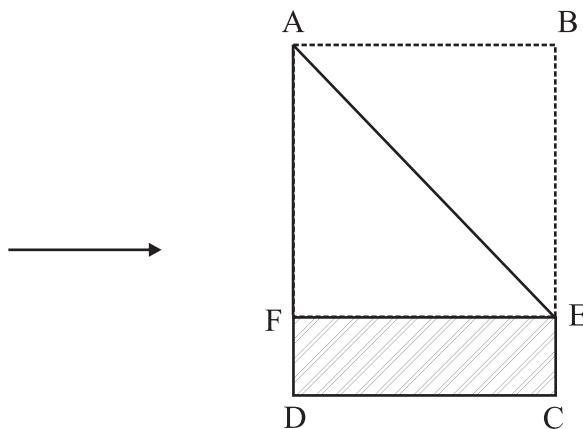


Activity-Time -4

पेपर कटिंग से विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज बनाना सीखें।
सबसे पहले हम एक आयताकार कागज का पेज लेते हैं।
आयताकार पेपर से वर्गाकार शीट निकाल सकते हैं।

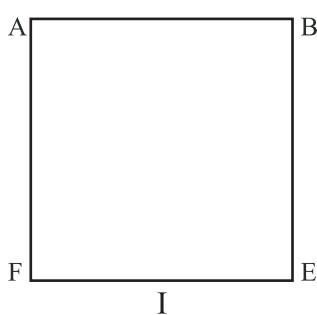


सिरे AB को
सिरे BC से मिलायें।

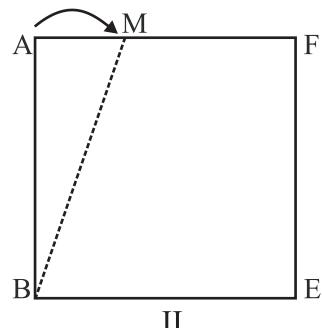


अब जो पट्टी DCEF फालतू
बचती है उसे मोड़े और काटकर
अलग कर दें।

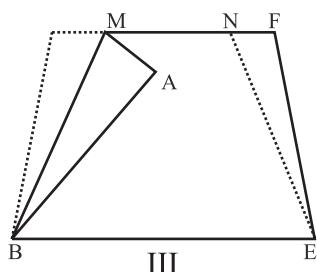
अब हमारे पास वर्गाकार शीट तैयार है।
इससे समलम्ब चतुर्भुज बनाने का प्रयास करते हैं।



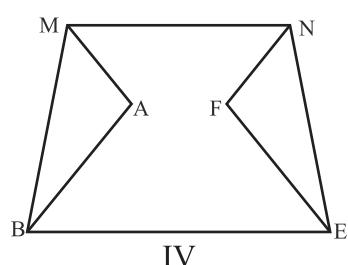
त्रिकोण बने पेज को वापिस खोल लें।



AF पर कोई भी बिन्दु M लेते हुए AB को BM पर मोड़ें।

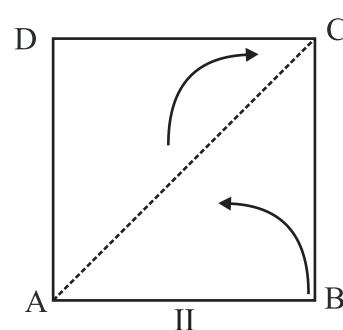
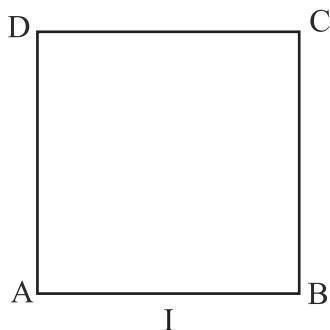


इस प्रकार MF पर कोई बिन्दु N लेकर NE के साथ मोड़ें।

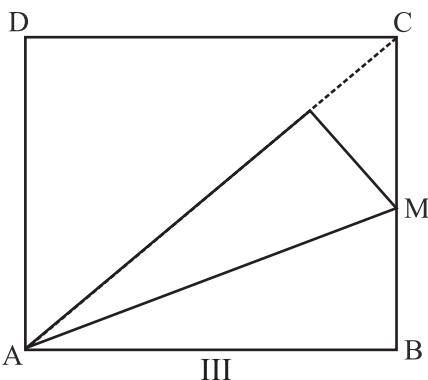


इसे उल्टा कर देखें तो BENM समलम्ब चतुर्भुज है।

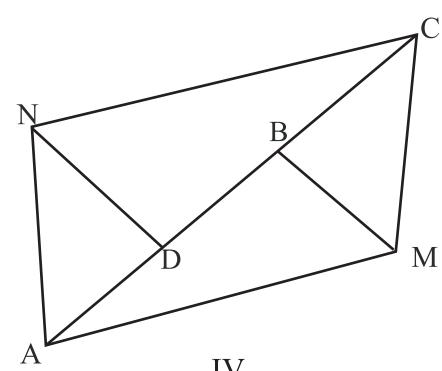
अब हम वर्गकार शीट से अन्य समांतर चतुर्भुज बनाते हैं। क्रीज/फोल्ड/मोड़ के



वर्गकार शीट ABCD को विकर्ण AC के साथ-साथ मोड़कर वापस खोलेंगे तो AC की क्रीज बन जायेगी।



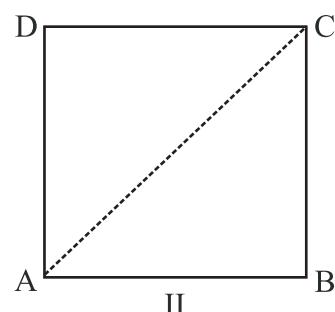
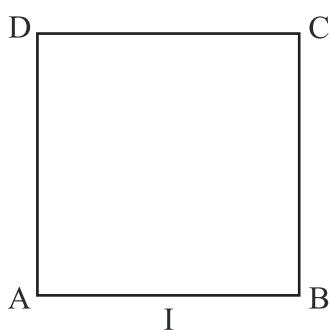
BA सिरे को मोड़कर AC पर रखें।



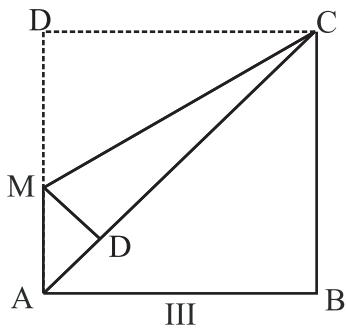
CD को मोड़कर AC की सीध पर रखें।

उलटने पर हम देखेंगे कि AMCN एक समांतर चतुर्भुज है।

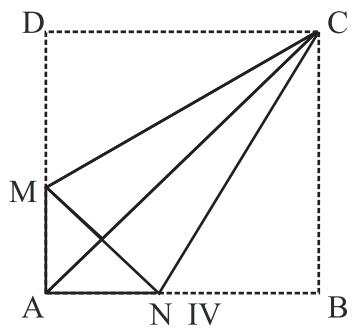
अब वर्गकार शीट से पतंग बनाते हैं।



शीट को विकर्ण AC की सीध में मोड़कर वापस खोला तो AC की क्रीज बन गयी।



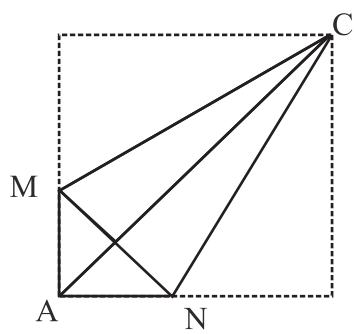
अब CD को AC पर मोड़ें।



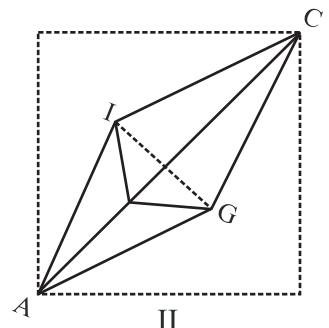
अब CB को AC पर मोड़ें।

उलटकर देखने पर पतंग ANCM मिलती है।

आओ वर्गाकार से समचतुर्भुज बनायें



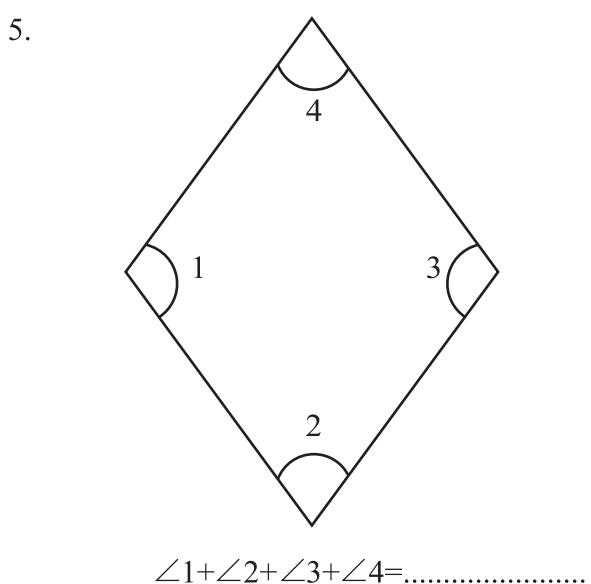
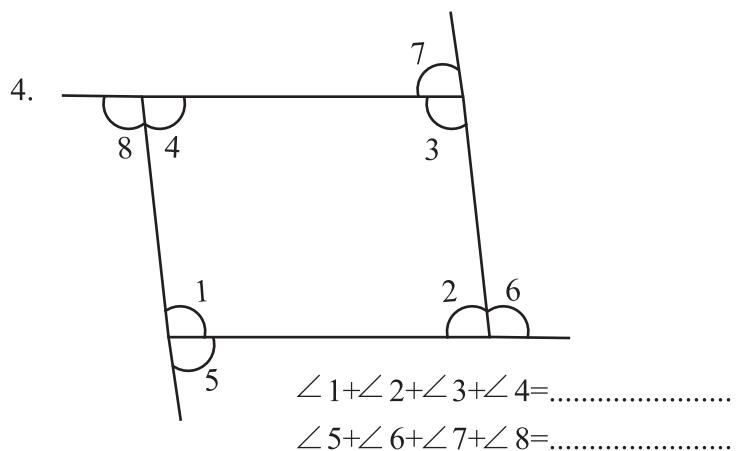
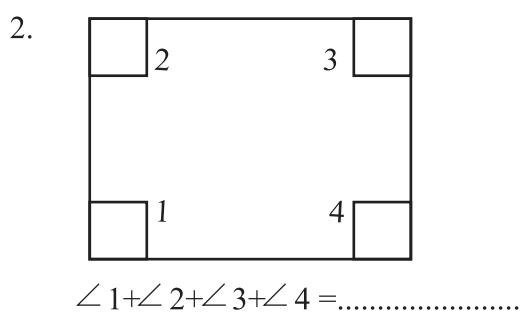
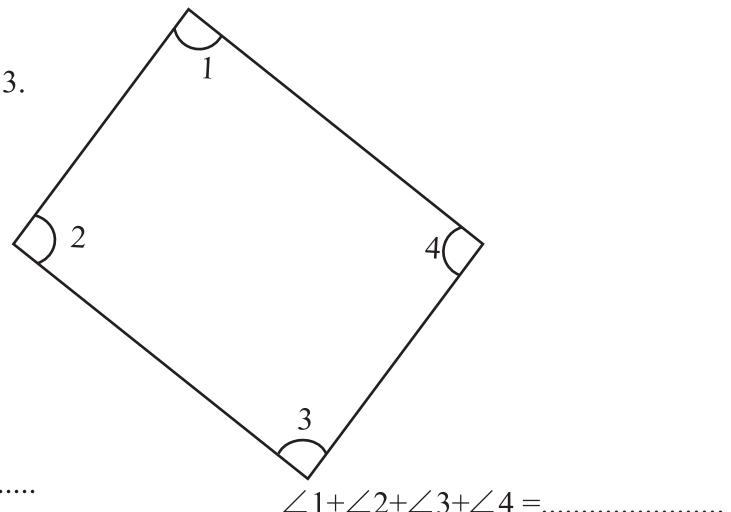
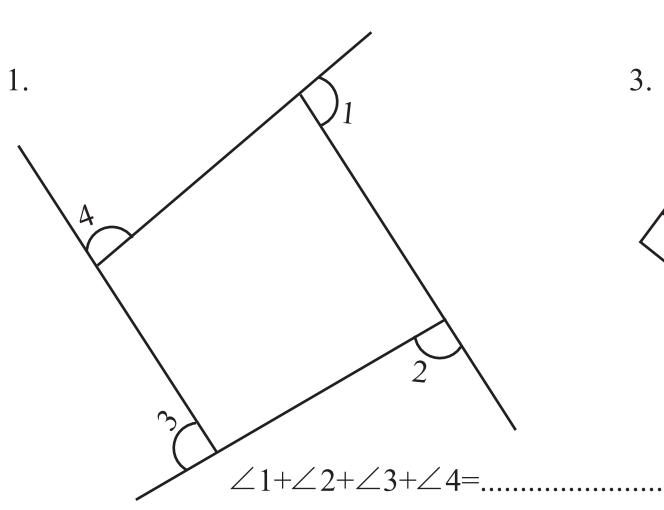
पहले पीछे दिये गये तरीके से पतंग बनायेंगे।



इसमें अगर AN को AC पर मोड़े तथा AM को भी AC पर मोड़ें तो समचतुर्भुज बन जाता है।

AGCI एक समचतुर्भुज है।

नीचे दिए गए प्रत्येक चतुर्भुज के बाह्य अथवा अन्तः कोणों को मापकर उनका योग लिखिए।



हम देख सकते हैं कि चतुर्भुज के अन्तः कोणों का योग 360° होता है तथा बाह्य कोणों का योग भी 360° होता है।

कहानी में गणित – 1

पतंगों का खेल

कल 15 अगस्त का दिन था! मेरे मोहल्ले के सभी दोस्तों ने पंतग उड़ाने का प्लान बनाया। सभी भीमा काका की दुकान से अलग—अलग रंग तथा अलग—अलग आकार की चतुर्भुजी पतंगें खरीदकर ले आए तथा पार्क में पतंगबाजी का खेल शुरू हो गया।

पार्क में एक बरगद का बड़ा पेड़ था। उसे सभी बच्चे बरगद बाबा कहते थे। बड़े बरगद के पेड़ के एक तरफ लड़कियों की टीम रीना, मीना, शीना तथा रानो थी तथा दूसरी तरफ मोहन, सोहन, राकेश तथा उमेश की टीम थी। दोनों टीमों में जबरदस्त मुकाबला चल रहा था कि कौन सी टीम ज्यादा देर तक पतंगबाजी के मुकाबले में टिकी रहेगी। जैसे ही पतंगें कटती, सभी बच्चे ज़ोर से शोर मचाते का ————— टे —————। और जैसे ही पतंगें उलझतीं, सभी बच्चे ज़ोर से शोर मचाते पे——चें —————।



- मोहन:-** रीना! तुम्हारी समचतुर्भुजी पतंग को तो मैं अभी काटने वाला हूँ क्योंकि तुम्हारी पतंग का माँजा (डोर) कच्चा है। ये कटी— ये कटी... ये देखो! बरगद बाबा पर झूल रही है।
- मीना:-** मोहन! अब तुम्हारी पतंग की खैर नहीं? अब तुम्हारी समलम्ब चतुर्भुजी पतंग..... ये देखो! बरगद बाबा की गोद में गई।
- सोहन:-** मोहन! तुम माँजे को ढील दो, मैं दूसरी टीम की एक और चतुर्भुजी पतंग काटता हूँ। हमें हर हाल में जीतना है। 'ये काटा'! मीना तुम्हारी पतंग बरगद बाबा की टहनियों में जा फँसी। हमारी टीम 2:1 से आगे!
- शीना:-** रीना और मीना! मेरी मदद करो माँजा खींचने में! नहीं तो राकेश मेरी पतंग में अपनी पतंग को उलझा लेगा।
- राकेश:-** पैंचें! दोनों की पतंगें साथ—साथ उड़ रही हैं। शीना! तुम्हारी तीराकार पतंग भी बरगद बाबा पर लहरा रही है। हमारी टीम 3:1 से आगे।
- रीना:-** बड़ी तेज हवा चल रही है। हवा ने सभी पतंगों को उलझा दिया है। पता नहीं किस—किसकी पतंग कटेगी तथा किसकी बचेगी।
- रानो:-** राकेश, उमेश और सोहन, देखो—देखो तुम सभी की क्रमशः वर्गाकार, आयताकार और समद्विबाहु समलंबी पतंगें बरगद बाबा की शोभा बढ़ा रही हैं। मीना! जरा माँजा सुलझाने में मेरी मदद करो शीना! तुम जरा माँजे को ढील दे दो।
- रीना:-** देखो हमारी टीम की पतंग दूर आकाश में जा रही है। हम जीत गए।

शाबाश रानो!

कहानी पढ़कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

- 1) रीना की पतंग का नाम :-
- 2) मोहन की पतंग का नाम:-
- 3) मीना की पतंग का नाम:-
- 4) शीना की पतंग का नाम:-
- 5) राकेश की पतंग का नाम:-
- 6) उमेश की पतंग का नाम:-
- 7) सोहन की पतंग का नाम:-
- 8) रानो की पतंग का नाम:-
- 9) बरगद बाबा पर कितनी पतंगें लटकी हुई थीं?
- 10) कैसा लगा अपको मेरे मोहल्ले का चतुर्भुजी पतंगबाजी का खेल?

कहानी में गणित – 2

बहुत दूर जंगल में एक बस्ती थी जिसमें अलग–2 तरह के चतुर्भुज रहते थे। कोई छोटा, कोई बड़ा, कोई—ऐसा कोई वैसा। अब उसमें एक चतुर्भुज था, जिसका नाम था समांतर चतुर्भुज। एक दिन वह चतुर्भुज खेलते—खेलते बहुत दूर निकल गया। तब उसे एक जादूगर मिला और वह बोला, “सुन समांतर चतुर्भुज, मैं तेरे प्रत्येक कोण 90° के बना दूँगा।” समांतर चतुर्भुज ने सोचा, जादूगर ने मुझे कैसे पहचाना? उसने डरते हुए जादूगर से कहा—“नहीं अंकल, आप मुझे छोड़ दें।” जादूगर बोला “चल ठीक है तो मैं तेरी चारों भुजाएँ बराबर कर देता हूँ।” समांतर चतुर्भुज ने फिर मना कर दिया। जादूगर बोला—“अच्छा चल मैं तेरी समांतर भुजाओं के एक जोड़े (युग्म) को समांतर नहीं रहने दूँगा।” समांतर चतुर्भुज ने फिर मना कर दिया। जादूगर बोला—“आज तो मैं तुम्हें ज़रूर बदलूँगा।” तब समांतर चतुर्भुज ने कहा कि मुझे ऐसा चतुर्भुज बनाओ कि मेरी दो अलग—अलग आसन्न भुजाओं के जोड़े बराबर हो जाएँ। ऐसा कहते ही वह चतुर्भुज उड़ गया और जादूगर से बच गया।

पहचानिए और उत्तर दीजिए:-

- 1) जादूगर ने समांतर चतुर्भुज को कैसे पहचाना होगा?

- 2) अगर जादूगर समांतर चतुर्भुज का प्रत्येक कोण 90° का कर देता तो कौन सा चतुर्भुज बनता?

- 3) अगर जादूगर समांतर चतुर्भुज की प्रत्येक भुजा बराबर कर देता तो कौन सा चतुर्भुज बनता?

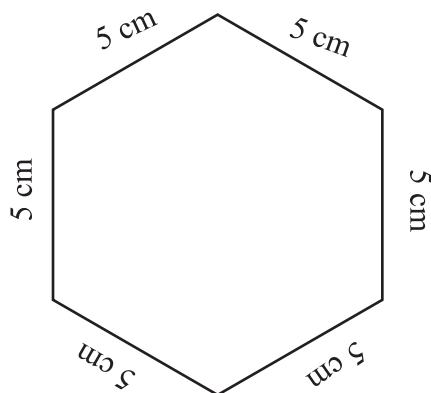
- 4) अगर जादूगर समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा के एक जोड़े को समांतर नहीं रहने देता तो कौन सा चतुर्भुज बनता?

- 5) अन्त में समांतर चतुर्भुज नए चतुर्भुज में बदलते ही क्यों उड़ गया?

- 6) क्या वह वर्ग बन गया? (हाँ/नहीं)

सम और विषम बहुभुज

1. एक वर्ग में अन्तः कोण तथा सभी भुजाएँ बराबर होती हैं। इसलिए यह समबहुभुज है।
2. इसी प्रकार समबाहु त्रिभुज में भी तीनों भुजाएँ समान तथा तीनों कोण 60° के होते हैं।
3. क्या आयत एक समबहुभुज है? (हाँ/नहीं) क्यों _____
4. क्या दी गई आकृति एक समबहुभुज है? (हाँ/नहीं) _____, आकृति का नाम _____

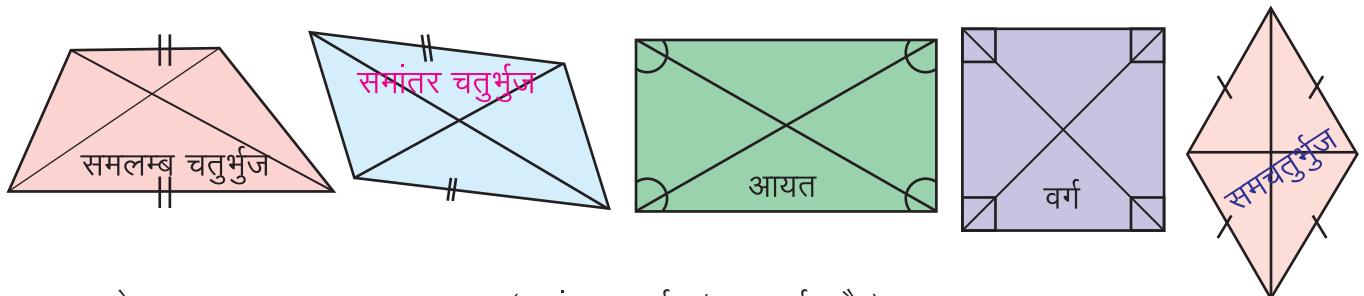


5. क्या एक समलंब चतुर्भुज एक समबहुभुज है? (हाँ/नहीं) _____, क्यों _____
6. क्या एक समकोण त्रिभुज समबहुभुज है? (हाँ/नहीं) _____, क्यों _____

चतुर्भुजों के विभिन्न गुणों के आधार पर निम्न तालिका में उचित स्थान पर ✓ अथवा ✗ का चिह्न लगाएँ।

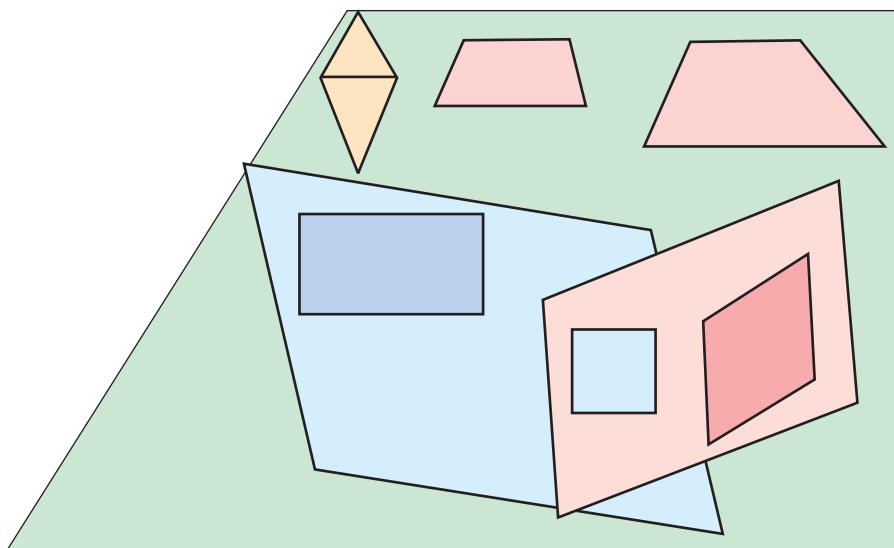
चतुर्भुजों के विभिन्न गुण	सम्मुख भुजाएँ समान हैं। समानान्तर भुजाएँ हैं।	सम्मुख कोण समान हैं। समानान्तर भुजाएँ हैं।	विकर्ण एक दूसरे पर लम्ब हैं।	विकर्ण एक समान (बराबर) हैं।	सभी कोण समकोण (लम्बकोण) हैं।	सभी भुजाएँ समान/बराबर हैं।	आसन्न भुजाएँ बराबर हैं।
1. समांतर चतुर्भुज							
2. आयत							
3. समचतुर्भुज							
4. वर्ग							
5. समलम्ब							
6. पंतग							

नीच दी गई आकृति को ध्यान से देखिए तथा रिक्त स्थान में सही उत्तर भरिए।



- 1) प्रत्येक आयत एक (समांतर चतुर्भुज/समचतुर्भुज है।)
- 2) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज एक (समलंब चतुर्भुज/आयत है।)
- 3) प्रत्येक समचतुर्भुज एक (पतंग/समलंब चतुर्भुज है।)
- 4) प्रत्येक आयत के विकर्ण एक दूसरे को (असमान/बराबर बाँटते हैं।)
- 5) के विकर्ण बराबर होते हैं तथा एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। (समचतुर्भुज/वर्ग)

निम्न चित्र को ध्यान से देखिए तथा सोचिए और लिखिए।



- 1) समलंब एक समांतर चतुर्भुज, एक आयत, वर्ग तथा समचतुर्भुज से अलग है क्योंकि
- 2) एक समचतुर्भुज एक आयत से अलग है क्योंकि
- 3) एक वर्ग एक समचतुर्भुज से अलग है। क्योंकि
- 4) एक आयत एक वर्ग से अलग है क्योंकि

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

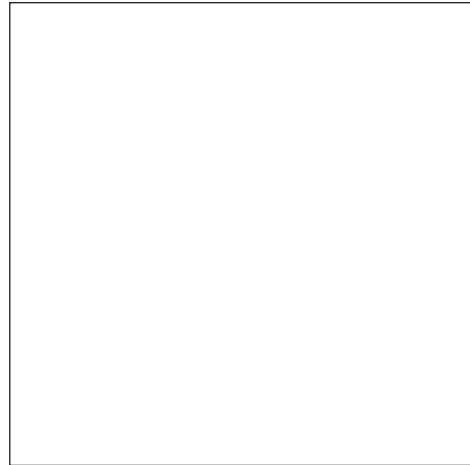
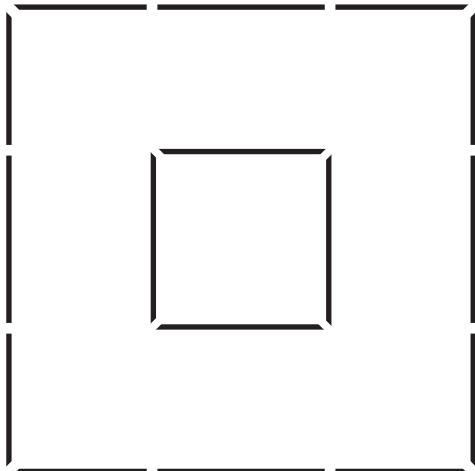
1. विभिन्न बहुभुजों का उनकी भुजाओं के आधार पर वर्गीकरण।
2. बहुभुज के अन्तःकोण व बाह्य कोण का नामकरण करना।
3. आसापास के वातावरण में विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों को पहचान कर उनके गुणों को सत्यापित करना।
4. समान्तर चतुर्भुज के गुणों के आधार पर उनके अवयवों के बीच सम्बन्ध स्थापित करना।

अध्याय 4 - वर्ग और वर्गमूल

आइए आज हम स्ट्रॉ से कुछ खेल खेलते हैं।

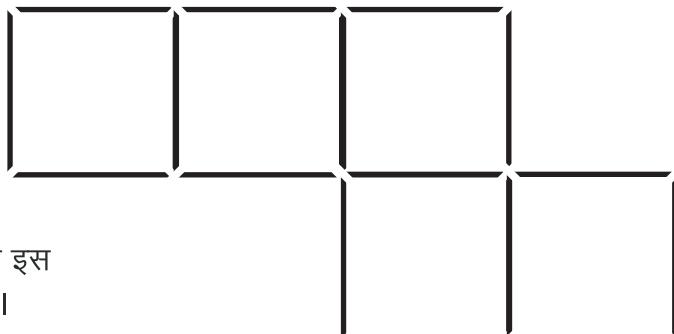
- (1) 16 स्ट्रॉ लें और उन्हें नीचे दी गई आकृति के अनुसार लगाएँ।

आकृति बनाएँ



अब क्या हम ऊपर दी गई आकृति में चार स्ट्रॉ को उठाकर इस तरह से लगा सकते हैं कि नई आकृति में केवल 3 वर्ग बनें।

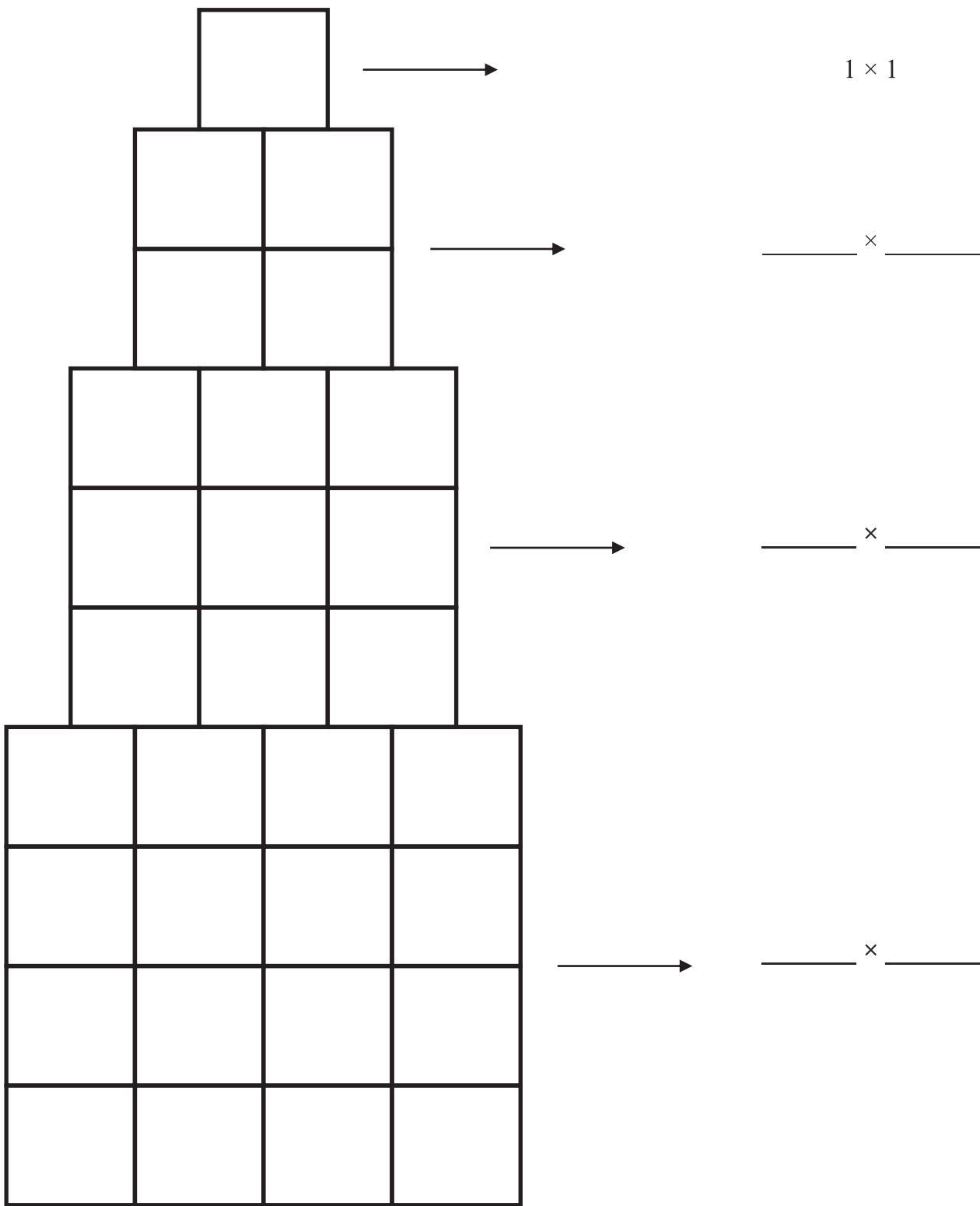
- (2) अब स्ट्रॉ को नीचे दी गई आकृति के हिसाब से लगाएँ।



अब क्या हम ऊपर दी गई आकृति में दो स्ट्रॉ को उठाकर इस तरह से लगा सकते हैं कि नई आकृति में 6 वर्ग बनें।

ऊपर दी गई समस्याओं के हल जानने के लिए अध्याय के अंत में जाएँ।

नीचे दिए गए टॉवर में वर्गों को गिनकर उसके सामने दिए पैटर्न को पूरा कीजिए:



इस प्रकार हम देख सकते हैं कि संख्या 1, 4, 9, 16, 25 कुछ विशेष प्रकार की संख्याएँ हैं, जो हमें वर्ग का क्षेत्रफल निकालने से प्राप्त हुई हैं।

इसलिए हम इन संख्याओं को पूर्ण वर्ग संख्या (Perfect Square Number) कहते हैं।

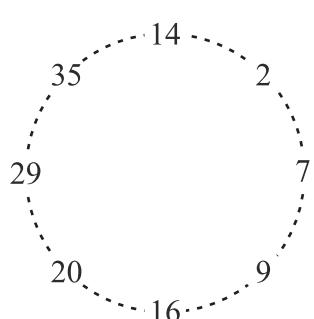
पूर्ण वर्ग संख्या को दिए गए उदाहरण के रूप में दर्शाते हुए खाली स्थान भरिए।

वर्ग संख्या	विस्तारित रूप	घातांकीय रूप
1	1×1	1^2
4	2×2	2^2
9	$_ \times _$	$_$
16	$_ \times _$	$_$
25	$_ \times _$	$_$

वर्ग संख्या	विस्तारित रूप	घातांकीय रूप
36	6×6	6^2
49	$_ \times _$	$_$
$_$	8×8	$_$
$_$	9×9	$_$
$_$	10×10	$_$

आओ देखें:-

नीचे दी गई संख्याओं के बीच में दो साथ में दी गई संख्याएँ एक पूर्ण वर्ग बनाती हैं।



उदाहरण के तौर पर

$$\begin{aligned}
 14 + 2 &= 16 = 4^2 \\
 2 + 7 &= 9 = \\
 7 + 9 &= 16 = \\
 9 + 16 &= 25 = \\
 16 + 20 &= 36 = \\
 20 + 29 &= 49 = \\
 29 + 35 &= 64 = \\
 35 + 14 &= 49 =
 \end{aligned}$$

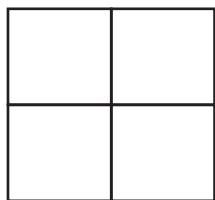
क्रियाकलाप

आओ करें:-

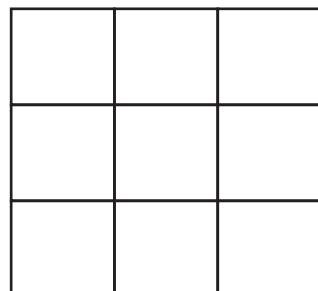
सामग्री:- पैमाना, ग्राफ़ पेपर



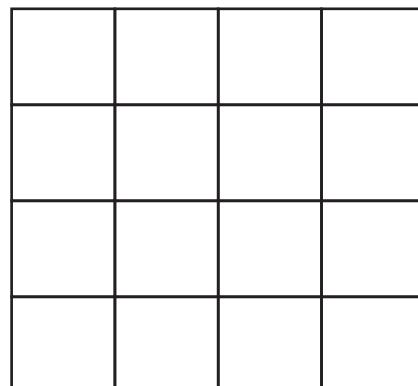
(a)



(b)



(c)



(d)

ग्राफ़ पेपर पर कुछ वर्ग बनवाएँ तथा उसके अन्दर आए वर्गों को छात्रों को गिनने के लिए कहें जैसे:-

आकृति (a) के अन्दर आए वर्गों की संख्या

आकृति (b) के अन्दर आए वर्गों की संख्या

आकृति (c) के अन्दर आए वर्गों की संख्या

आकृति (d) के अन्दर आए वर्गों की संख्या

आइए इन आकृतियों (a), (b), (c) तथा (d) को दोबारा देखते हैं:-



(a)

1	2
3	4

(b)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(c)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(d)

आकृति (a) में $1 = 1 \times 1$

आकृति (b) में $4 = 2 \times 2$

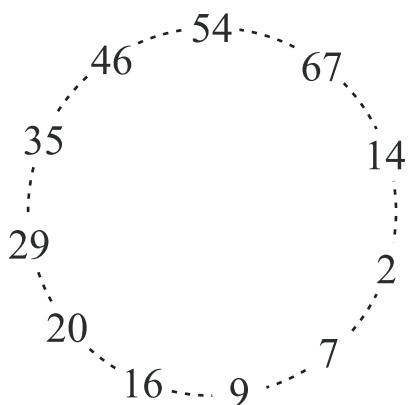
आकृति (c) में $9 = 3 \times 3$

आकृति (d) में $16 = 4 \times 4$

इस प्रकार हम देख सकते हैं कि संख्या $1, 4, 9, 16, 25$ आदि कुछ विशेष प्रकार की संख्याएँ हैं, जो हमें वर्ग का क्षेत्रफल निकालने से प्राप्त हुई हैं।

इसलिए हम इन संख्याओं को पूर्ण वर्ग संख्या (Perfect Square Numbers) कहते हैं।

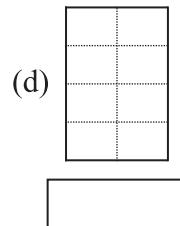
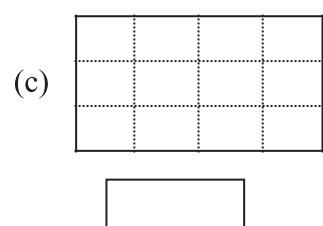
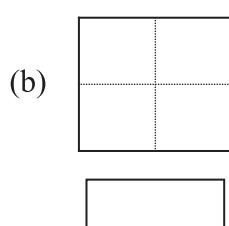
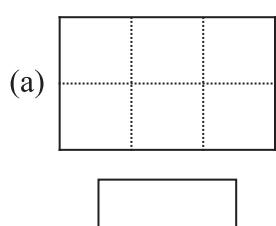
आइए अब नीचे दी गई संख्याओं के बीच में पूर्ण वर्ग संख्याएं देखें।



$$54 + 67 = \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

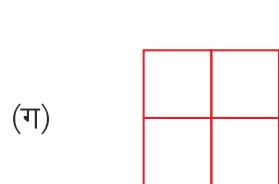
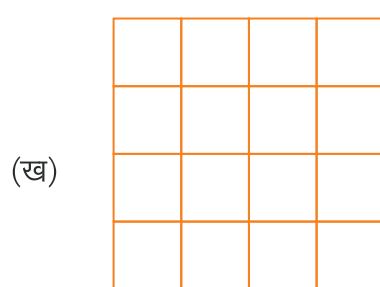
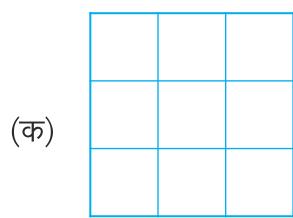
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

प्र०1. वर्ग आकृति के नीचे (✓) का निशान लगाइए अन्यथा (✗) लगाइए।



प्र०2. दिए गए उदाहरण के अनुसार, वर्ग आकृतियों
का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

एक वर्ग इकाई →



$$\begin{aligned} \text{क्षेत्रफल} &= 3 \times 3 \\ &= 9 \text{ वर्ग इकाई} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{क्षेत्रफल} &= \underline{\quad} \times \underline{\quad} \\ &= \underline{\quad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{क्षेत्रफल} &= \underline{\quad} \times \underline{\quad} \\ &= \underline{\quad} \end{aligned}$$

प्र०3. सारणी को पूरा कीजिए :-

वर्ग की भुजा का माप	वर्ग का क्षेत्रफल
1 इकाई	$1 \text{ इकाई} \times 1 \text{ इकाई} = 1 \text{ वर्ग इकाई}$
2 इकाई	$2 \text{ इकाई} \times 2 \text{ इकाई} = 4 \text{ वर्ग इकाई}$
3 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$
4 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$
5 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$

वर्ग की भुजा	वर्ग का क्षेत्रफल
6 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$
7 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$
8 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$
9 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$
10 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$

सारणी को पूरा कीजिए

संख्या	वर्ग संख्या	संख्या	वर्ग संख्या	संख्या	वर्ग संख्या
1	→ 1	8	→ _____	15	→ _____
2	→ 4	9	→ _____	16	→ _____
3	→ 9	10	→ _____	17	→ _____
4	→ _____	11	→ _____	18	→ _____
5	→ _____	12	→ _____	19	→ _____
6	→ _____	13	→ _____	20	→ _____
7	→ _____	14	→ _____	21	→ _____

ऊपर दी गई वर्ग संख्याओं को देखिए और प्रश्नों के उत्तर दीजिए :-

प्र०1. वर्ग संख्या के इकाई स्थान पर कौन–कौन से अंक आए हैं।

उ० _____, _____, _____, _____, _____, _____

प्र०2. क्या हम उन अंको को लिख सकते हैं जो किसी भी वर्ग संख्या के इकाई स्थान पर एक बार भी नहीं आए हैं।

उ० _____, _____, _____, _____

नीचे दिए गए कथनों में सही कथन के लिए बॉक्स में ‘सही’, गलत कथन के लिए ‘गलत’ लिखिए।

(a) जिस संख्या का इकाई अंक 0, 1, 4, 5, 6 या 9 है, वह वर्ग संख्या हो सकती है।

(b) जिस संख्या का इकाई अंक 2, 3, 7 या 8 है, वह वर्ग संख्या हो सकती है।

इकाई स्थान के आधार पर, उन संख्याओं पर गोला कीजिए जो पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हैं।

1057, 1069, 1782, 61323, 2025, 878, 641

आइए, संख्याओं का वर्ग ज्ञात करना सीखें।

संख्या	गुणन विधि	वितरण गुण के प्रयोग द्वारा
13^2	$ \begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ 13 \times \\ \hline 169 \end{array} $	$ \begin{aligned} 13^2 &= (10+3)^2 \\ &= (10+3)(10+3) \\ &= 10(10+3)+3(10+3) \\ &= 100+30+30+9 \\ &= 169 \end{aligned} $
18^2	$ \begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline \end{array} $	$ \begin{aligned} 18^2 &= (20 - 2)^2 \\ &= (20 - 2)(20 - 2) \\ &= 20(20 - 2) - 2(20 - 2) \\ &= 400 - 40 - 40 + 4 \\ &= 400 - 80 + 4 \\ &= 404 - 80 = 324 \end{aligned} $
19^2	$ \begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline \end{array} $	$ \begin{aligned} 23^2 &= (20 + 3)(20 + 3) \\ &= 20(20 + 3) + 3(20 + 3) \\ &= 400 + 60 + 60 + 9 \\ &= 400 + 120 + 9 \\ &= 529 \end{aligned} $
23^2	$ \begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline \end{array} $	$ \begin{aligned} 19^2 &= (20 - 1)(20 - 1) \\ &= 20(20 - 1) - 1(20 - 1) \\ &= 400 - 20 - 20 + 1 \\ &= 400 - 40 + 1 \\ &= 401 - 40 = 361 \end{aligned} $

संख्याओं के वर्ग निकालने के लिए प्रयोग की गई दोनों विधियों को अपने साथियों एवं शिक्षक के साथ मिलकर समझने का प्रयास कीजिए।

⇒ प्रतिरूप (पैटर्न) को समझकर, इकाई 5 वाली संख्या का वर्ग ज्ञात कीजिए :-

आओ देखें:-

$$15^2 = (1 \times 2) \ 5^2 = 225$$

$$25^2 = (2 \times 3) \ 5^2 = 625$$

$$35^2 = (3 \times 4) \ 5^2 = 1225$$

$$45^2 = (4 \times 5) \ 5^2 = 2025$$

$$55^2 = (5 \times 6) \ 5^2 = \text{-----}$$

$$65^2 = (- \times -) \ 5^2 = \text{-----}$$

$$75^2 = (- \times -) = \text{-----}$$

$$85^2 = \text{-----} = \text{-----}$$

$$95^2 = \text{-----} = \text{-----}$$

$$105^2 = \text{-----} = \text{-----}$$

विषम संख्याओं का योग

विषम संख्याओं का योग	कितनी क्रमागत संख्याओं का योग	योग	वर्ग रूप
(a) 1	एक विषम संख्या का योग	1	1^2
(b) 1+3	पहली दो विषम संख्याओं का योग	4	2^2
(c) 1+3+5	पहली तीन विषम संख्याओं का योग	9	3^2
(d) 1+3+5+7	पहली चार विषम संख्याओं का योग	—	—
(e) 1+3+5+7+9	_____	—	—
(f) 1+3+5+7+9+11	_____	—	—
(g) _____	_____	—	7^2
(h) _____	पहली आठ विषम संख्याओं का योग	—	—
(i) _____	पहली नौ विषम संख्याओं का योग	—	—
(j) _____	_____	—	10^2

वर्गमूल

वर्गमूल

शाब्दिक अर्थ

वर्ग का मूल



वर्ग जिस संख्या से प्राप्त हुआ

रिक्त स्थान भरिए

$$1^2 = 1 \Rightarrow 1 \text{ का वर्गमूल} = 1$$

$$2^2 = 4 \Rightarrow 4 \text{ का वर्गमूल} = 2$$

$$3^2 = 9 \Rightarrow 9 \text{ का वर्गमूल} = \underline{\quad}$$

$$4^2 = 16 \Rightarrow \underline{\quad} = 4$$

$$5^2 = 25 \Rightarrow \underline{\quad} = 5$$

$$6^2 = 36 \Rightarrow \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$7^2 = 49 \Rightarrow \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$8^2 = \underline{\quad} \Rightarrow \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad} = 81 \Rightarrow \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

गणितीय रूप में लिखिए

$$5 \text{ का वर्ग} = 5^2$$

$$9 \text{ का वर्ग} = 9^2$$

$$3 \text{ का वर्ग} = \underline{\quad}$$

$$11 \text{ का वर्ग} = \underline{\quad}$$

$$13 \text{ का वर्ग} = \underline{\quad}$$

$$15 \text{ का वर्ग} = \underline{\quad}$$

$$20 \text{ का वर्ग} = \underline{\quad}$$

$$25 \text{ का वर्गमूल} = \sqrt{25}$$

$$81 \text{ का वर्गमूल} = \sqrt{81}$$

$$9 \text{ का वर्गमूल} = \underline{\quad}$$

$$121 \text{ का वर्गमूल} = \underline{\quad}$$

$$169 \text{ का वर्गमूल} = \underline{\quad}$$

$$225 \text{ का वर्गमूल} = \underline{\quad}$$

$$400 \text{ का वर्गमूल} = \underline{\quad}$$

दिए गए उदाहरण की मदद से वर्ग की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए

(1) एक वर्ग इकाई 

$$\sqrt{4} = \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}} = 2$$

वर्ग का क्षेत्रफल = 4 वर्ग इकाई
भुजा की लंबाई = _____

(2) एक वर्ग इकाई 

$$\sqrt{9} = \boxed{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array}} = 3$$

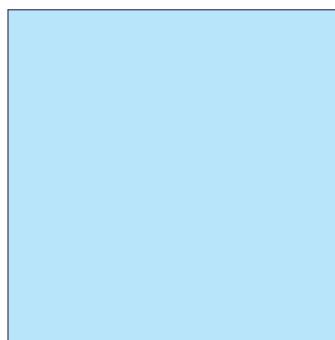
वर्ग का क्षेत्रफल = 9 वर्ग इकाई
भुजा की लंबाई = _____

(3)



वर्ग का क्षेत्रफल = 25 वर्ग इकाई
भुजा की लंबाई = _____

(4)



वर्ग का क्षेत्रफल = 49 वर्ग इकाई
भुजा की लंबाई = _____

वर्ग की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए

वर्ग का क्षेत्रफल	भुजा
4 वर्ग इकाई	2 इकाई
9 वर्ग इकाई	3 इकाई
16 वर्ग इकाई	_____
36 वर्ग इकाई	_____
64 वर्ग इकाई	_____
100 वर्ग इकाई	_____
144 वर्ग इकाई	_____
121 वर्ग इकाई	_____

सही मिलान कीजिए

- | | |
|--|--|
| a) <input type="text" value=""/>
$\sqrt{121}$ | 1) <input type="text" value=""/>
12 |
| b) <input type="text" value=""/>
$\sqrt{196}$ | 2) <input type="text" value=""/>
25 |
| c) <input type="text" value=""/>
$\sqrt{361}$ | 3) <input type="text" value=""/>
15 |
| d) <input type="text" value=""/>
$\sqrt{144}$ | 4) <input type="text" value=""/>
20 |
| e) <input type="text" value=""/>
$\sqrt{225}$ | 5) <input type="text" value=""/>
14 |
| f) <input type="text" value=""/>
$\sqrt{169}$ | 6) <input type="text" value=""/>
11 |
| g) <input type="text" value=""/>
$\sqrt{400}$ | 7) <input type="text" value=""/>
19 |
| h) <input type="text" value=""/>
$\sqrt{625}$ | 8) <input type="text" value=""/>
13 |

अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करते हुए वर्ग रूप ज्ञात कीजिए:-

संख्या	अभाज्य गुणनखंड	वर्ग रूप											
36	$2 \times 2 \times 3 \times 3$	$2^2 \times 3^2$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>36</td></tr> <tr><td>2</td><td>18</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td></td><td>1</td></tr> </table>	2	36	2	18	3	9	3	3		1
2	36												
2	18												
3	9												
3	3												
	1												
64			<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>81</td></tr> <tr><td></td><td>144</td></tr> </table>		81		144						
	81												
	144												
81													
144													

अभाज्य गुणनखंड द्वारा वर्गमूल ज्ञात कीजिए :-

संख्या	वर्गमूल	अभाज्य गुणनखंड	वर्गमूल																			
a) 2401	$\sqrt{2401}$	$= \sqrt{7 \times 7 \times 7 \times 7}$	$= 7 \times 7 = 49$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>7</td><td>2401</td></tr> <tr><td>7</td><td>343</td></tr> <tr><td>7</td><td>49</td></tr> <tr><td>7</td><td>7</td></tr> <tr><td></td><td>1</td></tr> </table>	7	2401	7	343	7	49	7	7		1								
7	2401																					
7	343																					
7	49																					
7	7																					
	1																					
b) 256	$\sqrt{256}$	$= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$	$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>256</td></tr> <tr><td>2</td><td>128</td></tr> <tr><td>2</td><td>64</td></tr> <tr><td>2</td><td>32</td></tr> <tr><td>2</td><td>16</td></tr> <tr><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>1</td></tr> </table>	2	256	2	128	2	64	2	32	2	16	2	8	2	4	2	2		1
2	256																					
2	128																					
2	64																					
2	32																					
2	16																					
2	8																					
2	4																					
2	2																					
	1																					
c) 1296	$\sqrt{\quad}$	$= \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad}$	$= \underline{\quad}$																			
d) 729	$\sqrt{\quad}$	$= \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad}$	$= \underline{\quad}$																			

भाग विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करें।

$\begin{array}{r} 35 \\ 3 \sqrt{1225} \\ \hline 9 \\ 325 \\ 325 \\ \times \end{array}$	1. $\sqrt{729}$ 2. $\sqrt{4096}$ 3. $\sqrt{2304}$ 4. $\sqrt{256}$
--	--

वर्गमूल पर आधारित समस्याएँ

(1) आपके पास एक वर्गाकार कंबल है,
जिसका क्षेत्रफल 1600 वर्ग सेमी. है।



कंबल की भुजा की
लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल

एक वर्गाकार बगीचे का क्षेत्रफल
400 वर्ग मीटर है।



बगीचे की भुजा की लंबाई
निकालिए।

हल

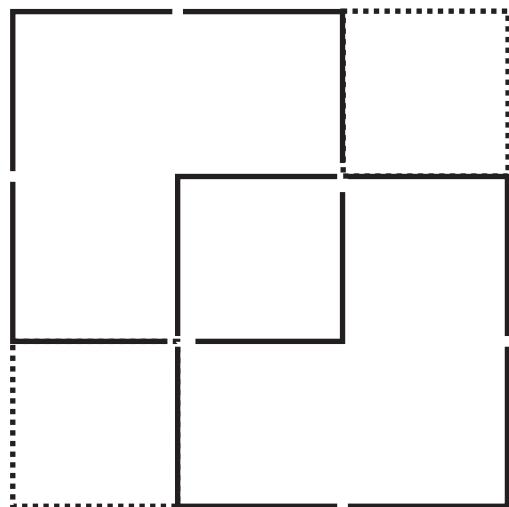
एक वर्गाकार प्लॉट का क्षेत्रफल
625 वर्ग फुट है।



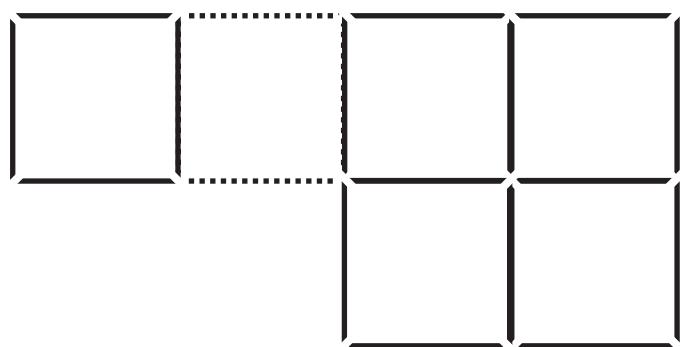
इस प्लॉट की भुजा की लंबाई
क्या होगी?

हल

अध्याय के बीच में दी गई स्ट्रॉ वाली समस्या एक का हल

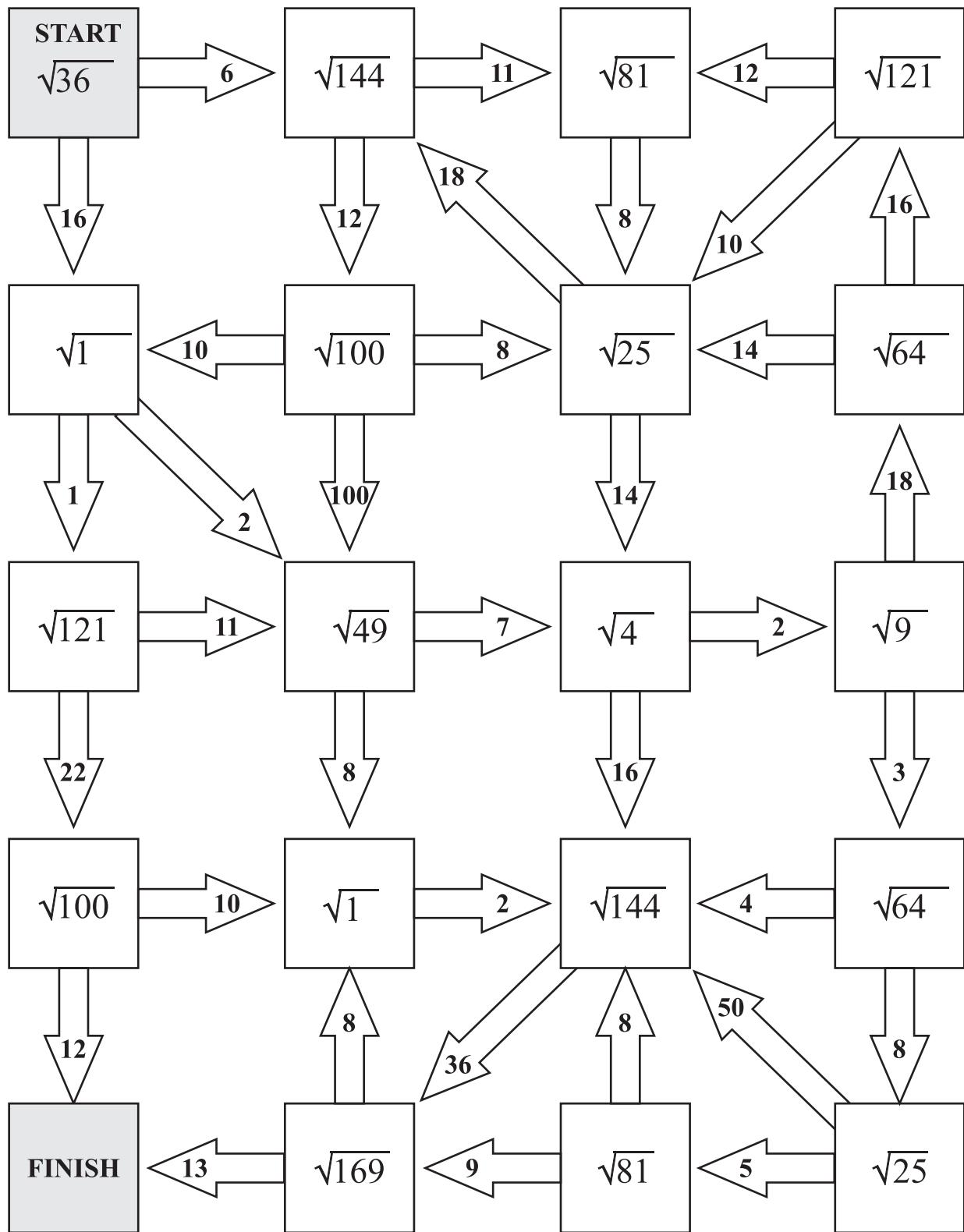


समस्या दो का हल



वर्गमूल MAZE

सही आकलन करते हुए START से प्रारंभ कर FINISH तक पहुँचें।



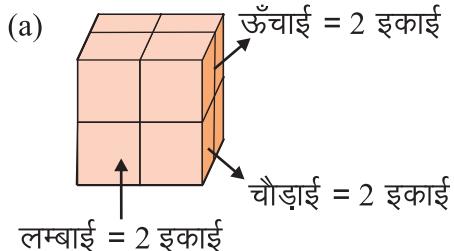
Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

1. दी गई संख्या का वर्ग निकालना।
2. संख्याओं के इकाई अंक के आधार पर वर्ग संख्या को पहचानना।
3. वर्ग संख्याओं के अन्त में शून्यों की संख्या केवल सम होती है, इसकी जानकारी होना।
4. वर्गमूल, वर्ग की प्रतिलोम (उल्टी) संक्रिया है।

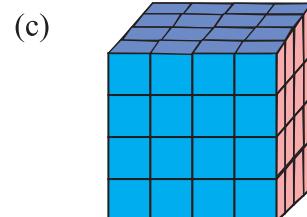
अध्याय 5 – घन और घनमूल

आओ करें:-

→ नीचे दी गई आकृतियों का आयतन ज्ञात करते हैं:-



एक घन इकाई =



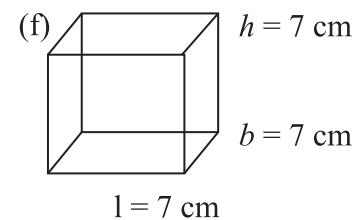
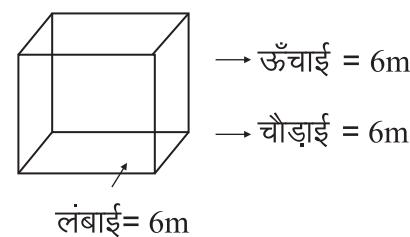
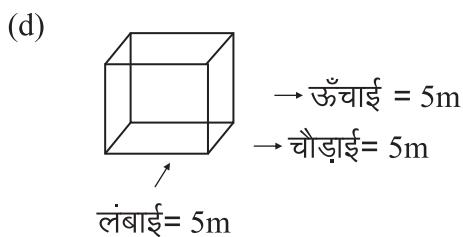
$$\begin{aligned} \text{लम्बाई} &= \underline{\hspace{2cm}} \text{ इकाई} \\ \text{चौड़ाई} &= \underline{\hspace{2cm}} \text{ इकाई} \\ \text{ऊँचाई} &= \underline{\hspace{2cm}} \text{ इकाई} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{लम्बाई} &= \underline{\hspace{2cm}} \text{ इकाई} \\ \text{चौड़ाई} &= \underline{\hspace{2cm}} \text{ इकाई} \\ \text{ऊँचाई} &= \underline{\hspace{2cm}} \text{ इकाई} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{आयतन} &= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \\ &= \underline{8} \text{ घन इकाई} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{आयतन} &= \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} \\ &= \underline{\hspace{3cm}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{आयतन} &= \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} \\ &= \underline{\hspace{3cm}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{आयतन} &= \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} \\ &= \underline{\hspace{3cm}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{आयतन} &= \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} \\ &= \underline{\hspace{3cm}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{आयतन} &= \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} \\ &= \underline{\hspace{3cm}} \end{aligned}$$

सारणी को पूरा कीजिए

घन की भुजा की माप	घन का आयतन
1 इकाई	$1 \times 1 \times 1 = 1$ घन इकाई
2 इकाई	$2 \times 2 \times 2 = 8$ घन इकाई
3 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$
4 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$
5 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$

घन की भुजा की माप	घन का आयतन
6 इकाई	$6 \times 6 \times 6 = 216$ घन इकाई
7 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$
8 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$
9 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$
10 इकाई	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$

इस प्रकार हम देख सकते हैं कि

संख्या 1, 8, 27, 64, 125 ...
कुछ विशेष प्रकार की संख्याएँ हैं, जो हमें घन का आयतन ज्ञात करते हुए प्राप्त हुई हैं।



इसलिए इन संख्याओं को पूर्ण घन संख्या (Perfect Cube) कहते हैं।

पूर्ण घन संख्या को दिए गए रूप में दर्शाइए :-

घन संख्या	विस्तारित रूप/घातांकीय रूप
1	$1 \times 1 \times 1 = 1^3$
8	$2 \times 2 \times 2 = 2^3$
27	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$
64	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$
_____	$5 \times 5 \times 5 = \underline{\quad}$

घन संख्या	विस्तारित रूप/घातांकीय रूप
_____	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 6^3$
_____	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 7^3$
512	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 8^3$
729	$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$
_____	$10 \times 10 \times 10 = \underline{\quad}$

संख्याओं का पूर्ण घन ज्ञात करना

रिक्त स्थान भरिए

संख्या	पूर्ण घन				पूर्ण घन संख्या
11	11^3	=	$11 \times 11 \times 11$	=	121×11 = 1331
12		=	$12 \times 12 \times 12$	=	144×12 =
13	13^3	=		=	
14	14^3	=		=	
15		=		=	

पूर्ण घन संख्याओं की जाँच

संख्या	अभाज्य गुणनखंड	घातांकीय रूप	संख्या क्या पूर्ण घन है?
27	$3 \times 3 \times 3$	3^3	हाँ
500	$2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$	$2^2 \times 5^3$	नहीं
121			
400			
1000			
343			

घनमूल

शाब्दिक अर्थ

घन का मूल



घन संख्या जिस संख्या से प्राप्त हुई

रिक्त स्थान भरिए

घन संख्या

$$1^3 = \underline{1}$$

$$2^3 = \underline{8}$$

$$3^3 = \underline{27}$$

$$4^3 = \underline{64}$$

$$5^3 = \underline{\quad}$$

घनमूल संख्या

$$1 \text{ का घनमूल} = 1$$

$$8 \text{ का घनमूल} = 2$$

$$27 \text{ का घनमूल} = \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad} = 4$$

$$\underline{\quad} = 5$$

गणितीय रूप में लिखिए:

$$7 \text{ का घन} = 7^3$$

$$343 \text{ का घनमूल} = \sqrt[3]{343}$$

$$6 \text{ का घन} = 6^3$$

$$216 \text{ का घनमूल} = \sqrt[3]{216}$$

$$3 \text{ का घन} = \underline{\quad}$$

$$27 \text{ का घनमूल} = \underline{\quad}$$

$$10 \text{ का घन} = \underline{\quad}$$

$$1000 \text{ का घनमूल} = \underline{\quad}$$

$$9 \text{ का घन} = \underline{\quad}$$

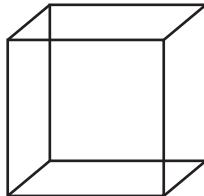
$$729 \text{ का घनमूल} = \underline{\quad}$$

संख्या के घनमूल का
गणितीय संकेत:-

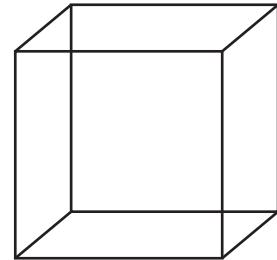
$\sqrt[3]{\text{संख्या}}$

घन की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए

(a)



(b)



$$\text{घन का आयतन} = 64 \text{ घन इकाई}$$

$$\text{भुजा की लंबाई} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ इकाई}$$

$$\text{घन का आयतन} = 512 \text{ घन इकाई}$$

$$\text{भुजा की लंबाई} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ इकाई}$$

सारणी को पूरा कीजिए

घन का आयतन	भुजा
8 घन इकाई	2 इकाई
125 घन इकाई	
216 घन इकाई	
27 घन इकाई	

अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा घनमूल

संख्या	घनमूल	अभाज्य गुणनखंड	घनमूल संख्या
a) 1331	$\sqrt[3]{1331}$	$\sqrt[3]{11 \times 11 \times 11}$	= 11
b) 1000	$\sqrt[3]{1000}$	$\sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5}$	= $2 \times 5 = 10$
c) 125	<u> </u>	<u> </u>	= <u> </u>
d) 3375	<u> </u>	<u> </u>	= <u> </u>
e) 1728	<u> </u>	<u> </u>	= <u> </u>

सही मिलान कीजिए

a) $\sqrt[3]{27}$

b) $\sqrt[3]{216}$

c) $\sqrt[3]{8000}$

d) $\sqrt[3]{343}$

e) $\sqrt[3]{1331}$

f) $\sqrt[3]{512}$

1) 20

2) 7

3) 11

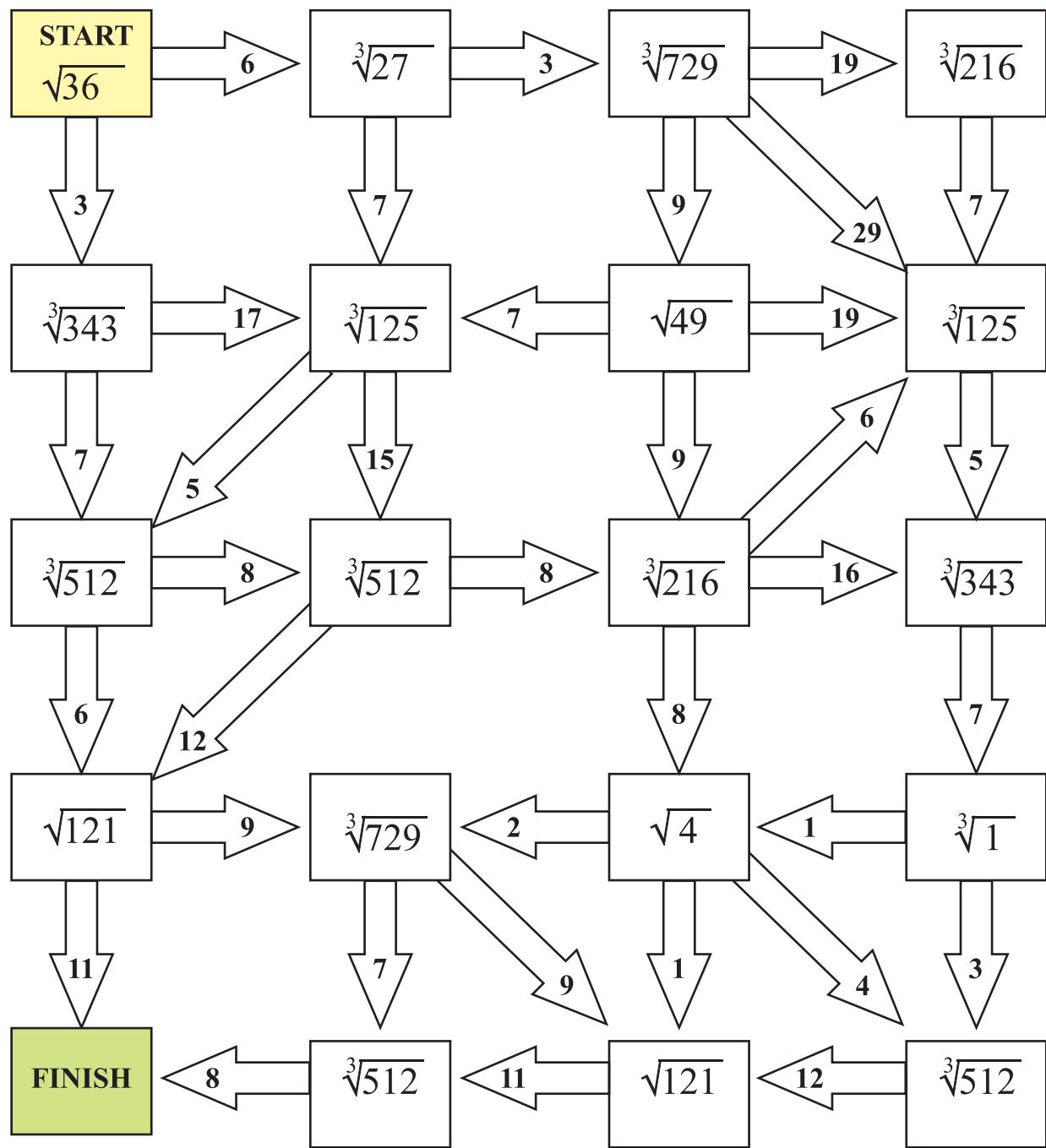
4) 6

5) 8

6) 3

Square Root / Cube Root Maze

START से प्रारंभ कर सभी आकलन करते हुए FINISH तक पहुँचे



Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

1. एक संख्या को स्वयं से ही तीन बार गुणा करने पर प्राप्त संख्या घन संख्या कहलाती है।
2. अभाज्य गुणखण्ड विधि से पूर्ण घन संख्या के बारे में पता किया जा सकता है।

अध्याय 6 – ऑकड़ों का प्रबंधन

हम जानते हैं कि जब सूचनाएँ किसी प्रयोजन से पहचानी और एकत्र की जाती हैं तो आँकड़े बनाती हैं।

आइए हम भी कुछ ऑकड़े एकत्रित करते हैं।

कक्षा के सभी विद्यार्थियों के जन्म के महीने से संबंधित आँकड़े एकत्रित करेंगे तथा नीचे दिए गए स्थान पर लिखेंगे।

प्राथमिक आँकडे (Primary Data)

हमने छात्रों के जन्म के महीने से संबंधित प्राथमिक ऑकड़े एकत्रित कर लिए हैं।

आइए अब हम इन प्राथमिक आँकड़ों को और अधिक व्यवस्थित रूप में लिखने के लिए, इनकी बारंबारता बंटन सारणी बनाते हैं।

अगर आप मिलान चिह्न और बारंबारता बंटन सारणी के बारे में नहीं जानते हैं तो अपने अध्यापक से इसकी चर्चा कीजिए।

बारंबारता बंटन सारणी (Frequency Distribution Table)

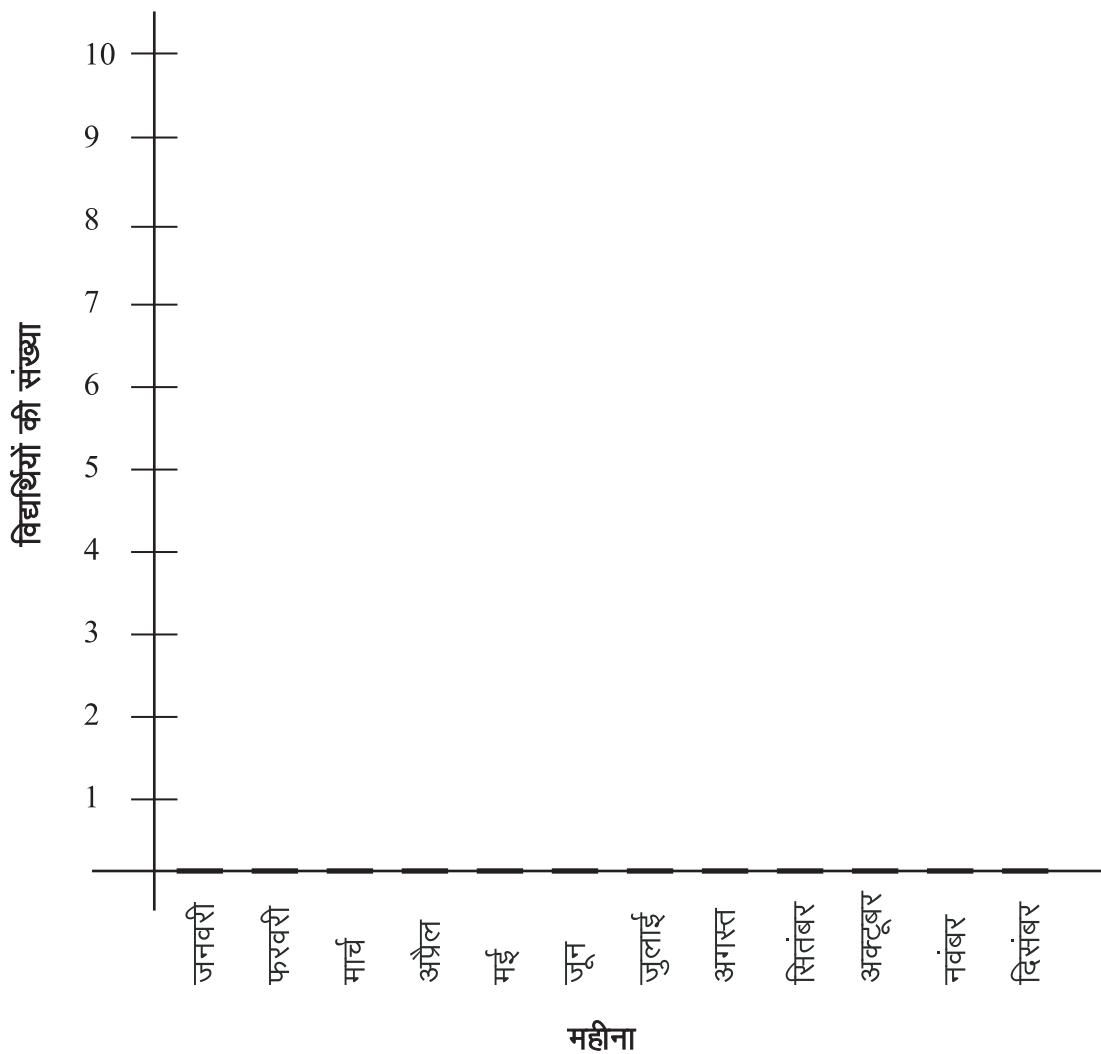
महीना	मिलान चिह्न (III)	बारंबारता
जनवरी		
फरवरी		
मार्च		
अप्रैल		
मई		
जून		
जुलाई		
अगस्त		
सितंबर		
अक्टूबर		
नवंबर		
दिसंबर		

सारणी में से देखकर, प्रश्नों के उत्तर दीजिए :-

- (1) किस मास में सबसे ज्यादा बच्चों का जन्मदिन है? _____
- (2) मई से जुलाई तक कितने बच्चों का जन्मदिन है? _____
- (3) अक्टूबर से दिसंबर तक कितने बच्चों का जन्मदिन है? _____
- (4) किस महीने में सबसे कम बच्चों का जन्मदिन है? _____

यदि आप दंड आलेख के बारे में नहीं जानते हैं तो अपने अध्यापक के साथ इसकी चर्चा कीजिए।

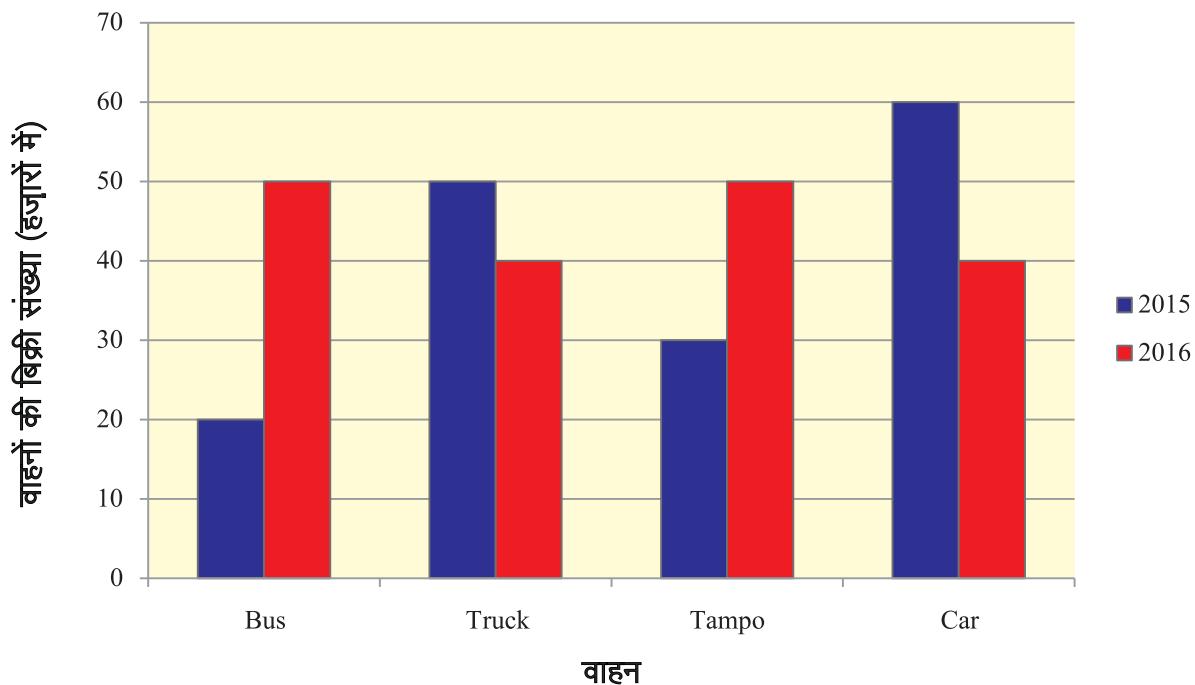
बनाई गई बारंबारता बंटन सारणी की सहायता से दंड आलेख को पूरा कीजिए :-



सारणी या आलेख में से किसमें तुलना करना ज़्यादा आसान है? _____

आँकड़ों को आलेख (ग्राफ़) द्वारा पढ़ना, विश्लेषण करना तथा उनसे किसी निष्कर्ष पर पहुँचना सरल होता है।

नीचे दिए गए दोहरे दंड आलेख (Double bar graph) को पढ़कर उत्तर दीजिए।

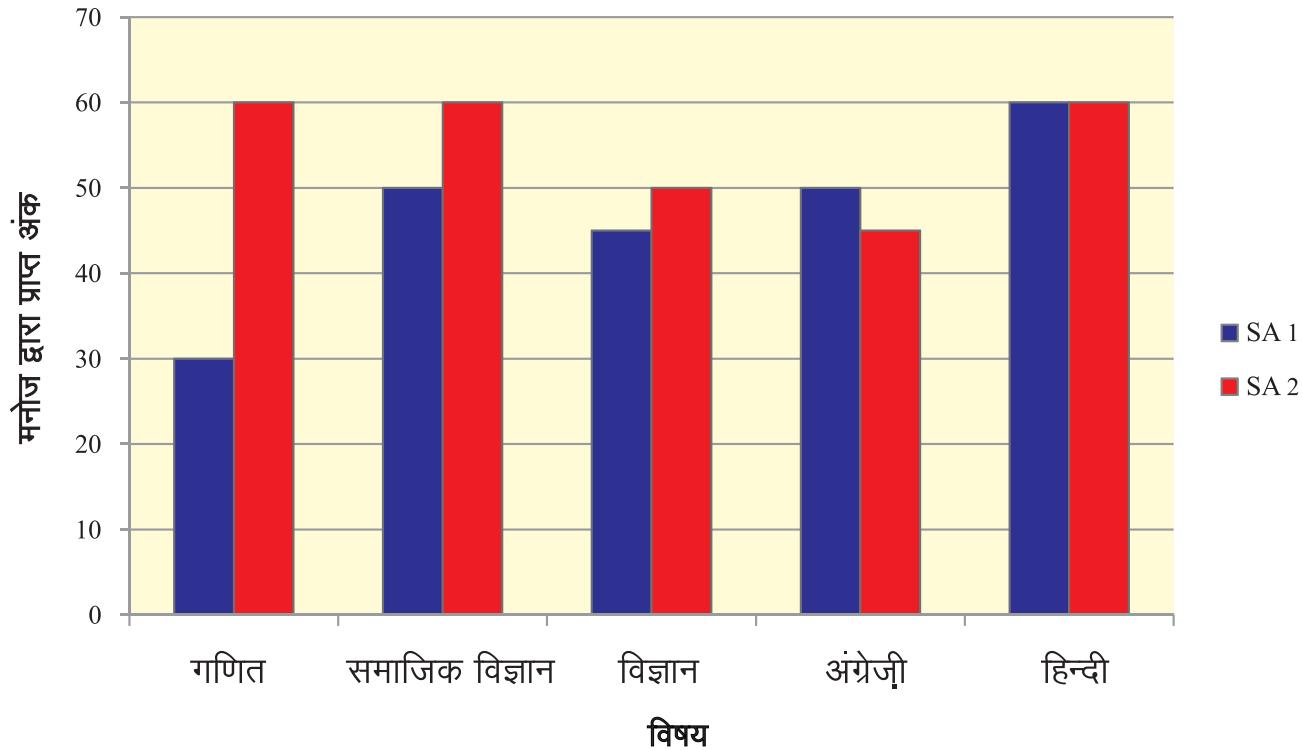


- (1) कौन से वाहन की बिक्री 2016 में बढ़ी है? _____
- (2) किस वाहन की बिक्री सबसे अधिक बढ़ी है? _____
- (3) किस वाहन की बिक्री में सबसे अधिक कमी आई है? _____
- (4) आलेख से संबंधित कुछ और प्रश्न बनाइए।

यहाँ हमने दो अलग-अलग वर्षों में, विभिन्न वाहनों की बिक्री की तुलना की है।

जब एक ही श्रेणी के अन्तर्गत तुलना की जाती है तो दोहरे दंड आलेख का उपयोग होता है।

हम मनोज द्वारा SA 1 और SA 2 परीक्षा में विभिन्न विषयों में प्राप्त अंकों को दोहरे दंड आलेख द्वारा दर्शा रहे हैं।



ऊपर दिए गए दोहरे दंड आलेख में SA 1 तथा SA 2 में प्राप्त अंकों की तुलना के आधार पर बताइए :-

प्र०1 मनोज ने किस विषय में सबसे अधिक प्रगति की है? _____

प्र०2 मनोज किस विषय में पिछड़ गया है? _____

प्र०3 मनोज को विज्ञान और सामाजिक विज्ञान में से किस विषय में अधिक समय देने की आवश्यकता है? _____

प्र०4 मनोज की हिन्दी विषय में क्या स्थिति है? _____

पिकनिक का दिन

एक दिन कक्षा सात के बच्चे लाल किला घूमते हुए चिल्ड्रन पार्क में पहुँचे। चिल्ड्रन पार्क पहुँचते ही सभी बच्चों ने खेलने का प्रोग्राम बना लिया। लड़कों ने क्रिकेट तथा फुटबॉल के सामान पर कब्ज़ा किया तो लड़कियों ने बैडमिन्टन तथा लूडो पर अपना अधिकार जमाया। देखते ही देखते सभी बच्चे दो भागों में बँट गए। कुछ ने खेलों में भाग लिया तथा कुछ ने खेलों को देखने का आनन्द उठाया।

दोहरा दंड आलेख खींचना तथा व्याख्या

नीचे दी गई सारणी के दंड आलेख बनाइए

पसंदीदा खेल	क्रिकेट	बैडमिन्टन	फुटबॉल	सॉफ्ट बॉल
देखने वाले बच्चों की संख्या	124	47	51	43
भाग लेने वाले बच्चों की संख्या	62	32	32	25

पैमाना :

पैमाना :

देखने वाले बच्चों की संख्या

पसंदीदा खेल —
दंड आलेख – I

पसंदीदा खेल —
दंड आलेख – II

ऊपर बनाए गए दण्ड आलेख – I तथा दंड आलेख – II को एक ही दंड आलेख में खींचा जा सकता है। (दोहरा दंड आलेख)

(दोहरा दंड आलेख)

पैमाना :

बच्चों की संख्या
देखने तथा भाग लेने वाले

दोहरे दंड आलेख से दो वस्तुओं की तुलना की जा सकती है, कि दोनों में से कौन सी बेहतर है। (कौन सा खेल बच्चे अधिक पसंद करते हैं या फिर खेलना या भाग लेना आदि)

पंसदीदा खेल

SA-1 तथा SA-2 के रिजल्ट की तुलना करके निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि किए गए सुधारों का क्या फर्क पड़ा (SA-1 के बाद और आगे क्या किया जाए।)

प्रसार या परिसर

खेल के दौरान सातवीं कक्षा में मोहन ने 6 पारियों में 37, 34, 50, 46, 60 तथा 55 रन बनाए।

मोहन द्वारा एक पारी में बनाए गए सबसे कम रनों की संख्या –

सबसे अधिक रनों की संख्या –

सबसे अधिक रन तथा सबसे कम रनों का अन्तर –

यह अन्तर ही परिसर कहलाता है।

सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के अन्तर से प्रेक्षणों के प्रसार या परिसर का अनुमान लगाया जा सकता है।

केन्द्रीय प्रवृत्तियाँ

1) औसत(अंकगणितीय) माध्य

2) माध्यक

3) बहुलक

1) माध्य

मोहन के द्वारा 6 पारियों में बनाए गए रनों 37, 34, 50, 46, 60 तथा 55 का औसत

$$\frac{37 + 34 + 50 + 46 + 60 + 55}{6} = \frac{282}{6} = 47$$

रनों का औसत 47 है परन्तु 6 पारियों में किसी भी पारी में मोहन ने 47 रन नहीं बनाए।

$$\frac{34 + 60}{2} = 47$$

सबसे कम संख्या = 34

दोनों का मध्य मान 47 है।

सबसे अधिक संख्या = 60

या (47), 6 पारियों (37, 34, 50, 46, 60, 55) के सभी मानों का प्रतिनिधि मान है। इसे माध्य कहा जाता है।

माध्य सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के बीच में स्थित होता है। इसलिए इसे केन्द्रीय प्रवृत्ति कहते हैं।

आँकड़ों की विभिन्न व्याख्या के लिए विभिन्न केन्द्रीय प्रवृत्तियों की या प्रतिनिधि मानों की आवश्यकता होती है।

2) बहुलक

लंच-टाइम (Lunch - Time) :

लंच के दौरान सभी एक स्थान पर एकत्रित हो गए।

मारिया: हमें खाने में आलू की सब्जी और पूँड़ी मिलने वाली है। मैडम पूछ रही हैं कि कौन कितनी-कितनी पूँड़ियाँ खाएगा?

25 विद्यार्थी में से प्रत्येक ने आवश्यक पूँड़ियों की संख्या इस प्रकार बताई
2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 4, 4, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 5, 2, 2, 3, 2, 4

उपरोक्त बताई गई पूँड़ियों की संख्या में सबसे अधिक बार आने वाली संख्या ही बहुलक है।

जैसे पूँड़ियों की संख्या का बहुलक 2 है।

बहुलक × बच्चों की संख्या(विद्यार्थियों) = 2×25

$$= 50$$

अतः अध्यापिका ने 50 पूँड़ियाँ मँगवाई।

अतः बहुलक निर्णय लेने के लिए प्रयोग किया जा सकता है।

बहुलक लिखिए—

बहुलक आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षणों को दर्शाता है।

बड़े आँकड़ों का बहुलक, आँकड़ों को सारणीबद्ध करके तथा मिलान चिन्हों का प्रयोग करके आसानी से निकाला जा सकता है।

बहुलक का प्रयोग करके अध्यापिका ने निर्णय लिया कि कुल कितनी पूँडियाँ मँगवाई जाएँ।

दुकानदार ज्यादा बिकने वाली चीज़ों को अपनी दुकान में अधिक मात्रा में रखता है।
(वह बहुलक का प्रयोग करता है।)

जैसे जूतों की दुकान पर यदि 7 नम्बर का जूता अधिक बिकता है तो दुकानदार 7 नम्बर का जूता स्टॉक में अधिक रखेगा।

3) माध्यक

टीमें बाँटना:

लाल किले से बाहर निकलते हुए बच्चों को भार(वजन) तौलने की मशीन दिखाई दे गई। उस पर चढ़कर सातवीं कक्षा के 15 बच्चों ने अपना भार ज्ञात किया। उनका भार (kg) में इस प्रकार था।

38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47

अध्यापिका: वीर और लारा को इन 15 बच्चों की दो टीमें बनानी हैं। पर मेरी दो शर्तें इस प्रकार हैं।

- 1) दोनों टीमों में बच्चों की संख्या बराबर हो।
- 2) एक टीम में 40 किंग्रा. (kg) से कम भार के बच्चे तथा दूसरी टीम में 40 किंग्रा. से अधिक भार के बच्चे हो।

रीमा : माध्य निकालकर हम टीमें बाँट सकते हैं।

महेश : बहुलक निकालकर भी टीमों को बाँटा जा सकता है।

अध्यापिका : मेरी शर्तों के लिए हमें माध्यक का प्रयोग करना होगा।

चलो करके देखें

1) माध्यक के तरीके -

$$32 + 35 + 36 + 37 + 38 + 38 + 38 + 40 + 42 + 43 + 43 + 43 + 45 + 47 + 50 = \frac{656}{15} = 43.73$$

यदि भार (kg) 43 से कम

38, 35, 37, 32, 40, 36,
38, 38, 42

टीम - 1 में 9 बच्चे

यदि भार 43 किंवा (kg) से अधिक

45, 50, 43, 43, 47, 43

टीम - 2 में 6 बच्चे

अध्यापिका की शर्त (1) और (2) पूरी नहीं हुई (संख्या भी बराबर नहीं)

2) बहुलक का प्रयोग करके टीम बाँटना 38 तथा 43 (दो बहुलक)

38, 35, 37, 40, 32, 36,
38, 38

टीम - 1 (38 बहुलक)
8 बच्चे

43, 43, 42, 45, 47, 50,
43

टीम - 2 (43 बहुलक)
7 बच्चे

यहाँ भी वही शर्त (1) और (2) दोनों पूरी नहीं हुई

3) माध्यक द्वारा टीमें विभाजनः

सभी भारों (kg) को आरोही या अवरोही क्रम में लगाकर मध्य संख्या निकालना

आरोही क्रम : [32, 35, 36, 37, 38, 38, 38, 40, 42, 43, 43, 43, 45, 47, 50]

टीम - 1
7 बच्चे

टीम - 2
7 बच्चे

अध्यापिका ने इसे माध्यक
(Refree) बनाया

अवरोही क्रम : [50, 47, 45, 43, 43, 43, 42,] 40, [38, 38, 38, 37, 36, 35, 32]

टीम – 2
7 बच्चे

टीम – 1
7 बच्चे

माध्यक
(Refree)

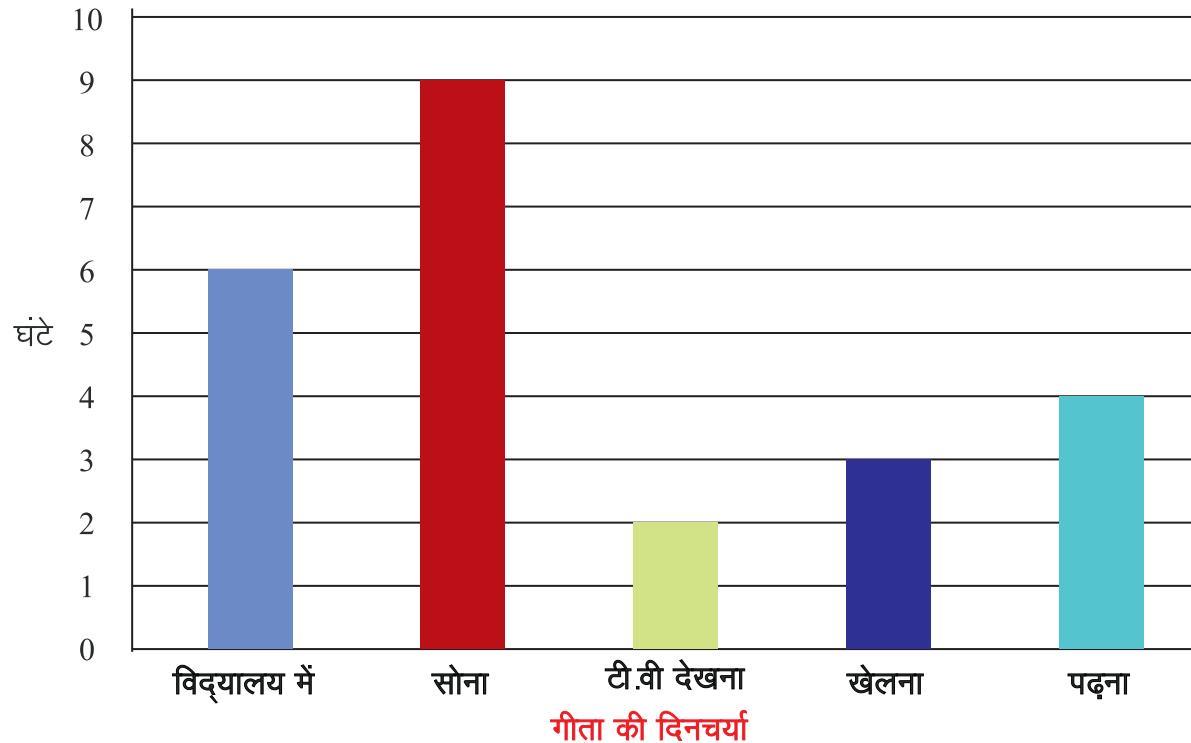
माध्यक एक प्रकार का प्रतिनिधि मान है। यह उस मान को दर्शाता है, जो प्रेक्षणों के मध्य (बीच) में होता है।
(आरोही या अवरोही क्रम में लगाने के बाद)

आधे प्रेक्षण माध्यक से ऊपर होते हैं तथा आधे प्रेक्षण माध्यक से नीचे होते हैं।

जूरूरी नहीं कि माध्यक और बहुलक के लिए एक ही मान मिलेगा।

वहाँ केवल उन ही स्थितियों को लेंगे, जहाँ प्रेक्षणों की संख्या विषम है।

आओ गीता की दिनचर्या को समझें।



दंड आलेख को देखिए और प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

यदि हम एक दिन, जिसमें 24 घंटे होते हैं, को एक संपूर्ण इकाई मानें तो संपूर्ण के भाग रूप में लिखिए

संपूर्ण का भाग / भिन्न

- (1) गीता एक दिन में कितने घंटे सोती है? _____ $\frac{9}{24}$
- (2) गीता एक दिन में कितने घंटे पढ़ती है? _____
- (3) गीता एक दिन में कितने घंटे खेलती है? _____
- (4) गीता एक दिन में कितने घंटे टीवी देखती है? _____
- (5) गीता एक दिन में कितने घंटे विद्यालय में रहती है? _____

गीता की दिनचर्या से प्राप्त भिन्नों को, दिए गए संबंधित रंगों का प्रयोग कर,
आकृति को छायांकित कीजिए।

रंग	दिनचर्या	भिन्न
लाल	विद्यालय में	$\frac{6}{24}$
पीला	सोना	$\frac{9}{24}$
नीला	टी०वी० देखना	$\frac{4}{24}$
हरा	खेलना	$\frac{2}{24}$
काला	पढ़ना	$\frac{3}{24}$

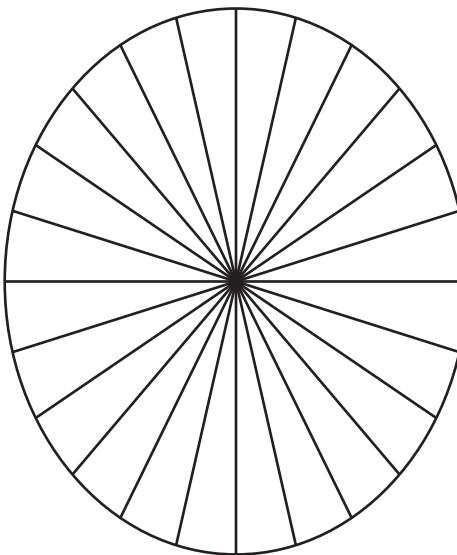
यह आकृति 24 घंटों को दर्शाती है
एक छोटा वर्ग एक घंटे को दर्शाता है।

तालिका को पूरा कीजिए

गीता की दिनचर्या	समय (घंटे)	(पूरे दिन की तुलना में) भिन्न रूप
विद्यालय में	6 घंटे	$\frac{6}{24}$
सोना		
टी०वी० देखना		
खेलना		
पढ़ना		
कुल (Total)		

गीता की दिनचर्या से प्राप्त भिन्नों को दिए गए संबंधित रंगों का प्रयोग करते हुए एक वृत्त के त्रिज्यखंडों को छायांकित कीजिए।

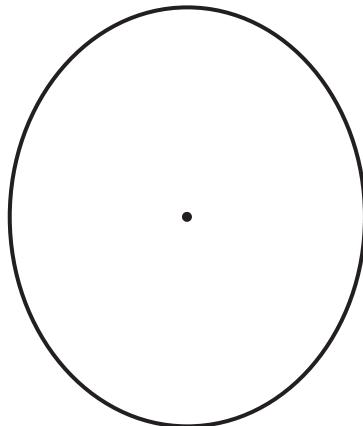
रंग	दिनचर्या	भिन्न
लाल	विद्यालय में	$\frac{6}{24}$
पीला	सोना	$\frac{9}{24}$
नीला	टी०वी० देखना	$\frac{2}{24}$
हरा	खेलना	$\frac{3}{24}$
काला	पढ़ना	$\frac{4}{24}$



यहाँ वृत्त को 24 बराबर त्रिज्यखंडों में बाँटा गया है। एक त्रिज्यखंड एक घंटे को दर्शाता है।

इस प्रकार से आँकड़ों का प्रदर्शन पाई चार्ट कहलाता है।

अब वृत्त को 24 बराबर त्रिज्यखंडों में बाँटे बिना, राजीव की दिनचर्या का प्रदर्शन भिन्न रूप में वृत्त पर कीजिए।



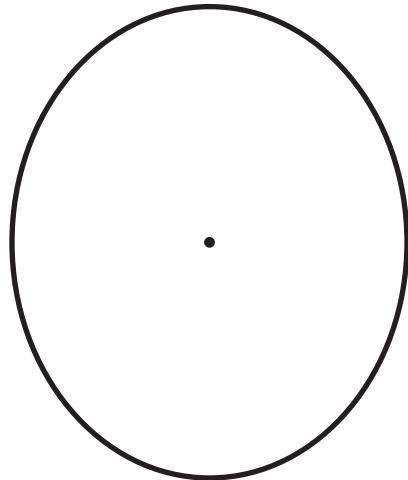
क्या हम दिए गए वृत्त के भिन्न के अनुसार सही भागों में बाँट पाएं?

आइए, अब हम ऐसी विधि का प्रयोग करते हैं जिसकी सहायता से हम वृत्त को आसानी से भिन्न भागों में बाँट सकें।

दिनचर्या	समय (घंटे)	संपूर्ण का भाग	केंद्रीय कोण (360° का भाग)
विद्यालय में	6	$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$
सोना	9	$\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{8} \times 360^\circ = 135^\circ$
टी० वी० देखना			
खेलना			
पढ़ना			
कुल			

हमें पता है कि एक वृत्त अपने केन्द्र पर 360° का कोण बनाता है। इसलिए हम अब 360° के कोण को गीता की दिनचर्या के अनुसार बाँटेंगे।

आँकड़ों को पाई चार्ट पर दर्शाइए

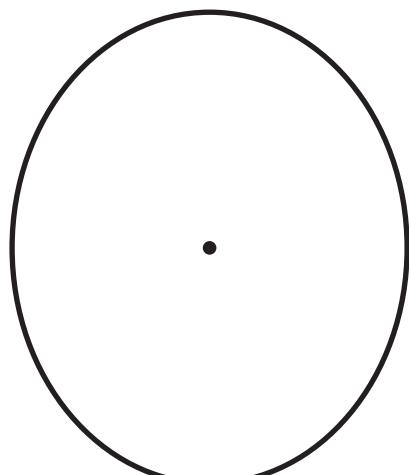


⇒ कक्षा में विभिन्न खेलों को पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या नीचे दी गई है।
इन आँकड़ों को एक पाई-चार्ट द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

खेल	क्रिकेट	कबड्डी	खो-खो	बैडमिंटन	टेबल टेनिस	योग
विद्यार्थियों की संख्या	40	20	15	10	5	90

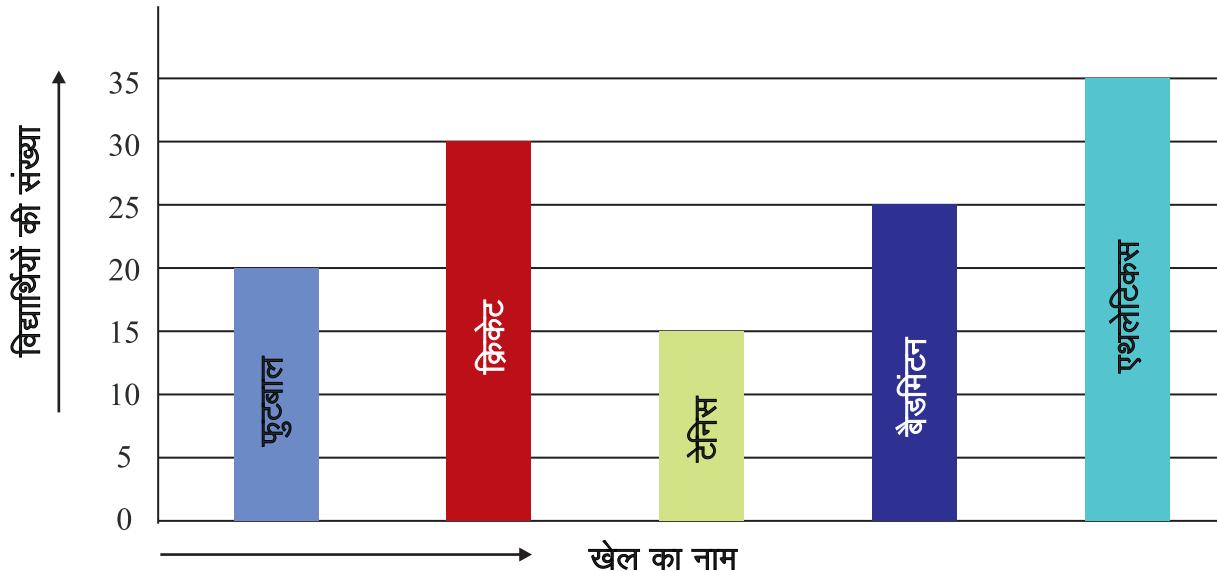
इन आँकड़ों को एक पाई-चार्ट द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

खेल	विद्यार्थियों की संख्या	संपूर्ण का भाग	केंद्रीय कोण
क्रिकेट	40	$\frac{40}{90} = \frac{4}{9}$	160°
कबड्डी			
खो-खो			
बैडमिंटन			
टेबल टेनिस			



वर्कशीट – आंकड़ों का प्रबन्धन

नीचे दिए गए दण्ड आलेख को ध्यानपूर्वक पढ़कर उसके नीचे लिखे हुए प्रश्नों का उत्तर दें।



- (1) विद्यार्थियों का सबसे अधिक पसंदीदा खेल क्या है?
- (2) बैडमिंटन का खेल कितने विद्यार्थी खेलते हैं?
- (3) सबसे कम विद्यार्थी किस खेल को खेलते हैं?
- (4) 20 विद्यार्थी किस खेल में भाग लेते हैं?
- (5) टेबल टेनिस खेलने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है?

प्रश्न 2 : नीचे दिए गए अंकों का बारंबारता चार्ट बनाकर प्रस्तुत करें और निम्न प्रश्नों के उत्तर दें।

19, 21, 30, 27, 22, 21, 27, 21, 22, 19, 27, 27,
 21, 21, 23, 22, 21, 27, 30, 25, 23, 21, 22, 23

संख्या	Tally (मिलान चिन्ह)	बारंबारता
19		
21		
22		
23		
25		
27		
30		

1. कौन सी संख्या सबसे अधिक बार प्रयोग की गई है? _____
2. कौन सी संख्या सबसे कम बार प्रयोग की गई है? _____

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

1. प्राथमिक आँकड़ों की जानकारी।
2. बारबारता सारणी बनाना।
3. आयत चित्र बनाना।
4. आँकड़ों को वृत्त—आलेख या पाई—चार्ट द्वारा दर्शाना।

अध्याय 7 – बीजीय व्यंजक एवं सर्वसमिकाएँ

पिछली कक्षा में हमने पढ़ा

1. व्यंजक क्या है?
2. पद, गुणनखंड एवं गुणांक क्या होता है?
3. एकपदी, द्विपदी एवं बहुपदी व्यंजक क्या होते हैं?
4. बीजीय व्यंजकों का जोड़ तथा घटाव कैसे करते हैं?

आइए, कुछ दोहराते हैं।

पदों को जोड़िए

1a.) $n + 5n + n + n$ उत्तर : $8n$	1b.) $7b - 6b + 4 + 4b$ $= (7b - 6b + 4b) + 4$ उत्तर : $5b + 4$
2a.) $4m - 7m + 5 + 8m$ उत्तर :	2b.) $9b - 2 + 7 - 8b$ उत्तर :
3a.) $9x + 9 - 2x$ उत्तर :	3b.) $9m + 3 - 3m$ उत्तर :
4a.) $5s - 3s + 9 + 3s$ उत्तर :	4b.) $9 + 6y - 9 - 5y$ उत्तर :
5a.) $y + 4y + y + y$ उत्तर :	5b.) $10k + 7 - 4k$ उत्तर :
6a.) $9s - 3 + 9 - 9s$ उत्तर :	6b.) $9p - 9 + 9 - 2p$ उत्तर :

व्यंजकों का संख्यात्मक मान निकालने के लिए हमें क्या करना चाहिए? आइए, समझते हैं।

माना $a = 3$ और $b = 2$ के लिए, व्यंजक $7a - 4b$ का मान निकालना है।

हमने $7a - 4b$ में a की जगह 3 तथा b की जगह 2 रखा तथा हल किया।

$$7 \times 3 - 4 \times 2$$

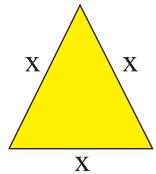
$$21 - 8 = 13 \text{ (व्यंजक का मान } 13 \text{ है)}$$

व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए :-

1a.) $s + (-7)$, $s = -3$ के लिए उत्तर : – 10	1b.) $3 - x^2$, $x = 3$ के लिए उत्तर :
2a.) $w + (-7)$, $w = -1$ के लिए उत्तर :	2b.) $\frac{-4v}{c^2}$, $v = 7$ और $c = 2$ के लिए उत्तर :
3a.) $-5d + 6u$, $d = 2$ और $u = 7$ के लिए उत्तर :	3b.) q^2 , $q = -10$ के लिए उत्तर :
4a.) $10q - 4$, $q = 7$ के लिए उत्तर :	4b.) $5b - 6$, $b = 0$ के लिए उत्तर :
5a.) $7p + 5$, $p = 3$ के लिए उत्तर :	5b.) $6q - g$, $q = -4$ और $g = 1$ के लिए उत्तर :

बीजीय व्यंजकों को हम ज्यामिति में भी प्रयोग करते हैं।

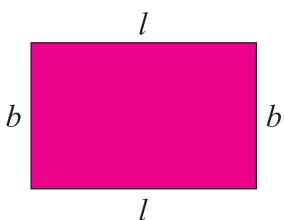
1)



परिमाप

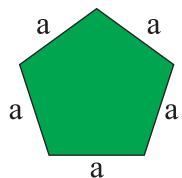
$$3x$$

2)



.....

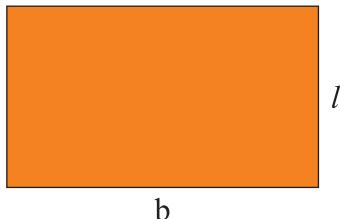
3)



.....

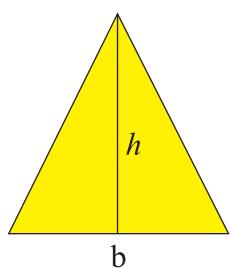
क्षेत्रफल

1)



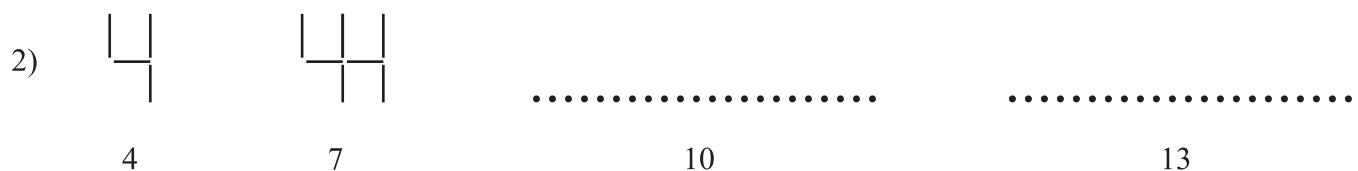
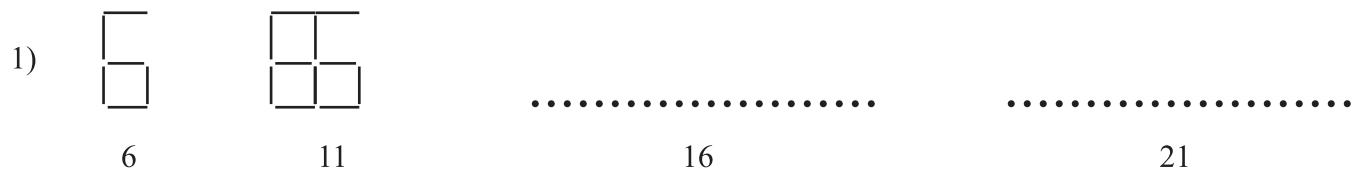
.....

2)



.....

दिए गए पैटर्न को समझकर पूरा कीजिए।



पैटर्न का नियम समझकर नीचे दिए गए बॉक्स को भरिए।

(a)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
-----	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----

(b)	17	19	21	23	25					
-----	----	----	----	----	----	--	--	--	--	--

(c)	48	44	40	36	32					
-----	----	----	----	----	----	--	--	--	--	--

(d)	10	15	20	25	30					
-----	----	----	----	----	----	--	--	--	--	--

(e)	27	25	23	21	19					
-----	----	----	----	----	----	--	--	--	--	--

(f)	6	12	18	24	30					
-----	---	----	----	----	----	--	--	--	--	--

(g)	1	3	5	7	9					
-----	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--

(h)	40	38	36	34	32					
-----	----	----	----	----	----	--	--	--	--	--

(i)	12	15	18	21	24					
-----	----	----	----	----	----	--	--	--	--	--

(j)	32	30	28	26	24					
-----	----	----	----	----	----	--	--	--	--	--

वितरण गुण का प्रयोग करके खाली स्थान भरिए।

1)	$2(4+9x) = \dots$	4)	$2x(3y-4x) = \dots$
2)	$3(4y+3) = \dots$	5)	$3xy(x+y) = \dots$
3)	$-3(6x+4) = \dots$	6)	$(x+y)2x = \dots$

एकपदी को एकपदी से गुणा करना :-

हम जानते हैं कि

$$5x = 5 \times x = x + x + x + x + x$$

$$\begin{aligned} 3 \times (5x) &= 5x + 5x + 5x = (5+5+5)x = 15x \\ &= (3 \times 5) \times x = 15x \end{aligned}$$

हम देख सकते हैं कि दो पदों को गुणा करने पर उनके चर से चर तथा अचर से अचर गुणा होते हैं।

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4x \times 5y &= (4 \times 5) \times (x \times y) \Rightarrow 3a^2 b \times (-5 b^2 a) \\ &= 20xy \quad (3) \times (-5) (a^2 \times a) (b \times b^2) \\ \Rightarrow 6y \times 7y^3 &= (6 \times 7) \times (y \times y^3) \quad - 15 a^3 b^3 \\ &= 42y^4 \end{aligned}$$

दो एक पदियों को गुणा कीजिए

- | | | | |
|----|------------------|----|----------------|
| 1) | $2y^2z, -yz$ | 2) | $4xy, x^2y$ |
| 3) | $4u^3, -2u$ | 4) | $5u^2v, 7u^2v$ |
| 5) | $-p^2qr, 3pq^2r$ | 6) | $6a^6, -5a^6b$ |

एकपदी को दोपदी से गुणा कीजिए

- 1) $3x^2 + 2xy, 2x$
- $$\begin{aligned}
 &= 2x \times (3x^2 + 2xy) \\
 &= (2x \times 3x^2) + (2x \times 2xy) \\
 &= 6x^3 + 4x^2y
 \end{aligned}$$
- वितरण गुण का
 नियम इस्तेमाल करते हुए
 $3 \times (10 + 2)$
 $3 \times 10 + 3 \times 2$
- 2) $-x^3 + 5y, 2xy$
- 3) $3a^3 - ab, 3a^2$
- 4) $-a^3b + 2b^3, 5a^3b^2$
- 5) $-uv + 2uw, 3u^2$
- 6) $6xy^2 + 5xz, 7xz$

एक पदी को त्रिपदी को गुणा कीजिए

1) $xy^3z + 4y^2z + 6xy, -5z^2$

2) $x^2 + 2y + z^2, 3y^2$

3) $x^4 - 2xy - y^3, 5xy$

4) $5a^3 + 3b - 6ab, 2a^2b$

5) $-3a^3c^2 + 2a^3b - 4b^3, 3abc$

6) $p^2 - 2q^2r - 3pq, pr^2$

बहुपदों को गुणा कीजिए

1) $(x+5), (3x - 4)$

$$(x+5) \times (3x - 4)$$

$$x \times (3x - 4) + 5 \times (3x - 4)$$

$$(x \times 3x) + [x \times (-4)] + (5 \times 3x) + 5 \times (-4)$$

$$3x^2 - 4x + 15x - 20$$

$$3x^2 + 11x - 20$$

2) $(-3x^2 - 1), (-x + 9)$

3) $(4s^3 + 6s + 1), (-2s)$

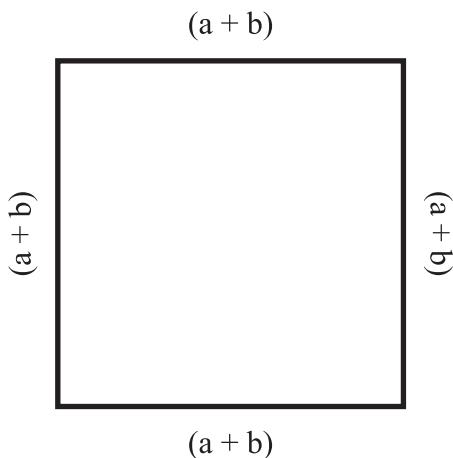
4) $(5a^3 - 9), (3a^2 - 1)$

5) $(7a^4 + 2a^2), (a - 5)$

Activity Time - 1

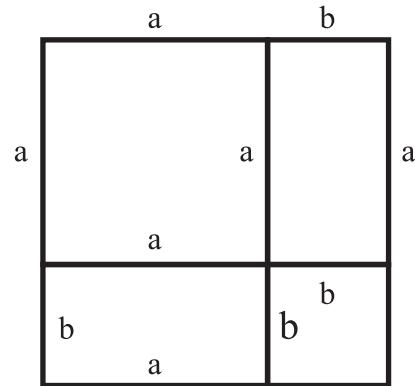
सर्वसमिका

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ की जाँच पेपर कटिंग से करना।



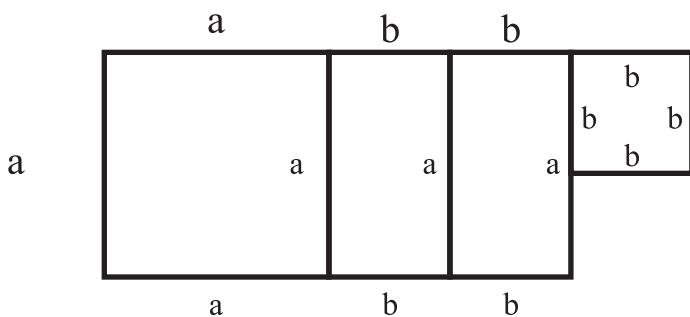
Step 1

एक वर्ग काटो तथा उसकी भुजा का नाम $(a+b)$ रखो। इस वर्ग का क्षेत्रफल $(a+b)^2$ है।



Step 2

अब इस वर्ग को चार भागों में इस तरह अलग-अलग करें।



Step 3

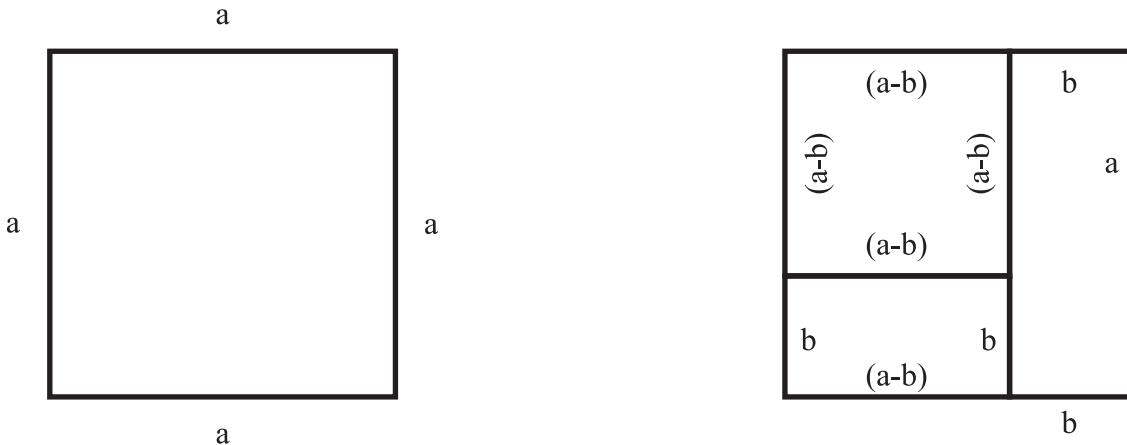
चारों भागों को इस तरह चिपकाकर एवं चारों भागों का क्षेत्रफल निकालकर जोड़ो तथा उत्तर को नीचे दिए गए रिक्त स्थान पर लिखिए।

उत्तर :

Activity Time - 2

सर्वसमिका

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ की जाँच पेपर कटिंग से करना।

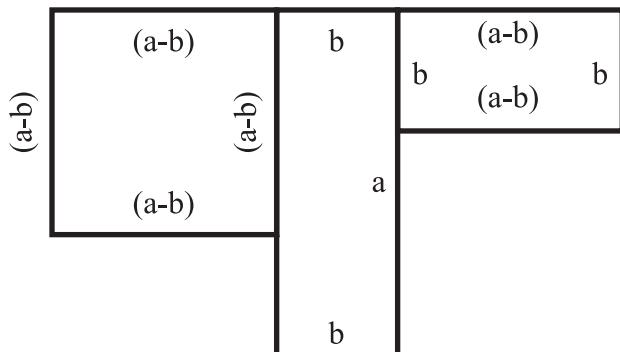


Step 1

एक वर्ग काटो तथा उसकी भुजा का नाम a रखो। इस वर्ग का क्षेत्रफल a^2 है।

Step 2

अब इस वर्ग को इस तरह तीन भागों में अलग करें।



Step 3

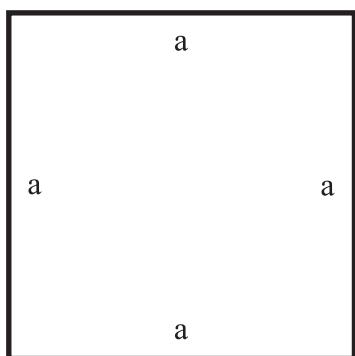
तीनों भागों को इस तरह चिपकाकर एवं तीनों भागों का क्षेत्रफल निकालकर जोड़ो तथा उत्तर को नीचे दिए गए रिक्त स्थान पर लिखें।

उत्तर :

Activity Time - 3

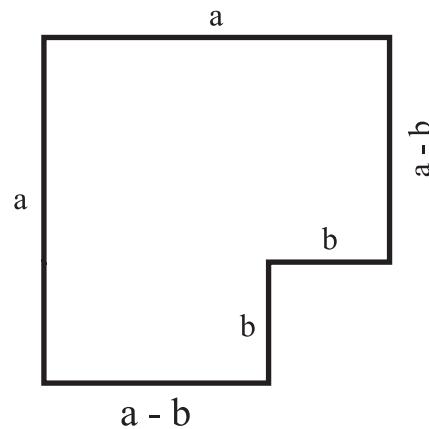
सर्वसमिका

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ की जाँच पेपर कटिंग से करना।



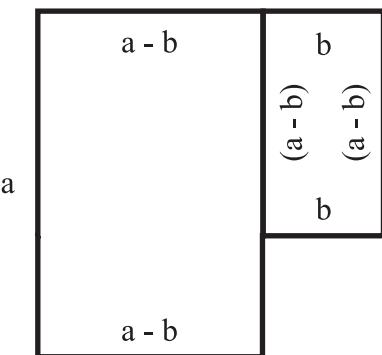
Step 1

एक वर्ग काटो तथा उसकी भुजा का नाम a रखो। इस वर्ग का क्षेत्रफल a^2 है।



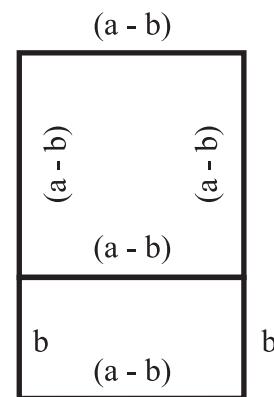
Step 2

अब इस वर्ग में से छोटा वर्ग काटो जिसकी भुजा का नाम b रखो। छोटे वर्ग का क्षेत्रफल b^2 है।



Step 3

अब इसे दो भागों में काटें।



दोनों भागों को इस तरह चिपकाकर दोनों भागों का क्षेत्रफल निकालकर जोड़ो। तथा उत्तर नीचे दिए गए रिक्त स्थान पर लिखें।

उत्तर :

सर्वसमिका क्या है?

ऐसी समिका जो चर के सभी मानों के लिए सत्य होती है, सर्वसमिका कहलाती है।

उदाहरण 1. समिका $(a+1)(a+2) = a^2 + 3a + 2$, $a=2$ के लिए दोनों पक्ष समान हैं।

$$(2+1)(2+2) = 2^2 + 3(2) + 2$$

$$(3)(4) = 4 + 6 + 2$$

$$12 = 12$$

आइए अब $a=-3$ लेते हैं। इसके लिए भी L.H.S. = R.H.S. है।

$$(-3+1)(-3+2) = (-3)^2 + 3(-3) + 2$$

$$(-2)(-1) = 9 - 9 + 2$$

$$2 = 2$$

उदाहरण 2. समिका $(b+1)(b-2) = b^2 - b - 2$, $b=3$ के लिए दोनों पक्ष समान हैं।

$$(3+1)(3-2) = 9 - 3 - 2$$

$$4 = 4$$

आइए अब $b=2$ लेते हैं। इसके लिए भी L.H.S. = R.H.S. है।

$$(2+1)(2-2) = (4) - 2 - 2$$

$$(3)(0) = 4 - 4$$

$$0 = 0$$

निम्नलिखित मानक सर्वसमिकाएँ हैं—

$$1. \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

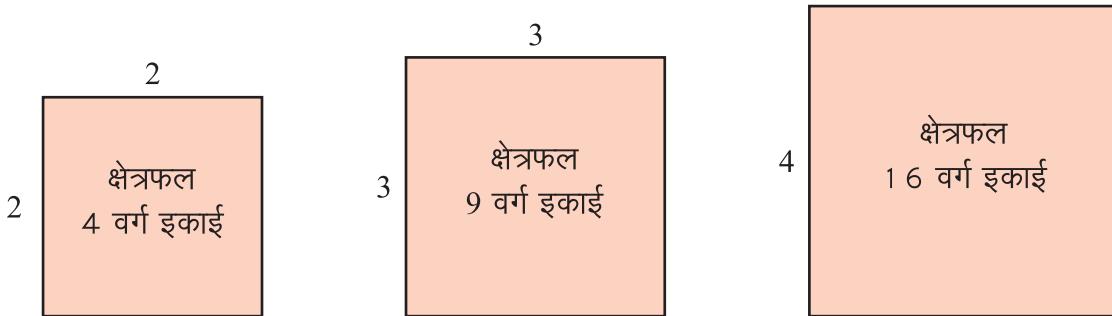
$$2. \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

उपर्युक्त सर्वसमिकाएँ बीजीय व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात करने एवं वर्ग करने में सहायक हैं। ये सर्वसमिकाएँ हमें संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करने के लिए सरल वैकल्पिक विधियाँ प्रदान करती हैं।

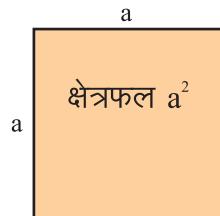
यहाँ हम बीजीय व्यंजक को ज्यामितीय विधि से प्रस्तुत कर रहे हैं।

हम जानते हैं कि $4, 9, 16$ वर्ग संख्याएँ हैं क्योंकि हम इन्हें वर्ग के रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं।



हम बीजीय व्यंजकों को भी वर्ग के रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं।

a से.मी. भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल = a^2 वर्ग से.मी.
(भुजा \times भुजा)



मान लीजिए हमें $a+b$ इकाई भुजा का एक वर्ग दिया गया है।

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा \times भुजा = $(a+b)(a+b)$

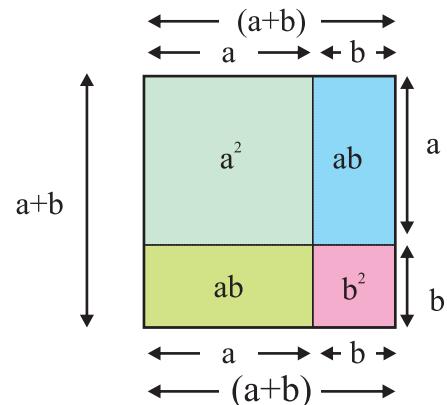
दी गई आकृति में हम देख सकते हैं कि हमने वर्ग को चार भागों में बाँट लिया है।

इसलिए वर्ग का क्षेत्रफल = चार भागों का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

अब हम कह सकते हैं कि

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ एक सर्वसमिका है।

क्या आप जानते हैं, हम इस सर्वसमिका की सहायता से गणित के प्रश्न भी हल कर सकते हैं।

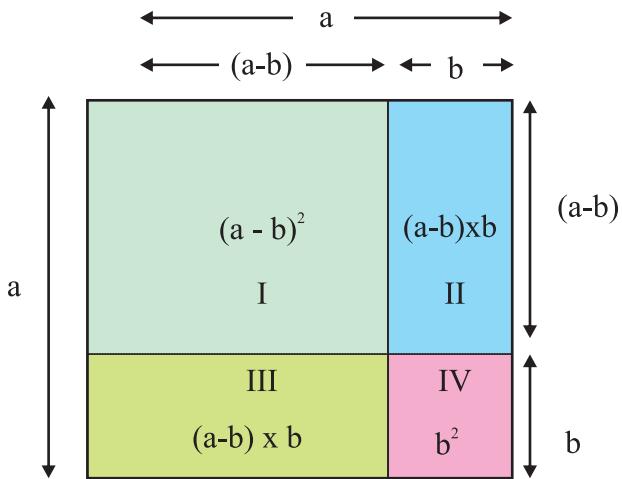
उदाहरण

$$\begin{aligned} 17^2 &= (10+7)^2 \\ &= 10^2 + 2(10)(7) + 7^2 \\ &= 100 + 140 + 49 \\ &= 289 \end{aligned}$$

अब हल कीजिए :-

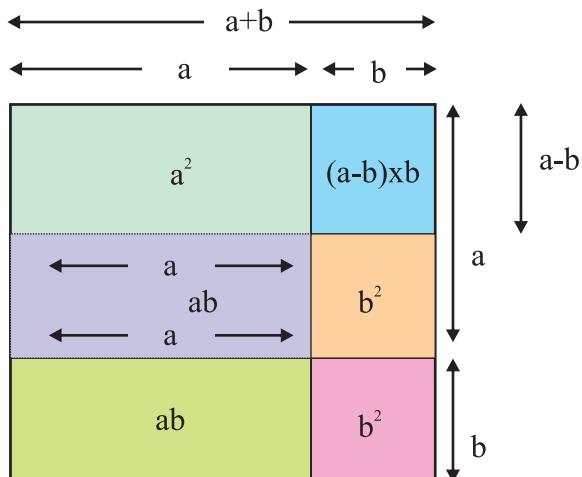
- (1) $(21)^2$
- (2) $(34)^2$
- (3) $(37)^2$
- (4) $(102)^2$
- (5) $(53)^2$

$$\{a + (-b)\}^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$$



भाग I का क्षेत्रफल = पूरे वर्ग का क्षेत्रफल – भाग II का क्षेत्रफल – भाग III का क्षेत्रफल – भाग IV का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= a^2 - b(a - b) - b(a - b) - b^2 \\&= a^2 - 2b(a - b) - b^2 \\&= a^2 + b^2 - 2ab\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= (a + b)^2 - 2ab - b^2 - b^2 \\&= a + 2ab + b^2 - 2ab - 2b^2 \\&= a^2 - b^2\end{aligned}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

एक b को $-b$ लिखने पर हम देखते हैं कि b

$$(a + b)(a - b) = a^2 + a(-b) + ab + b \times (-b)$$

$$= a^2 - ab + ab - b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

पीछे दी गई सर्वसमिका में यदि हम b को $-b$ से बदल दें तो

$$[a + (-b)]^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ एक सर्वसमिका है।}$$

क्या आप जानते हैं, हम इस सर्वसमिका की सहायता से गणित के प्रश्न भी हल कर सकते हैं।

उदाहरण

स्वयं करके देखें।

$$\begin{aligned} 17^2 &= (20 - 3)^2 \\ &= 20^2 + 2(20)(-3) + (-3)^2 \\ &= 400 - 120 + 9 \\ &= 289 \end{aligned}$$

(3) 49^2

(4) 27^2

(5) 66^2

(6) 95^2

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \text{ भी एक सर्वसमिका है क्योंकि यह } a \text{ और } b \text{ के सभी मानों के लिए सत्य होगी।$$

उदाहरण

स्वयं करके देखें।

$$\begin{aligned} (17 \times 23) &= (20 - 3)(20 + 3) \\ &= 20^2 - 3^2 \\ &= 400 - 9 \\ &= 391 \end{aligned}$$

(1) 25×35

(2) 49×51

(3) 98×102

(4) 77×83

(5) 11×9

अब इन सवालों के हल निकालने का प्रयास करेंगे।

1. सर्वसमिका $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग करके हल निकालो।

(i) $(2x + 3y)^2$

(ii) 103^2

2. सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का उपयोग करके हल निकालो।

(i) $(4p - 3q)^2$

(ii) $(4.9)^2$

3. सर्वसमिका $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ का उपयोग करके हल निकालो।

(I) $\left(\frac{3}{2}m + \frac{2}{3}n\right) \left(\frac{3}{2}m - \frac{2}{3}n\right)$

(ii) $983^2 - 17^2$

(iii) 194×206

घर पर करने का प्रयास करें

1. सर्वसमिका $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का $a = 3$ and $b = 4$ मानों के लिए ज्यामितिक विधि से प्रस्तुत करो।

2. सर्वसमिका का उपयोग करके $(104)^2$ का मान निकालो।

3. सर्वसमिका का उपयोग करके 104×96 का मान निकालो।

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

1. चरों तथा अचरों से व्यंजक बनाना।
2. एक पदी, द्विपदी और त्रिपदी व्यंजक।
3. बहुपदों को जोड़ना तथा घटाना।
4. बहुपदों को गुणा करना।
5. सर्वसमिकाओं का प्रयोग :

$$(a) \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

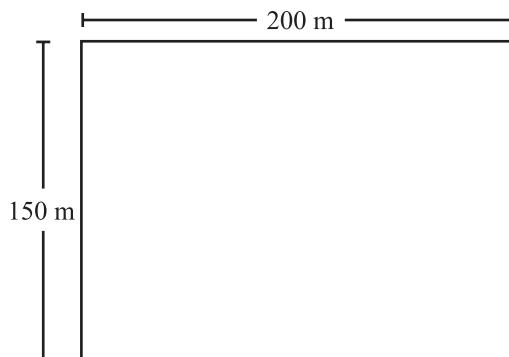
$$(b) \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(c) \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

अध्याय 8 – क्षेत्रमिति

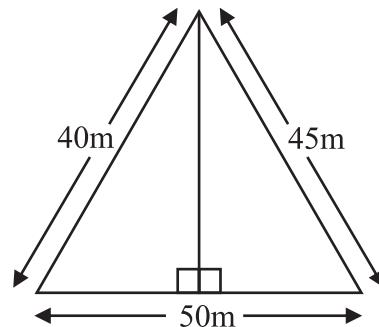
आओ जानें:

राजेश के पास एक आयताकार खेत है जिसमें वह सब्ज़ी उगाता है। वह कितने क्षेत्र में सब्ज़ी उगाता है?



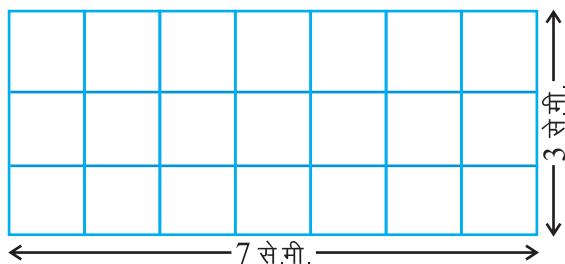
राजेश का खेत

अज़हर के पास एक त्रिभुजाकार खेत है जिसमें वह किनारे किनारे बाड़ लगाता है। बाड़ की लंबाई क्या होगी?



अज़हर का खेत

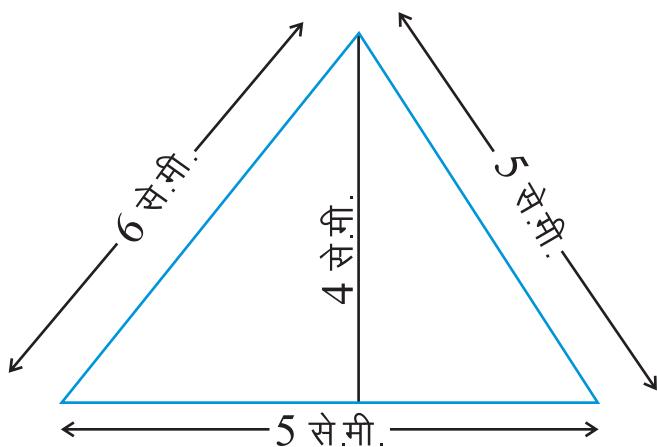
आओ, कुछ अभ्यास करें।



$$\begin{aligned} \text{आयत का क्षेत्रफल} &= \text{लंबाई} \times \text{चौड़ाई} \\ &= \underline{\quad} \times \underline{\quad} \\ &= \underline{\quad} \end{aligned}$$

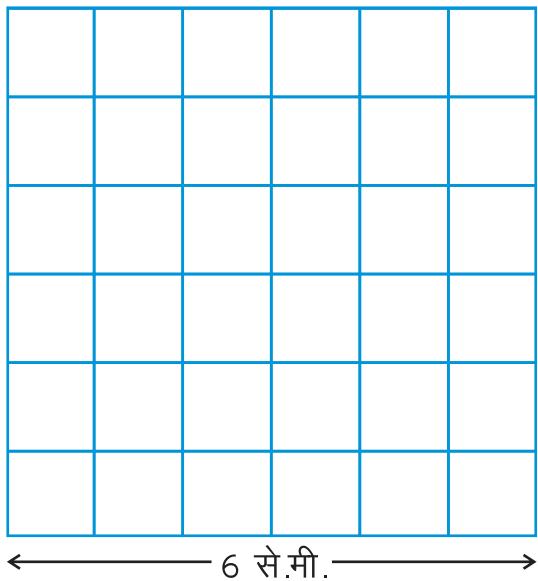
$$\begin{aligned} \text{आयत का परिमाप} &= \text{चारों भुजाओं का योग} \\ \text{आयत का परिमाप} &= 2 \times (\text{लंबाई} + \text{चौड़ाई}) \\ &= 2 \times (\underline{\quad} + \underline{\quad}) \\ &= \underline{\quad} \end{aligned}$$

आओ, कुछ अभ्यास करें।



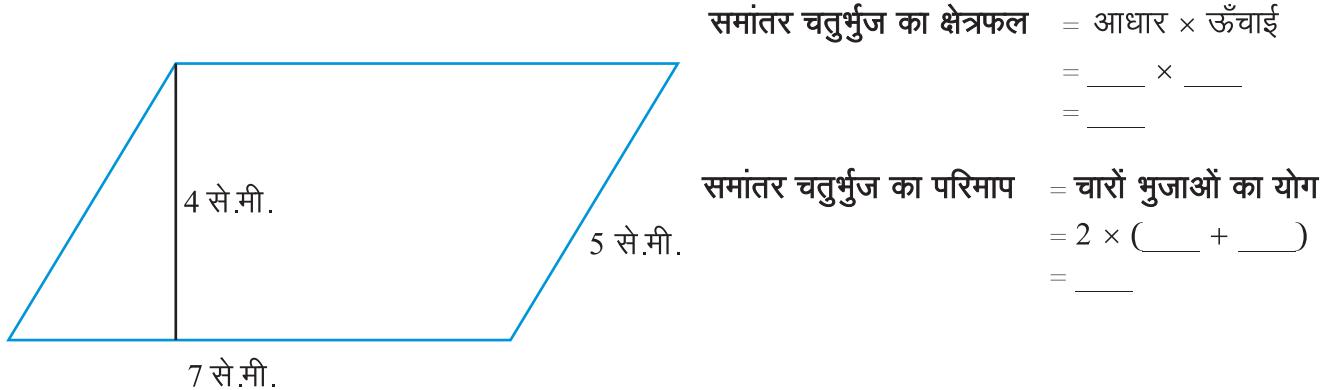
त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times (\text{आधार} \times \text{शीर्षलंब})$
 $= \frac{1}{2} \times (\underline{\quad} \times \underline{\quad})$
 $= \underline{\quad}$

त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं का योग
 त्रिभुज का परिमाप = $\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$
 $= \underline{\quad}$



वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा
 $= \underline{\quad} \times \underline{\quad}$
 $= \underline{\quad}$

वर्ग का परिमाप = चारों भुजाओं का योग
 वर्ग का परिमाप = $4 \times \text{भुजा}$
 $= 4 \times \underline{\quad}$
 $= \underline{\quad}$



$$\text{समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

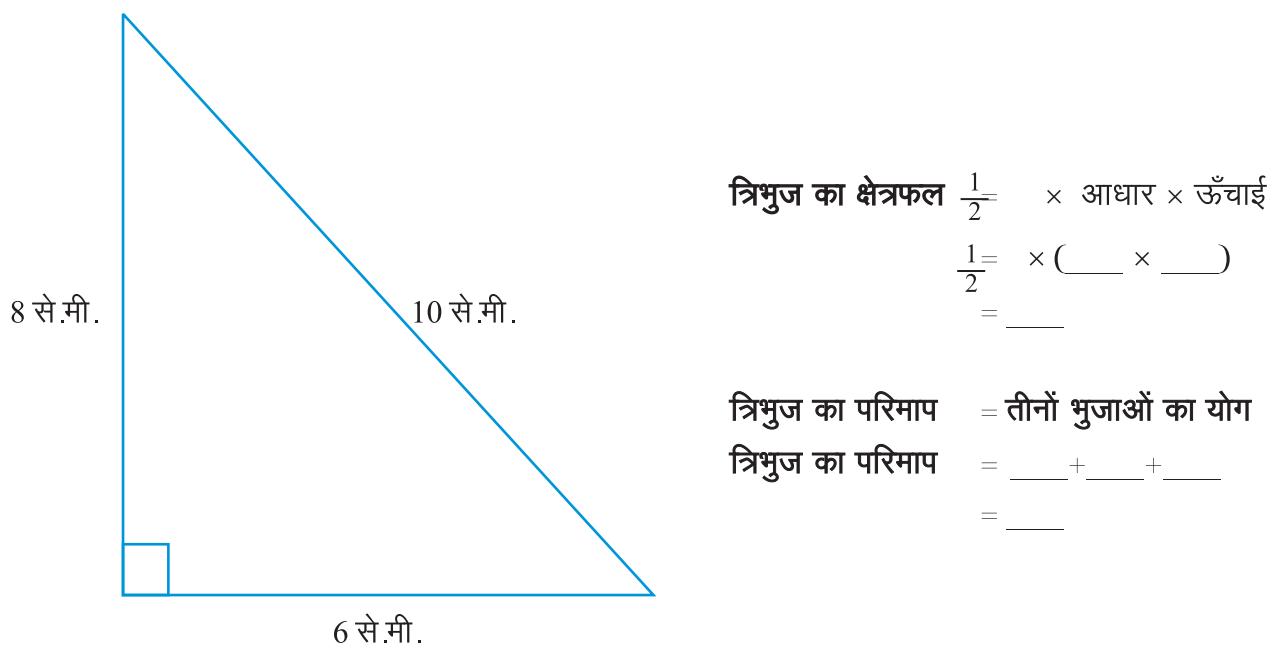
$$= \underline{\quad} \times \underline{\quad}$$

$$= \underline{\quad}$$

$$\text{समांतर चतुर्भुज का परिमाप} = \text{चारों भुजाओं का योग}$$

$$= 2 \times (\underline{\quad} + \underline{\quad})$$

$$= \underline{\quad}$$



$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\frac{1}{2} \times (\underline{\quad} \times \underline{\quad})$$

$$= \underline{\quad}$$

$$\text{त्रिभुज का परिमाप} = \text{तीनों भुजाओं का योग}$$

$$\text{त्रिभुज का परिमाप} = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$$

$$= \underline{\quad}$$

आइए, अब हम समलंब का क्षेत्रफल निकालना सीखते हैं।



एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम उसे एक त्रिभुज व एक समांतर चतुर्भुज में बाँट सकते हैं।

हरे भाग की आकृति का नाम =

पीले भाग की आकृति का नाम =

क्या हम इन दोनों भागों का क्षेत्रफल निकाल सकते हैं? इन दोनों भागों का क्षेत्रफल जोड़ने पर किसका क्षेत्रफल प्राप्त होगा?

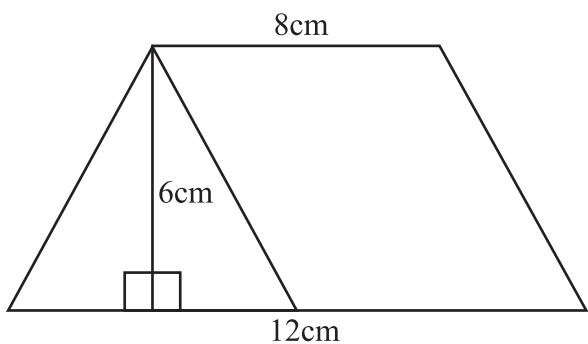
समलंब का क्षेत्रफल = समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल + त्रिभुज का क्षेत्रफल

हम समलंब के क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए नीचे दिए गए सूत्र का भी प्रयोग कर सकते हैं—

$$\text{समलंब का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} (\text{समांतर भुजाओं का योग}) \times \text{ऊँचाई}$$

$$\text{समलंब} = \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} + \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

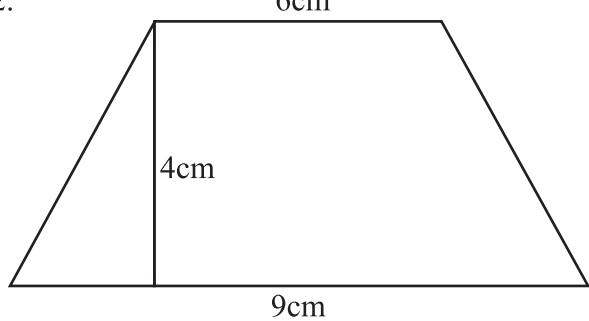
उदाहरण 1



क्षेत्रफल (समलंब)

$$\begin{aligned}
 &= \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} + \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{ऊँचाई} \\
 &= 8 \times 6 + \frac{1}{2} \times 12 \times 6 \\
 &= 48 + 12 \\
 &= 60 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

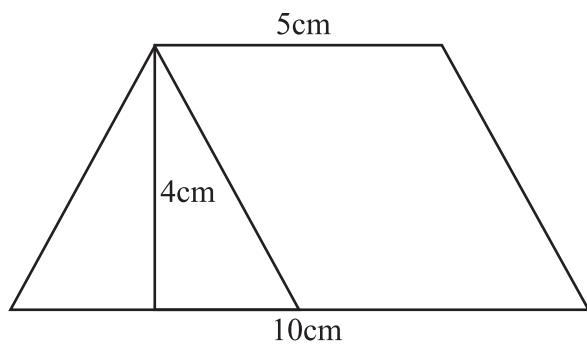
2.

**क्षेत्रफल (समलंब)**

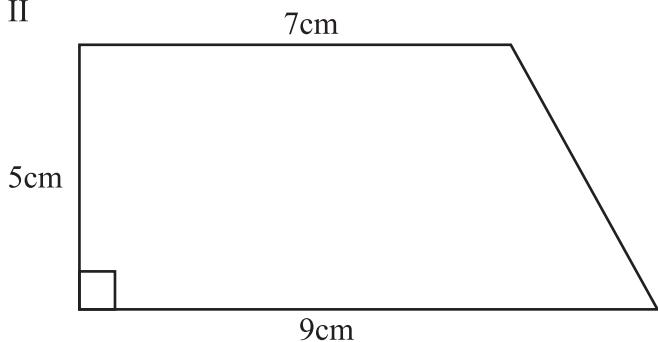
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \times \text{ऊँचाई} \times (\text{समांतर भुजाओं का योग}) \\
 &= \frac{1}{2} \times 4 \times (6 + 9) \\
 &= 2 \times 15 \\
 &= 30 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

प्र० . अब हम नीचे दिए गए समलंब का क्षेत्रफल जानने का प्रयास करते हैं।

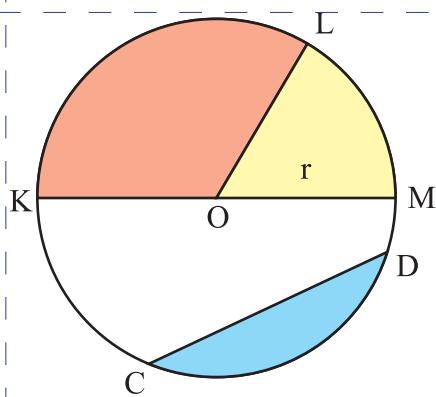
I



II



आइए अब हम वृत्त के बारे में कुछ समझते हैं।



- वृत्त का केन्द्र =
 एक जीवा का नाम =
 एक चाप का नाम =
 एक त्रिज्या का नाम =
 एक व्यास का नाम =

- प्र० क्या आप वृत्त की परिसीमा की लंबाई ज्ञात कर सकते हैं?
 प्र० क्या आप वृत्त के अंदर घिरे हुए क्षेत्र का माप बता सकते हैं?

नीचे कुछ वृतों की परिधि और व्यास के माप लिखे गए हैं। आइए हम परिधि को व्यास से भाग कर तालिका पूरी करते हैं।

परिधि	व्यास	परिधि / व्यास
44	14	$\frac{44}{14}$
66	21	
154	49	
22	7	

$$\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ (लगभग)}$$

$\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$ से हमें जो मान प्राप्त हुआ है, उसे 'π' कहते हैं।

$$\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$$

$$\text{परिधि} = \pi \times \text{व्यास}$$

$$\text{परिधि} = \pi \times 2r$$

$$\text{परिधि} = 2\pi r$$

$$\text{परिधि} = 2\pi r \quad (r \text{ वृत की त्रिज्या है।})$$

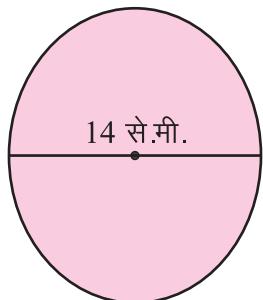
गणना को आसान बनाने के लिए हम 'π' का मान $\frac{22}{7}$ लेते हैं।

नीचे कुछ वृत दिए गए हैं, उनकी परिधि ज्ञात कीजिए।

उदाहरण :

$$\text{त्रिज्या} = \frac{\text{व्यास}}{2}$$

1.



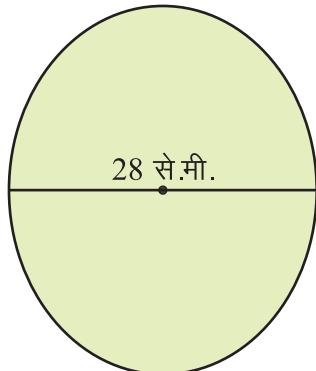
$$\text{व्यास (d)} = 14 \text{ से.मी.}$$

$$\text{त्रिज्या} = 7 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}\text{वृत की परिधि} &= 2\pi r \\ &= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \\ &= 44 \text{ cm}\end{aligned}$$

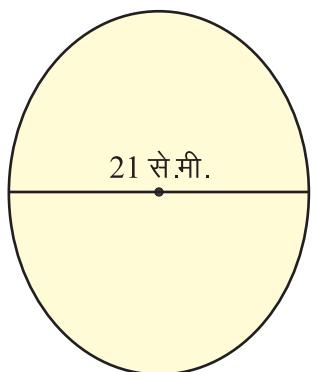
अब आप वृत की परिधि निकालने का प्रयास कीजिए।

2.



$$\text{परिधि} \dots \text{से.मी.}$$

3.

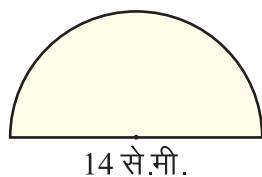


$$\text{परिधि} \dots \text{से.मी.}$$

नीचे दी गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए।

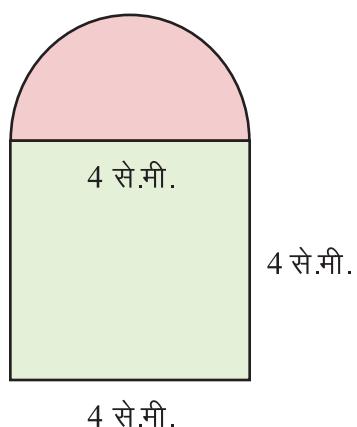
व्यास वृत्त को दो बराबर भागों में बाँटता है।

4)



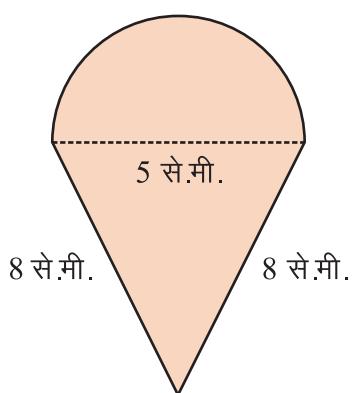
परिमाप से.मी.

5)



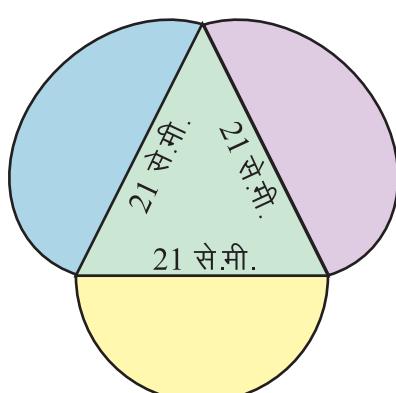
परिमाप से.मी.

6)



परिमाप से.मी.

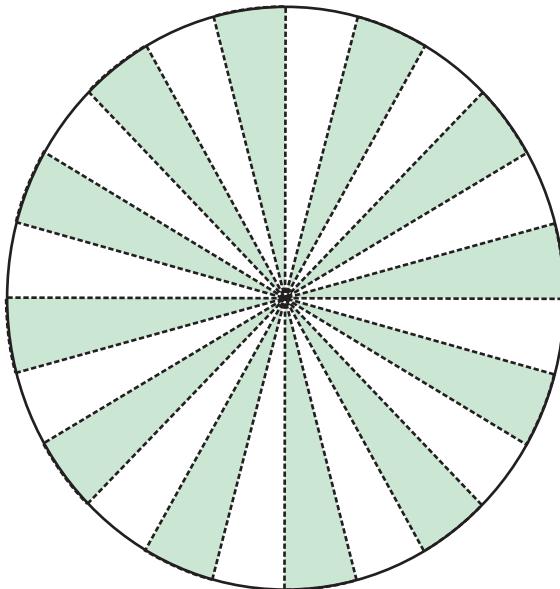
7)



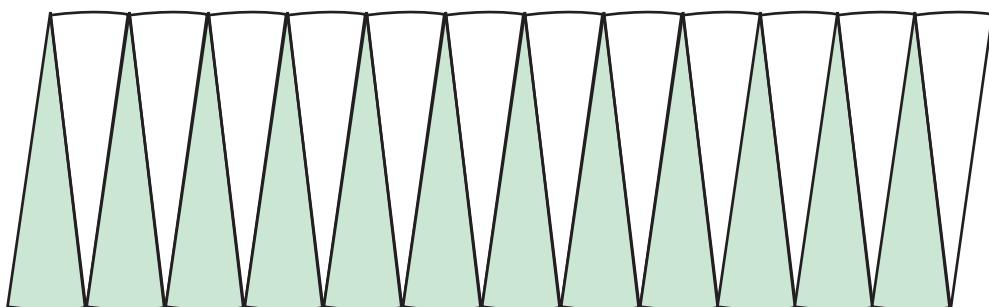
परिमाप से.मी.

वृत्त द्वारा तल पर घेरे गए स्थान को हम वृत्त का क्षेत्रफल कहते हैं।

नीचे दिए गए वृत्त को हमने बहुत सारे त्रिज्यखंडों में बाँट दिया है।



वृत्त के सभी त्रिज्यखंडों को लेकर हमने उसे नीचे दिए गए रूप में व्यवस्थित कर दिया गया है।



हम ध्यान से इस आकृति को देखेंगे तो यह एक आयत का रूप लेती हुई नज़र आ रही है।

हम वृत्त में जितने छोटे त्रिज्यखंड करेंगे ऊपर की आकृति आयत के उतने ही पास आती चली जाएगी।

हम देख सकते हैं कि वृत्त का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

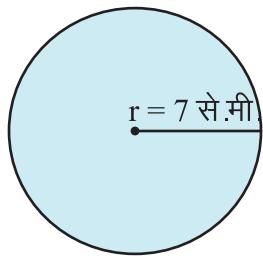
$$\begin{aligned}
 &= \text{लंबाई} \times \text{चौड़ाई} \\
 &= \frac{1}{2} \times \text{वृत्त की परिधि} \times \text{त्रिज्या} \\
 &= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r \\
 &= \pi r^2
 \end{aligned}$$

वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

नीचे कुछ वृत्त दिए गए हैं, उनका क्षेत्रफल ज्ञात करिए।

उदाहरण :

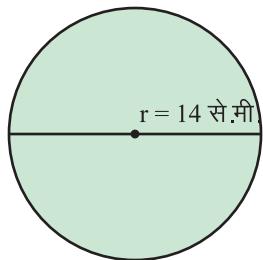
(a)



$$\begin{aligned}\text{वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 \\ &= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \\ &= 154 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

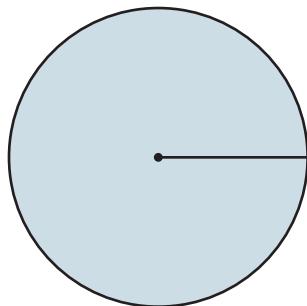
अब आप प्रयास कीजिए।

(b)



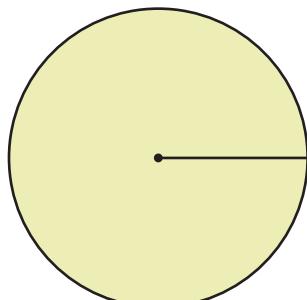
$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(c)



$$\text{त्रिज्या } (r) = 21 \text{ से.मी. , वृत्त का क्षेत्रफल} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(d)

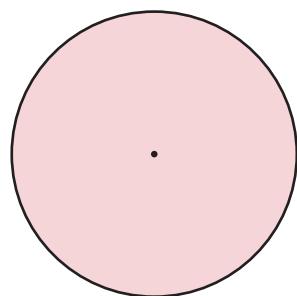
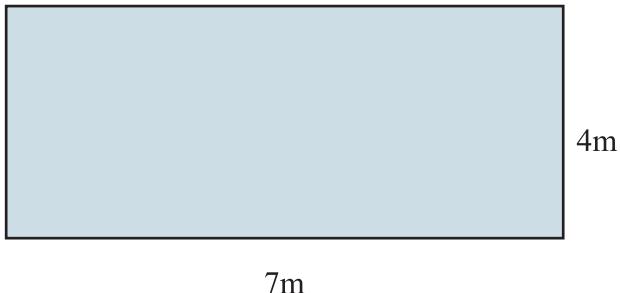


$$\text{त्रिज्या } (r) = 28 \text{ से.मी. , वृत्त का क्षेत्रफल} = \underline{\hspace{2cm}}$$

आइए दिमागी कसरत करें।

1. सूरज ने 44cm लंबाई के तार से एक आयत बनाया। उसी तार का प्रयोग करके उसने एक वृत्त बनाया। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

2.



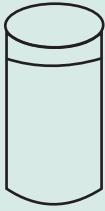
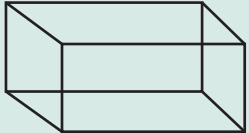
यहाँ दिए गए आयत और वृत्त की धेरे की लंबाई बराबर है।

आयत का परिमाप = , वृत्त की परिधि =

आयत और वृत्त में से कौन, तल पर अधिक स्थान धेरे हुए है? पता कीजिए।

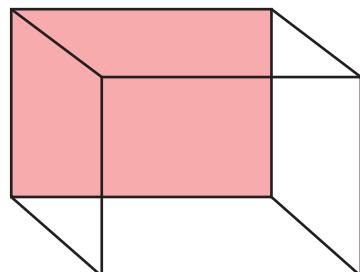
आयत का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल =

नीचे तालिका में दिए गए आकारों को पहचान कर उनके नाम व आकार का प्रकार लिखें।

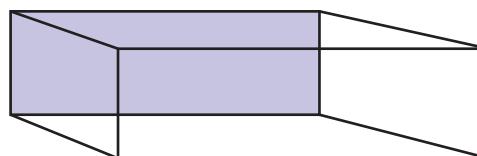
आकार	आकार का नाम	आकार का प्रकार
	वर्ग	द्वि विमीय
	गोला	त्रि विमीय
		
		
		
		

हम देखते हैं कि घनाभ, घन, शंकु, बेलन इत्यादि ठोस आकृतियों के फलकों की संख्या अलग-अलग होती है। नीचे दी गई ठोस आकृतियों में कितने फलक हैं।

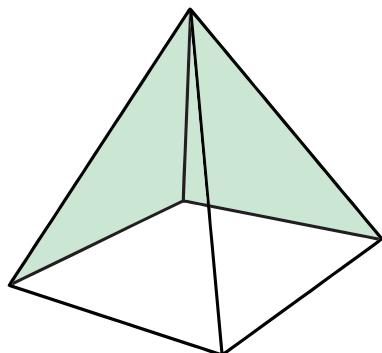
घन



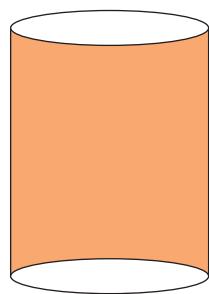
घनाभ



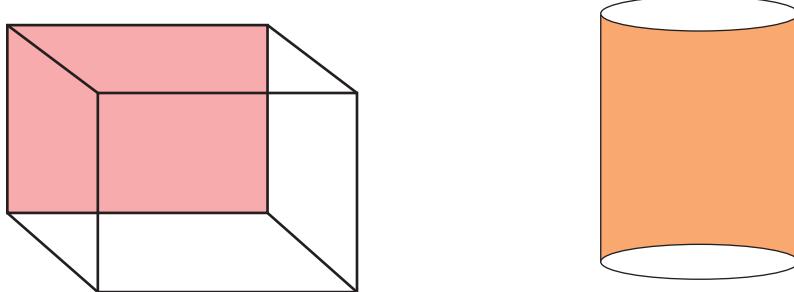
पिरामिड



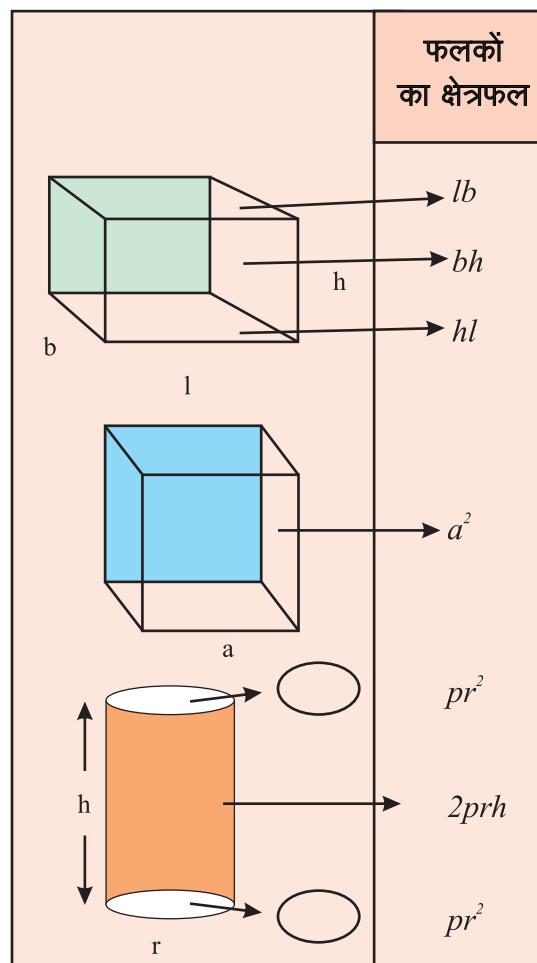
बेलन



यदि आपसे पूछा जाए कि नीचे दी गई ठोस आकृतियों को पेन्ट करने में किसमें अधिक पेन्ट लगेगा, तो उसके लिए आप क्या करेंगे? साथियों के साथ चर्चा कीजिए।



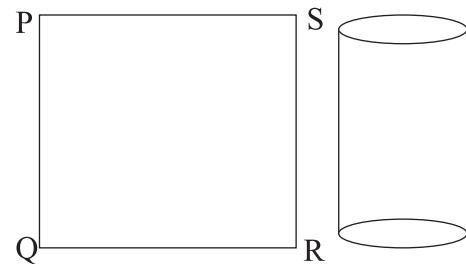
इसके लिए हमें पृष्ठीय क्षेत्रफल की बात करनी होगी अर्थात् आकृतियों के कुल पृष्ठ कितना क्षेत्रफल धेर रहे हैं? अपने अध्यापक से निम्नलिखित ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल के बारे में भी चर्चा करें।



हमने एक आयत PQRS लिया तथा उसे मोड़कर हमने एक बेलन बनाया। बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल, आयत PQRS के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = क्षेत्रफल PQRS = लंबाई × चौड़ाई

हमें पता है कि QR मुड़ने के बाद बेलन के आधार की परिधि बन गया और RS बेलन की ऊँचाई बन गया। इसलिए बेलन पृष्ठीय का क्षेत्रफल = $QR \times RS$



$$= 2 \pi r \times h$$

$$= 2 \pi r h$$

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

1. समलंब तथा संमातर चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालना।
2. पृष्ठीय क्षेत्रफल का परिचय
 - (a) घन
 - (b) घनाभ
 - (c) बेलन
3. वृत्त का परिचय एवं वृत्त क्षेत्रफल

अध्याय 9 – घातांक और घात

दो दोस्त आपस में संख्याओं को पढ़ने और लिखने का खेल खेल रहे हैं। इन दोनों को इनके अध्यापक ने सातवीं कक्षा में घात और घातांक से परिचय कराया।



प्रियंका

राहुल, इस संख्या को पढ़कर तो बताओ?
10000000000000

इसमें क्या बड़ी बात है।



राहुल

इस संख्या को हम घातांकीय रूप में 10^{12} लिख सकते हैं।

इसे हम दस की घात बारह पढ़ेंगे।



प्रियंका, अब तुम इस संख्या को पढ़कर बताओ?
470000000000000

इसमें क्या बड़ी बात है।



इस संख्या को हम घातांकीय रूप में 4.7×10^{14} लिखेंगे।

इसे हम चार दशलव सात गुणा दस की घात चौदह पढ़ेंगे।



राहुल, अब तुम इस संख्या
को पढ़कर बताओ?

$$\frac{1}{100000000000000}$$

इस संख्या को तो मैं
नहीं पढ़ पा रहा।



अच्छा तो मैं भी तुम्हें ऐसी ही एक संख्या
पढ़ने के लिए देता हूँ। प्रियंका तुम मेरी
इस संख्या को पढ़कर बताओ?

$$\frac{1}{12000000000000}$$

इस तरह की संख्याएँ तो
मुझे भी पढ़नी नहीं
आती।



आओ, हम अपनी मैडम से
इस प्रकार की संख्याओं को पढ़ना
तथा लिखना सीखते हैं।



नमस्ते मैडम

मैडम हमें $\frac{1}{10000000000000}$ तथा $\frac{1}{1200000000000}$

प्रकार की संख्याओं को पढ़ना तथा उसे घातांकीय
रूप में लिखना नहीं आता।



बिल्कुल बच्चो आओ इन
संख्याओं के बारे में जानकारी
प्राप्त करते हैं।



ऐसी संख्याओं को पढ़ने तथा घातांकीय
रूप में लिखने के लिए हमें पहले ऋणात्मक
घातों को समझना होगा।

आइए समझने का प्रयास करते हैं।

आइए पहले हम घात और घातांकों के कुछ प्रश्नों का अभ्यास करते हैं।
घातांकीय रूप में लिखी गई संख्याओं के आधार और घात को पहचानिए।

घातांकीय रूप	आधार	घात
a) 2^5	2	5
b) 10^{13}		
c) 9^3		
d) 3^{12}		

घातांकीय रूप में लिखिए		विस्तारित रूप में लिखिए	
I)	$2 \times 2 \times 2 = 2^3$	a)	$3^3 = 3 \times 3 \times 3$
II)	$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$	b)	$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
III)	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = \underline{\hspace{2cm}}$	c)	$5^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
IV)	$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = \underline{\hspace{2cm}}$	d)	$10^4 = \underline{\hspace{2cm}}$
V)	$3 \times 3 = \underline{\hspace{2cm}}$	e)	$7 = \underline{\hspace{2cm}}$
VI)	$c \times c \times c \times c \times c \times c = \underline{\hspace{2cm}}$	f)	$b^3 = \underline{\hspace{2cm}}$
VII)	$a \times a \times a \times a = \underline{\hspace{2cm}}$	g)	$y^5 = \underline{\hspace{2cm}}$

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए		घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए	
क)	$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$	1)	$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3$
ख)	$2^5 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$	2)	$y \times y \times y \times z \times z \times z \times z = y^3 \times z^4$
ग)	$7^2 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$	3)	$t \times t = \underline{\hspace{2cm}}$
घ)	$3^4 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$	4)	$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 2 \times 2 = \underline{\hspace{2cm}}$
ङ)	$10^6 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$	5)	$a \times a \times b \times b \times b \times c \times c = \underline{\hspace{2cm}}$



क्या आधार सदैव धनात्मक पूर्णांक संख्या होगी?

नहीं—नहीं। आधार धनात्मक व ऋणात्मक कोई भी संख्या हो सकती है।



आओ जाँचें। जब घातांकीय रूप में आधार संख्या, ऋणात्मक हो।

घातांकीय रूप में लिखिए	विस्तारित रूप में लिखिए
a) $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$	= $(-2)^5$
b) $(-1) \times (-1) \times (-1)$	= $(-1)^3$
c) $(-13) \times (-13) \times (-13) \times (-13)$	= _____
d) $(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)$	= _____
e) $(-a) \times (-a) \times (-a) \times (-a)$	= _____
	क) $(-5)^5 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$
	ख) $(-3)^4 = _____$
	ग) $(-9)^3 = _____$
	घ) $(-2)^2 = _____$
	ङ) $(-b)^3 = _____$

आओ, घातांक से संबंधित कुछ नियम बनाएँ

पैटर्न को समझकर, आगे बढ़ाइए।

$$\begin{array}{ll}
 (-1)^1 = (-1) & = -1 \\
 (-1)^2 = (-1) \times (-1) & = 1 \\
 (-1)^3 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} & = \underline{\quad} \\
 (-1)^4 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} & = \underline{\quad} \\
 (-1)^5 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} & = \underline{\quad} \\
 (-1)^6 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} & = \underline{\quad}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \\ \\ \\ \\ \\
 \end{array} \right\} \text{प्राप्त उत्तर}$$

$(-1)^{\text{सम संख्या}} = \underline{\quad}$
 $(-1)^{\text{विषम संख्या}} = \underline{\quad}$

मान ज्ञात कीजिए

(a) $(-1)^8 = \underline{\hspace{2cm}}$

(d) $(-1)^7 = \underline{\hspace{2cm}}$

(b) $(-1)^{17} = \underline{\hspace{2cm}}$

(e) $(-1)^{90} = \underline{\hspace{2cm}}$

(c) $(-1)^{100} = \underline{\hspace{2cm}}$

(f) $(-1)^{21} = \underline{\hspace{2cm}}$

सरल कीजिए

(a) $2 \times (-10)^3 = \underline{\hspace{2cm}} = -2000$

(b) $3^3 \times 2^3 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

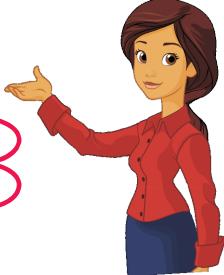
(c) $(-3) \times (5)^2 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(d) $(-2)^2 \times (-3)^2 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(e) $(-2)^4 \times (10)^2 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$



तो क्या घात सदैव धनात्मक पूर्णांक संख्या होती है?



नहीं—नहीं। घात ऋणात्मक पूर्णांक संख्या भी हो सकती है।

आइए हम अब ऋणात्मक घात वाले घातांकों को समझते हैं।

पैटर्न को पूरा कीजिए तथा इसमें होने वाले परिवर्तन को जाँचिए।

बॉक्स 1

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = \dots \times \dots$$

$$10^3 = \dots \times \dots \times \dots$$

$$10^4 = \dots \times \dots \times \dots \times \dots$$

$$10^5 = \dots \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots$$

बॉक्स 2

$$10^5 = \dots 10 \dots \times \dots 10 \dots \times \dots 10 \dots \times \dots 10 \dots \times \dots 10 \dots$$

$$10^4 = \dots \times \dots \times \dots \times \dots$$

$$10^3 = \dots \times \dots \times \dots$$

$$10^2 = \dots \times \dots$$

$$10^1 = \dots$$

बॉक्स 1 तथा बॉक्स 2 की संख्याओं में होने वाले परिवर्तन के बारे में अपने साथियों के साथ चर्चा कीजिए।

पैटर्न को समझकर आगे बढ़ाइए	पैटर्न को समझकर आगे बढ़ाइए
$10^2 = 10 \times 10 = (100)$	$5^3 = ... \times 5 \times 5 = (125)$
$10^1 = 10 = (100 \div 10) = 10$	$5^2 = = (125 \div 5) = 25$
$10^0 = 1 = (10 \div 10) = 1$	$5^1 = = () = ____$
$10^{-1} = \frac{1}{10} = (1 \div 10) = \frac{1}{10}$	$5^0 = = () = ____$
$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \left(\frac{1}{10} \div 10 \right) = \frac{1}{100}$	$5^{-1} = = () = ____$
$10^{-3} = = \left(..... \right) = ____$	$5^{-2} = = () = ____$
$10^{-4} = = \left(..... \right) = ____$	$5^{-3} = = () = ____$

हमने ऊपर दिए गए पैटर्न में क्या समझा? अपने साथीयों के साथ इसकी चर्चा कीजिए।

प्राप्त नियम

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

रिक्त स्थान भरिए

धनात्मक घात के रूप में लिखिए।

(a) $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ (b) $7^{-3} =$

(c) $9^{-1} =$ (d) $8^{-2} =$

(e) $x^{-4} =$ (f) $b^{-8} =$

ऋणात्मक घात के रूप में लिखिए।

(क) $\frac{1}{3^3} = 3^{-3}$ (ख) $\frac{1}{2^5} =$

(ग) $\frac{1}{5^3} =$ (घ) $\frac{1}{7^1} =$

(ड) $\frac{1}{y^6} =$ (च) $\frac{1}{a^1} =$

गुणात्मक प्रतिलोम (Multiplicative Inverse)

आइए अब हम संख्याओं के गुणात्मक प्रतिलोम के बारे में समझते हैं।

जब दो संख्याओं का गुणनफल 1 होता है तो वे संख्याएँ एक-दूसरे की गुणात्मक प्रतिलोम कहलाती हैं।

उदाहरण 1 \downarrow
 $5 \times \frac{1}{5} = 1$
या

$$5 \times 5^{-1} = 1$$

यहाँ 5 और $\frac{1}{5}$ या (5^{-1}) एक दूसरे के गुणात्मक प्रतिलोम कहलाएँगे।

उदाहरण 2 $3^2 \times \frac{1}{3^2} = 1$
या

$$3^2 \times 3^{-2} = 1$$

यहाँ 3^2 और $\frac{1}{3^2}$ या (3^{-2}) एक दूसरे के कहलाएँगे।

प्राप्त नियम

संख्या \times गुणात्मक प्रतिलोम = 1

दी गई संख्याओं के गुणात्मक प्रतिलोम लिखिए।

संख्या	गुणात्मक प्रतिलोम
(1) 7^2	7^{-2}
(2) 5^{-3}	5^3
(3) 2^{-5}
(4) 10^5
(5) 3

रिक्त स्थान भरिए

(a)	$7^{-2} \times 7^2$	=
(b)	$2^4 \times$	= 1
(c) $\times 8^2$	= 1
(d)	$3^{-3} \times$	= 1
(e) $\times 10^{-10}$	= 1



हमने घातांकों के नियम कक्षा 7 में पढ़े हैं। आइए उन्हें एक बार फिर से दोहरा लें।

घातांक के नियम लिखिए

नियम 1

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

नियम 2

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

नियम 3

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

नियम 4

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

नियम 5

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

सही मिलान कीजिए

घातांकों के नियम के आधार पर
सही मिलान कीजिए।

(1) $a^5 \times a^3$ (a) $(a \times b)^5$

(2) $a^5 \div a^3$ (b) $\left(\frac{a}{b}\right)^5$

(3) $a^5 \times b^5$ (c) $a^{5 \times 3}$

(4) $a^5 \div b^5$ (d) a^{5+3}

(5) $(a^5)^3$ (e) a^{5-3}

(1) $4^{-5} \times 4^{-2}$ (a) $7^{(-10) - (-5)}$

(2) $7^{-10} \div 7^{-5}$ (b) $4^{(-5) + (-2)}$

(3) $(-5)^{-4} \times 2^{-4}$ (c) $\left(\frac{-3}{2}\right)^{-2}$

(4) $(-3)^{-2} \div 2^{-2}$ (d) $4^{(-2) \times (-3)}$

(5) $(4^{-2})^{-3}$ (e) $(-5 \times 2)^{-4}$

आओ जाँचे और करें	घातांकीय नियमों का प्रयोग कर हल कीजिए
(1) $5^{-3} \times 5^{-4} = \frac{1}{5^3} \times \frac{1}{5^4} = \frac{1}{5^{3+4}} = \frac{1}{5^7} = 5^{-7}$	(1) $5^{-3} \times 5^{-4} = 5^{(-3)+(-4)} = 5^{-7}$
(2) $3^{-2} \times 3^{-3} =$	(2) $3^{-2} \times 3^{-3} =$
(3) $10^{-5} \times 10^{-1} =$	(3) $10^{-5} \times 10^{-1} =$
(4) $4^{-5} \times 4^{-2} =$	(4) $4^{-5} \times 4^{-2} =$

आओ जाँचे और करें	घातांकीय नियमों का प्रयोग कर हल कीजिए।
(1) $7^{-4} \div 7^{-3} = \frac{7^{-4}}{7^{-3}} = \frac{7^3}{7^4} = 7^{3-4} = 7^{-1}$	(1) $7^{-4} \div 7^{-3} = 7^{-4-(-3)} = 7^{-4+3} = 7^{-1}$
(2) $2^{-5} \div 2^{-4} =$	(2) $2^{-5} \div 2^{-4} =$
(3) $3^{-10} \div 3^{-5} =$	(3) $3^{-10} \div 3^{-5} =$
(4) $4^{-5} \div 4^{-2} =$	(4) $4^{-5} \div 4^{-2} =$

एक विशेष स्थिति, जब संख्या की घात '0' हो

$$\frac{5^4}{5^4} = 1$$

$$5^{4-4} = 1$$

$$5^0 = 1$$

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

$$a^{n-n} = 1$$

$$a^0 = 1$$

$$a^0 = \dots\dots\dots$$

ऊपर हमने $\frac{7^4}{7^3} = \frac{7^3}{7^4}$ लिखा।
ऐसा क्यों हुआ? साथियों और अध्यापक के साथ चर्चा कीजिए।

हल कीजिए

$$(i) 7^0 = \dots\dots\dots \quad (ii) (-35)^0 = \dots\dots\dots \quad (iii) (3 \times 4)^0 = \dots\dots\dots$$

$$(iv) (3^2 + 7^2)^0 = \dots\dots\dots \quad (v) \left(\frac{3}{7}\right)^0 = \dots\dots\dots \quad (vi) (8^3)^0 = \dots\dots\dots$$

<p>आओ जाँचें और करें</p> <p>(A) $(2^{-3})^4 = \left(\frac{1}{2^3}\right)^4 = \frac{(1)^4}{(2^3)^4} = \frac{1^4}{2^{12}} = 2^{-12}$</p> <p>(B) $(3^{-2})^5 =$</p> <p>(C) $(5^{-1})^3 =$</p> <p>(D) $(4^{-2})^4 =$</p>	<p>घातांकीय नियमों को प्रयोग कर हल कीजिए</p> <p>(A) $(2^{-3})^4 = 2^{-3 \times 4} = 2^{-12}$</p> <p>(B) $(3^{-2})^5 =$</p> <p>(C) $(5^{-1})^3 =$</p> <p>(D) $(4^{-2})^4 =$</p>
---	---

<p>आओ जाँचें और करें</p> <p>(1) $2^{-4} \times 3^{-4} = \frac{1}{2^4} \times \frac{1}{3^4} = \frac{1 \times 1}{2^4 \times 3^4} = \frac{1}{(2 \times 3)^4} = \frac{1}{6^4} = 6^{-4}$</p> <p>(2) $3^{-2} \times 5^{-4} =$</p> <p>(3) $4^{-3} \times 7^{-3} =$</p> <p>(4) $4^{-5} \times 7^{-5} =$</p>	<p>घातांकीय नियमों का प्रयोग कर हल कीजिए।</p> <p>(1) $2^{-4} \times 3^{-4} = (2 \times 3)^{-4} = 6^{-4}$</p> <p>(2) $3^{-2} \times 5^{-2} =$</p> <p>(3) $4^{-3} \times 7^{-3} =$</p> <p>(4) $4^{-5} \times 7^{-5} =$</p>
--	---

<p>आओ जाँचें और करें</p> <p>(A) $2^{-4+} 3^{-4} = \frac{2^{-4}}{3^{-4}} = \frac{3^4}{2^4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$</p> <p>(B) $5^{-3+} 4^{-3} =$</p> <p>(C) $7^{-5+} 5^{-5} =$</p> <p>(D) $9^{-6+} 4^{-6} =$</p>	<p>घातांकीय नियमों को प्रयोग कर हल कीजिए</p> <p>(A) $2^{-4+} 3^{-4} = \frac{2^{-4}}{3^{-4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$</p> <p>(B) $5^{-3+} 4^{-3} =$</p> <p>(C) $7^{-5+} 5^{-5} =$</p> <p>(D) $9^{-6+} 4^{-6} =$</p>
--	---

अभाज्य गुणनखंड विधि से संख्याओं को घातांकीय रूप में लिखिए।

(a) $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

3	81
3	27
3	9
3	3
	1

(b) $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 2^3 \times 5^3$

2	1000
2	500
2	250
5	125
5	25
5	5
	1

(c) $64 = \underline{\hspace{2cm}}$

$= \underline{\hspace{1cm}} \quad | \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad | \quad 64 \quad | \quad \underline{\hspace{1cm}}$

(d) $36 = \underline{\hspace{2cm}}$

$= \underline{\hspace{1cm}} \quad | \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad | \quad 36 \quad | \quad \underline{\hspace{1cm}}$

(e) $256 = \underline{\hspace{2cm}}$

$= \underline{\hspace{1cm}} \quad | \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad | \quad 256 \quad | \quad \underline{\hspace{1cm}}$

(f) $729 = \underline{\hspace{2cm}}$

$= \underline{\hspace{1cm}} \quad | \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad | \quad 729 \quad | \quad \underline{\hspace{1cm}}$

(g) $144 = \underline{\hspace{2cm}}$

$= \underline{\hspace{1cm}} \quad | \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad | \quad 144 \quad | \quad \underline{\hspace{1cm}}$

(h) $420 = \underline{\hspace{2cm}}$

$= \underline{\hspace{1cm}} \quad | \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad | \quad 420 \quad | \quad \underline{\hspace{1cm}}$

संख्याओं को एक संख्या की घात के रूप में लिखिए।

(1) $4^{-2} \times 8^4$

(2) $9^3 \times 27^{-5}$

(3) $16^2 \times 4^{-4}$

$(2^2)^{-2} \times (2^3)^4$

$2^{2 \times (-2)} \times 2^{3 \times 4}$

$2^{-4} \times 2^{12}$

$2^{-4+12} = 2^8$

$$(4) \quad (25)^3 \div (5)^2$$

$$(5) \quad 81^{-2} \div 9^{-3}$$

$$(6) \quad 64 \div 4^2$$

सरल कीजिए और उत्तर घातांक के रूप में लिखिए

$$\begin{aligned}(1) \quad & (3^{-5} \div 3^4) \times 3^{-5} \\&= 3^{-5-4} \times 3^{-5} \\&= 3^{-9} \times 3^{-5} \\&= 3^{-9+(-5)} \\&= 3^{-14}\end{aligned}$$

$$(2) \quad (-2)^7 \times (-2)^3 \times (-2)^4$$

$$(3) \quad \left(\frac{5}{2}\right)^3 \times 2^3$$

$$(4) \quad 7^{-5} \times (-2)^{-5}$$

$$(5) \quad (2^{-3} \times 2^{-4}) \oplus 2^{-5}$$

$$(6) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 1^{-2}$$

$$(7) \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-5} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$$

$$(8) \quad \frac{(2)^{-3} \times (3)^{-4}}{(2)^{-2} \times (3)^{-3}}$$

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

1. ऋणात्मक घातांकों की घात।
2. घातांक के नियम।
3. घातांकों का प्रयोग करके मानक रूप में संख्याओं को लिखना।
4. बहुत बड़ी तथा बहुत छोटी संख्याओं की तुलना करना।

अध्याय 10 – सीधा और प्रतिलोम समानुपात

(रियान की जन्मदिन पार्टी)

रियान के माता-पिता ने घर में रियान का जन्मदिन मनाने का निश्चय किया। रियान बड़ा खुश था। उसने अपने दोस्तों को भी बुलाया था तथा उसके नाना-नानी, दादा-दादी, मौसा-मौसी तथा चाचा-चाची भी जन्मदिन की पार्टी में शामिल होने आ रहे थे। उसने अपने दोस्तों के साथ मिलकर घर को गुब्बारों से सजाया तथा केक भी काटा। जाने के समय उसने सभी दोस्तों को इस यादगार शाम का तोहफ़ा भी दिया। चलकर देखें पार्टी में क्या-क्या हुआ?

HAPPY BIRTHDAY RYAN



वेलकम (Welcome)

पार्टी में उसके दोस्त—शबाना, संजय, सुषमा, कमलजीत तथा रोहन भी आए।



शबाना



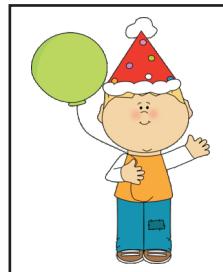
संजय



सुषमा



कमलजीत



रोहन

सभी अपने साथ दो—दो फूल लेकर आए थे। ये फूल उन्होंने अपनी कक्षा में हुए क्रियाकलाप के दौरान बनाए थे। सभी दोस्तों ने एक—एक करके अपने फूल फूलदान में रखे।

सबसे पहले शबाना ने
उसके बाद संजय ने
संजय के बाद सुषमा ने
सुषमा के बाद रोहन ने भी
तथा सबसे बाद में कमलजीत ने फूल फूलदान में डाले।



शबाना



शबाना, संजय



शबाना, संजय,
सुषमा



शबाना, संजय,
सुषमा, रोहन



शबाना, संजय,
सुषमा, रोहन, कमलजीत

फूलदान में रखे फूलों को तथा बच्चों की संख्या को देखकर तालिका को पूरा करें।

बच्चों की संख्या	1	2	3	4	5
फूलदानों में फूलों की संख्या	2	—	—	—	—

बच्चों के नाम	बच्चों की संख्या	फूलों की संख्या
शबाना	1	2
शबाना और संजय	-----	-----
शबाना, संजय और सुषमा	-----	-----
शबाना, संजय, सुषमा और रोहन	-----	-----
शबाना, संजय, सुषमा, रोहन और कमलजीत	-----	-----

पाँचों बच्चों ने कुलफूल फूलदान में रखे तथा रियान को जन्मदिन की मुबारकबाद दी। रियान ने सभी का धन्यवाद किया, और कहा :-

जैसे—जैसे मेरे दोस्तों की संख्या बढ़ती गई, वैसे—वैसे फूलदान में फूलों की संख्या भी बढ़ती गई।

धीरे—धीरे बाकी दोस्तों का भी आना शुरू हो गया। सभी दोस्त अपने साथ उपहार भी ला रहे थे। जानते हैं उपहार के बॉक्स सभी बच्चों ने गणित की कक्षा में “ठोस आकृतियों का चित्रण” पाठ के क्रियाकलाप के दौरान बनाए थे।

पहले



2 दोस्त



4 उपहार

फिर



.....दोस्त



.....उपहार

बाद में



.....उपहार

.....दोस्त

चित्र देखकर तालिका पूरी करो

	पहले	फिर	बाद में
दोस्तों की संख्या	2
लाए गए उपहारों की संख्या	4

अनुपात
पहले फिर बाद में
 $\frac{2}{4} = K = \frac{-}{-} = \frac{-}{-} = K$
 अंतर

नाना-नानी व दादा-दादी का लाड़दुलार

नाना-नानी, दादा-दादी, मौसा-मौसी तथा चाचा-चाची सभी अपने साथ चॉकलेट लेकर आए। चलकर देखें रियान को कितनी चाकलेट मिली?

घर के बाहर की दुकान से सभी ने रियान के लिए चाकलेट खरीदी थीं।



नानी ने एक चॉकलेट रियान के लिए खरीदी तथा दुकानदार को उसका मूल्य दिया।

₹. 10



दादी ने 2 चॉकलेट खरीदीं। एक रियान के लिए तथा दूसरी अपने लिए। दादी ने दुकानदार को कितने पैसे/रुपये दिए?



मौसी तीन चॉकलेट लाई। एक मौसा के लिए, एक रियान के लिए तथा एक अपने लिए। बताओ उसने दुकानदार को कितने रुपये दिए?



चाचा ने 5 चॉकलेट लिए। एक-एक सबको दी। (चाची, रियान, रियान की माँ, रियान के पापा) एक चॉकलेट चाचा ने अपने लिए रखी। चाचा को कितने रुपये देने पड़े?



अब तालिका भरिए :

	नानी	दादी	मौसी	चाचा
चॉकलेट की संख्या	1	2	-----	-----
मूल्य (रुपये) में	10	20	-----	-----

तालिका में देखकर बताइए :-

- जैसे-जैसे चॉकलेट की संख्या बढ़ी, क्या मूल्य भी बढ़ा?
- क्या तालिका में चॉकलेट की संख्या व चॉकलेट के मूल्य के अनुपात का मान (K) समान है?
- रियान को कुल कितनी चॉकलेट मिलीं?

सजावटी गुब्बारे



पिताजी ने कमरे की सजावट के लिए 60 रु. दिए तथा बच्चों से कहा कि बाजार से गुब्बारे लाओ तथा कमरे को गुब्बारों से सजा दो।



1. रोहन ने कहा : मेरे घर के पास एक दुकानदार 4 रु. का एक सुन्दर गुब्बारा देता है। चलो 60 रु. के वही गुब्बारे लाते हैं।
2. कमलजीत : मैं 5 रु. का एक रंग बिरंगा सुन्दर गुब्बारा ला सकता हूँ।
3. शबाना : मेरे दादाजी 6 रु. का भालू की शक्कल वाला गुब्बारा लाकर देते हैं।
4. संजय : मेरा एक गुब्बारा 10 रु. का है और तुम सबसे महँगा है। उससे सजावट शानदार लगेगी।

(बताओ कितने गुब्बारे आएँगे)

.....

.....

.....

.....



क्या तुमने जाना :-

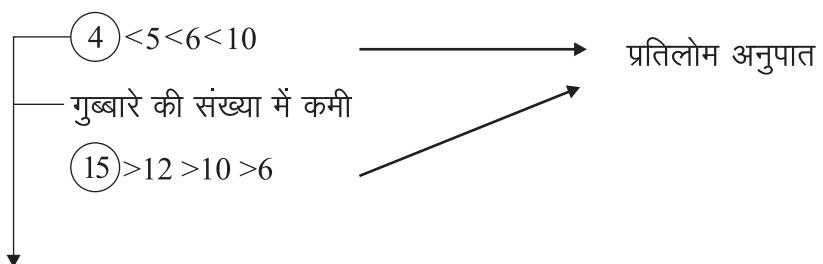
जैसे—जैसे गुब्बारे के मूल्य में वृद्धि हुई तो 60 रु. में अर्थात् निश्चित फंड में खरीदे जाने वाले गुब्बारों की संख्या में कमी होती गई।

तालिका भरो और जानो :

	रोहन	कमलजीत	संजय	शबाना
एक गुब्बारे का मूल्य	4	-----	-----	-----
गुब्बारों की संख्या	15	-----	-----	-----



गुब्बारे के मूल्य में वृद्धि



दोनों राशियों के संगत मानों का गुणनफल अचर है।

जैसे:-

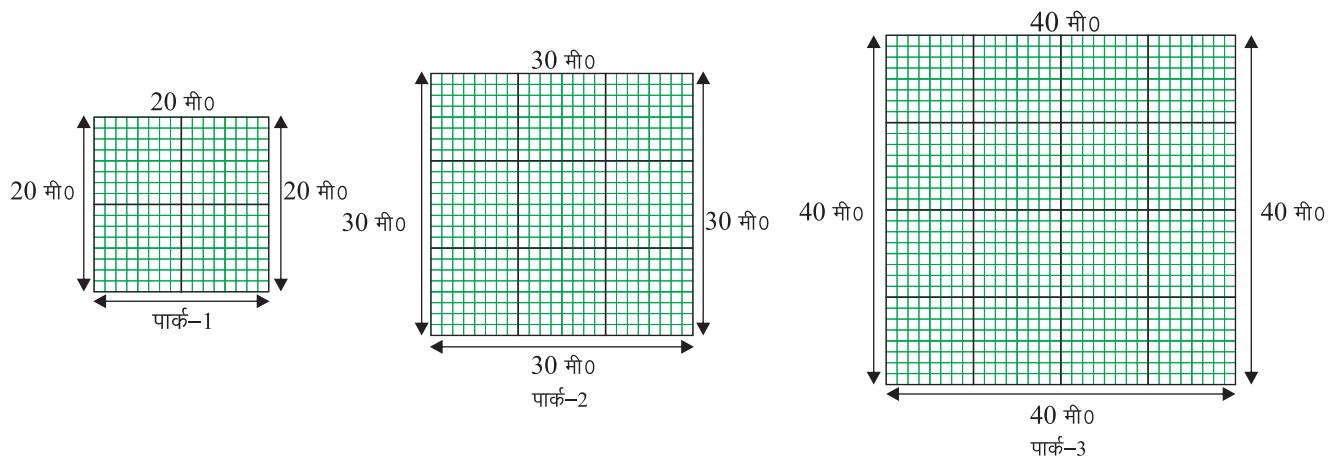
$$\begin{array}{rcl} 4 \times 15 = 60 & & (\text{अचर}) \\ - \times 12 = 60 & \longrightarrow & \text{fixed} \\ 6 \times - = 60 & & \text{or} \\ - \times - = 60 & & \text{same} \end{array}$$

आइए, थोड़ा और समझते हैं।

शाम को सारे दोस्तों ने पास के सभी पार्कों में खेलने का प्लान बनाया। घर के पास तीन पार्क थे।

- पहला छोटा पार्क 20 मीटर लंबा तथा वर्गाकार था।
- दूसरा पार्क उससे बड़ा तथा उसकी एक भुजा 30 मीटर थी, परंतु वह भी वर्गाकार था।
- तीसरा पार्क सबसे बड़ा था और वर्गाकार भी, उसकी एक भुजा 40 मीटर लंबी थी।





तालिका को पूरा करो :

भुजा की लम्बाई (मी०)	20
परिमाप (मी०)	120 मी०

पार्कों की लंबाइयों में वृद्धि तथा पार्कों के परिमाप की वृद्धि को देखकर बताइए कि दोनों हैं।
अनुक्रमानुपाती/प्रतिलोम अनुपात

पार्क में खेल

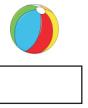
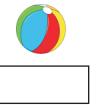
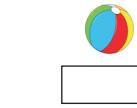
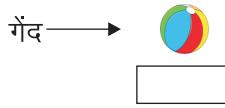
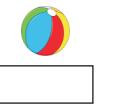
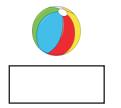
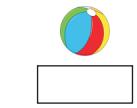
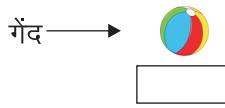
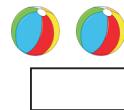
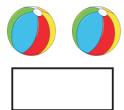
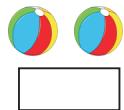
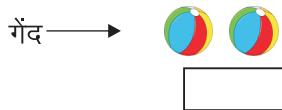
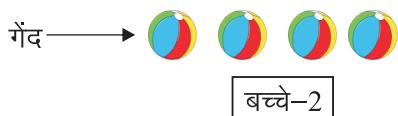
रानी और नीतू 4-4 गेंदें लेकर पार्क में खेलने गई थीं। थोड़ी देर में दोनों की एक-एक सहेली शबाना और सरबजीत आ गईं। उन्होंने दो-दो गेंदें शबाना और सरबजीत को दे दीं!

- प्रत्येक के पास कितनी-कितनी गेंदें हैं?

खेल के दौरान सभी के भाई भी आ गए। चारों ने एक-एक गेंद अपने-अपने भाई को दे दी (रोहन, शकील, मनप्रीत, रोहित)

- अब प्रत्येक के पास कितनी-कितनी गेंदें हैं?

खेलें खेल



	I	II	III
बच्चों की संख्या	2
प्रत्येक बच्चे के पास गेंदों की संख्या	8

→ वृद्धि

→ कमी

केक कटिंग

शाम को 7 बजे केक काटने का समय निश्चित हुआ।

चाची ने 1 कि.ग्रा. का केक घर पर ही बनाया था।

रियान ने केक काटना शुरू किया। घर पर 10 ही व्यक्ति उपस्थित थे।

रियान केक काटने ही वाला था। उसके 10 दोस्त पार्क से खेलकर वापिस आ गये

और खुशी से चिल्लाने लगे हम भी केक खाएँगे, हम भी केक खाएँगे।

सभी ने बराबर-बराबर केक खाया।



1. अगर पहले केक कटता जब घर पर ही 10 व्यक्ति उपस्थित थे, तो प्रत्येक को कितने ग्राम केक मिलता?

2. अब सभी व्यक्तियों को (10 व्यक्ति + 10 दोस्त) केक बँटेगा। अब प्रत्येक को कितना केक मिलेगा?

तालिका को पूरा कीजिए :

व्यक्तियों की संख्या (x)	10	20
केक की मात्रा (y) हर व्यक्ति को (ग्राम) में	100

- व्यक्तियों की संख्या बढ़ी/घटी.....
- केक की मात्रा हर व्यक्ति के लिए बढ़ी/घटी
- अनुपात बताइए—सीधा/प्रतिलोम

घर वापसी

आज गणित की कक्षा में Activity time में बच्चों ने बर्थडे कैप्स (Birthday Caps) बनाई थीं। तथा मम्मी ने रियान को कुछ मिठाइयाँ लाकर दी थीं। उनको 24 बच्चों में बाँटा जाना था तथा हर बच्चे को 5-5 मिठाइयाँ तथा एक बर्थ डे कैप मिलनी थी। यदि 4 बच्चे पहले ही घर चले गए हों, तो अब बचे हुए बच्चों में प्रत्येक को कितनी मिठाइयाँ मिलेंगी?

$$\text{कुल मिठाइयाँ} = 24 \times 5 = \dots\dots\dots\dots$$

$$\text{कुल बच्चे बचे} = 24 - 4 = \dots\dots\dots\dots$$

$$\text{प्रत्येक बच्चे को मिठाइयाँ मिली} = \dots\dots\dots\dots$$

$$\text{रियान ने कितनी बर्थडे कैप्स बाँटीं} = \dots\dots\dots\dots$$

घर वापसी पर सभी बच्चों ने रियान को गुडनाइट बोला तथा रियान ने धन्यवाद करते हुए कहा “हम सभी ने पार्टी का बहुत आनंद उठाया” और सभी अपने घर चले गए।



BIRTHDAY CAPS

ACTIVITY TIME

अब चलो पार्टी का ब्यौरा बनाएँ

(रियान की जन्मदिन पार्टी) गिनो और लिखो।

1. पार्टी में कुल लोग उपस्थित
2. कितने फूल
3. कितने फूलदान
4. कितने गिफ्ट
5. कितनी चॉकलेट
6. कितने गुब्बारे
7. कितनी गेंदें
8. कितने केक
9. कितनी बर्थडे केप्स
10. कितनी मिठाइयाँ

आइए अध्यापक से छात्रों की बातचीत सुनते हैं।

अध्यापक : बच्चो आप स्कूल कैसे आते हैं? और आपको कितना समय लगता है?

वाणी : मैडम मैं जब मम्मी के साथ पैदल आती हूँ तो 40 मिनट का समय लगता है। लेकिन जब मैं अपने दोस्तों के साथ ग्रामीण सेवा में आती हूँ तो 20 मिनट लगते हैं। परन्तु जब मैं पापा के साथ बाइक पर आती हूँ तो 10 मिनट लगते हैं।

अध्यापक : शाबाश वाणी! बच्चो इस परिस्थिति से आपने क्या निष्कर्ष निकाला?

विकास : वाणी के पापा ने वाणी को सबसे कम समय में स्कूल पहुँचाया।

अध्यापक : बिल्कुल ठीक! तो इससे हम क्या समझे?

रिया : पैदल हम धीरे-धीरे आते हैं। और ग्रामीण सेवा, बाइक के मुकाबले धीरे चली।

अध्यापक : शाबाश! इसका मतलब है जैसे—जैसे वाहन की गति बढ़ी, समय कम लगा।

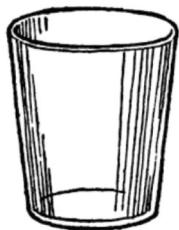
इस चर्चा से हमारी क्या समझ बनी?

इसे प्रतिलिपि अनुपात कहते हैं।



खुद करके देखो

1. प्रत्येक गिलास दूध में अगर 2 चम्मच चीनी डालें तो
- 1 गिलास दूध में 2 चम्मच चीनी
- 3 गिलास दूध में चम्मच चीनी
- 6 गिलास दूध में चम्मच चीनी



क्या दूध की मात्रा बढ़ने पर चीनी की मात्रा बढ़ेगी?

हाँ	नहीं
-----	------

प्रतिलोम	सीधा अनुपात
----------	-------------

2. रीमा के पास 90 रुपये हैं तथा एक पेन की कीमत 5 रुपये है। बताइए वह कितने पैन खरीद सकती है?

--

3. दूसरा दुकानदार एक पेन की कीमत 10 रुपये बताए तो रीमा 90 रुपये में कितने पैन खरीद सकती है?

--

4. तीसरा दुकानदार एक पेन की कीमत 15 रुपये बताये तो रीमा 90 रुपये में कितने पैन खरीद सकती है?

--

पैन की कीमत में परिवर्तन तो 90 रुपये में पैन की संख्या में भी परिवर्तन

पैन की कीमत बढ़ने पर पैन की संख्या में कमी हुई।

हाँ	नहीं
-----	------

प्रतिलोम	सीधा अनुपात
----------	-------------

एक राशि में परिवर्तन होने से दूसरी राशि में भी परिवर्तन हो रहा है।

एक में वृद्धि तो दूसरे में भी वृद्धि या एक में कमी तो दूसरे में भी कमी



सीधा या प्रत्यक्ष समानुपात/अनुक्रमानुपाती

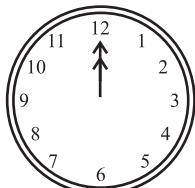
एक में वृद्धि तो दूसरे में कमी या एक में कमी तो दूसरे में वृद्धि



प्रतिलोम अनुपात

यदि एक घड़ी (Stop Watch) की छोटी सुई को और बड़ी सुई को 12 पर ले जाएँ और केवल बड़ी सुई को चलाकर देखें और छोटी सुई को 12 पर ही स्थिर रहने दें।

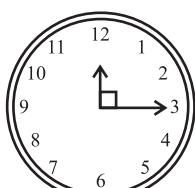
I आओ करें



समय बीता (मिनट में)

कोण (डिग्री)

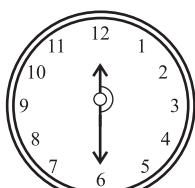
II



समय

कोण

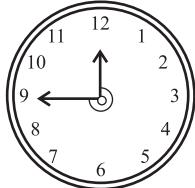
III



समय

कोण

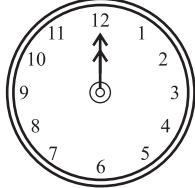
IV



समय

कोण

V



समय

कोण

घड़ियों को देखकर निम्न तालिका को पूरा करो।

घड़ी	II	III	IV	V
समय बीता (मिनट में)				
कोण डिग्री में				

1. क्या बीता समय (मिनट में) बढ़ रहा है?

2. क्या कोण भी बढ़ रहा है?

3. क्या समय तथा कोण में कोई संबंध है?

घड़ी II में बीते समय को कोण से भाग दें। $= \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

घड़ी III में

$= - = -$

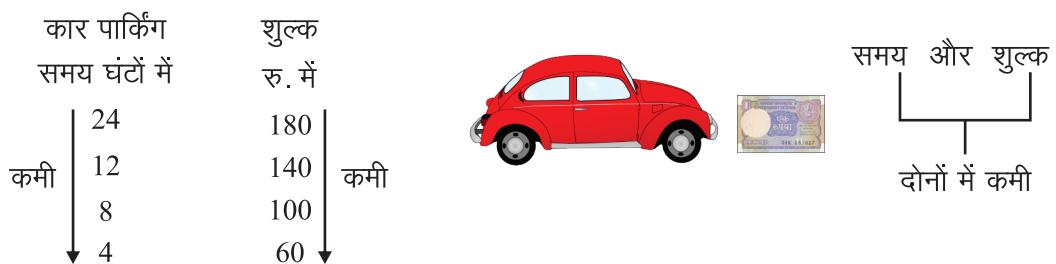
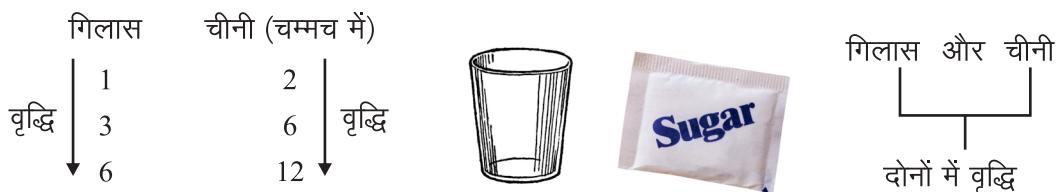
घड़ी IV में

$= - = -$

घड़ी V में

सभी का मान ($\underline{1/6}$) है!

अचर
(Fixed)



चीनी का भार (कि.ग्रा.)	1	3	5	6
मूल्य रुपये में	18	54	90	108

$\times 3$

$\times 5$

$\times 6$

जैसे—जैसे चीनी के भार में वृद्धि, वैसे—वैसे मूल्य में वृद्धि अनुपात अचर रहता है।

चीनी का भार	मूल्य रु. में	अनुपात	K
$1 \times 3 = 3$	$18 \times 3 = 54$	$3 / 54 = 1/18$	
$1 \times 5 = 5$	$18 \times 5 = 90$	$5 / 90 = 1/18$	
$1 \times 6 = 6$	$18 \times 6 = 108$	$6 / 108 = 1/18$	

नीचे दिए गए उस बॉक्स में रंग भरो जिसमें दोनों राशियाँ एक साथ बढ़ रही हैं या एक साथ घट रही हैं।

चीनी की मात्रा	और	उसी चीनी का मूल्य
बैंक में धन राशि	और	उस पर अर्जित व्याज
एक कार्य पर लगाए गए व्यक्तियों की संख्या	और	उस कार्य के पूरा होने का समय
वाहन की चाल में वृद्धि	और	उसके द्वारा तय दूरी में लगने वाला समय
कपड़े की लंबाई	और	उसका मूल्य
खेती की गई भूमि का क्षेत्रफल	और	उसी भूमि से काटी गई फ़सल की मात्रा
किसी देश की जनसंख्या	और	उसी देश में प्रति व्यक्ति भूमि का क्षेत्रफल

नीचे दी गई स्थितियों को पढ़ो और छाँटकर निर्देशानुसार बाक्स में लिखो।

- एक होस्टल में बच्चों की संख्या तथा उनके लिए भोजन की मात्रा।
- वृक्ष की लंबाई तथा वृक्ष की आयु वर्षों में।
- सीएनजी बस के द्वारा तय की गई दूरी तथा उसके द्वारा सीएनजी की खपत।
- कामगारों की संख्या तथा काम को पूरा करने का समय।
- एक समबाहु त्रिभुज की एक भुजा तथा उसका परिमाप।
- एक निश्चित फ़ंड में खरीदी गई वर्दियों की संख्या तथा मूल्य में वृद्धि।

इस बॉक्स में अनुक्रमानुपाती स्थिति लिखनी है।

इस बॉक्स में प्रतिलोम अनुपात वाली स्थिति लिखनी है।



एक कार 12 लीटर पेट्रोल में 108 कि.मी. की दूरी तय करती है। 10 लीटर पेट्रोल में कितनी दूरी तय करेगी?

ज्यादा दूरी = ज्यादा पेट्रोल
सीधा अनुपात / अनुक्रमानुपाती

$$\frac{m_1}{y_1} = \frac{m_2}{y_2}$$

$$\frac{108}{12} = \frac{m_2}{10}$$

$$\frac{108 \times 10}{12} = m_2$$

$$90 = m_2$$

दूरी कि.मी.	108	?
पेट्रोल ली.	12	10

कार 10 लीटर पेट्रोल में 90 कि.मी. की दूरी तय करेगी।

आओ हल करें

प्र.1. निम्न तालिकाओं में देखकर बताइए कि किस तालिका में x तथा y अनुक्रमानुपाती हैं।

i)

x	2	5	6	8
y	6	15	18	24

ii)

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

प्र.2. यदि x, y दोनों सीधे अनुपात में हों तो निम्न तालिकाओं को पूरा कीजिए।

i)

x	-	60
y	2	10

ii)

x	12	5
y	48	-

प्र.3. सिद्ध करो कि x तथा y अनुक्रमानुपाती हैं। यदि ऐसा है तो (अचर मान-K) भी ज्ञात कीजिए।

x	2	3	5	6
y	8	12	20	24

प्र.4. यदि x तथा y सीधे अनुपात में हैं, तथा $x=3, y=9$ हैं तो बताइए निम्न में से कौन-कौन से युग्म x तथा y के संगत मान हैं।

- | | | |
|----------------------|---------------------|--|
| a) $x=1$ तथा $y=3$ | b) $x=7$ तथा $y=21$ | |
| c) $x=30$ तथा $y=10$ | d) $x=6$ तथा $y=10$ | |

प्र.5. निम्न में छाँटकर लिखिए कौन सा सीधा अनुपात है।

- | | |
|--|--|
| a) एक बच्चे की लंबाई तथा भार का बढ़ना। | b) एक निश्चित अवधि में किसी मोटर कार की चाल तथा उसके द्वारा तय की गई दूरी। |
| c) एक वृक्ष की लंबाई तथा उस पर उगने वाले फल। | d) एक वर्ग की भुजा तथा उसका क्षेत्रफल। |

प्र.6. यदि 3 पेंसिल का मूल्य रु. 6 है तो 10 पेंसिल का मूल्य क्या होगा?

- | | | |
|-----------|-----------|--|
| a) 5 रु. | b) 60 रु. | |
| c) 20 रु. | d) 30 रु. | |

प्र.7. यदि 15 पेंसिल का मूल्य 60 रु. है तो 10 पेंसिल का मूल्य क्या होगा?

- | | | |
|-----------|-----------|--|
| a) 5 रु. | b) 40 रु. | |
| c) 20 रु. | d) 30 रु. | |

प्र.8. यदि x तथा y अनुक्रमानुपाती हैं तो बताइए कि निम्न में से कौन सा कथन सत्य नहीं है।

- a) x बढ़ता है, y भी बढ़ता है।
- b) x घटता है, y भी घटता है।
- c) x बढ़ता है, y घटता है।
- d) दोनों a) तथा b)

प्र.9. यदि 8 किलो आम का मूल्य 96 रु. है तो 12 किलो आम का मूल्य क्या होगा?

- a) 150 रु.
- b) 144 रु.
- c) 100 रु.
- d) 120 रु.

प्र.10. यदि x तथा y सीधे अनुपात में हैं, तथा $x=4, y=12$ हैं तो बताइए निम्न में से कौन-कौन से युग्म x तथा y के संगत मान हैं।

- a) $x=1$ तथा $y=3$
- b) $x=7$ तथा $y=21$
- c) $x=30$ तथा $y=10$
- d) $x=6$ तथा $y=10$

प्रतिलोम अनुपात

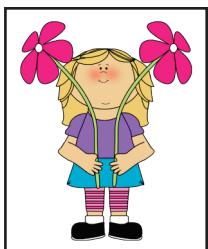
चार दोस्त



हरमीत



आयुष



सलीमा



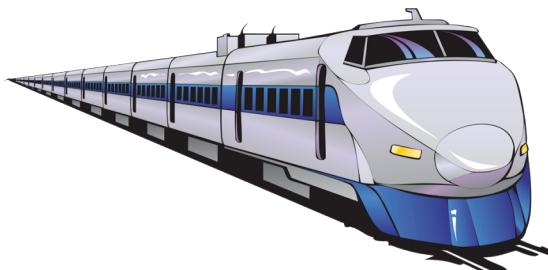
अमन

चारों ने दिल्ली से चंडीगढ़ जाने का निर्णय लिया। हरमीत ने हवाई जहाज से जाने की सलाह दी और कहा इससे हम जल्दी पहुँच जाएँगे।

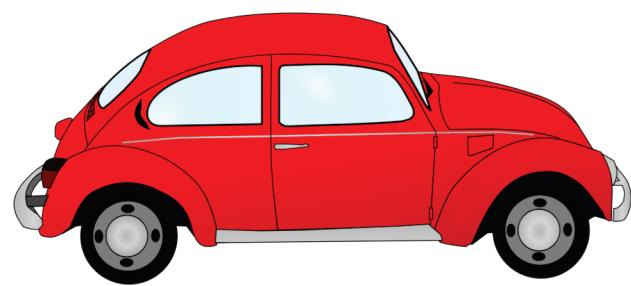


बताइए क्यूँ? _____

आयुष ने कहा हम ट्रेन से चलेंगे तो बहुत अच्छा लगेगा, बस समय थोड़ा ज्यादा लगेगा।



सलीमा ने नई कार खरीदी थी, इसलिए वह कार से चंडीगढ़ जाना चाहती है।



अमन साइकिल से जाने की जिद कर रहा था क्योंकि उसे साइकिल चलाना बहुत ही अच्छा लगता है।



ऊपर दिए गए साधनों के नाम कम समय में चंडीगढ़ पहुँचने के लिए उनकी गति के अनुसार बढ़ते क्रम में लिखिए।

1) < < <

- 2) कौन सा साधन अपने गंतव्य स्थान पर पहुँचने के लिए सबसे कम समय लेगा?

- 3) कौन सा साधन चंडीगढ़ पहुँचने के लिए सबसे ज़्यादा समय लेगा?

- 4) साधनों के नाम बढ़ते क्रम में लिखो उनके द्वारा गन्तव्य स्थान पर पहुँचने के लिए, लिए गए समय के अनुसार।

< < <

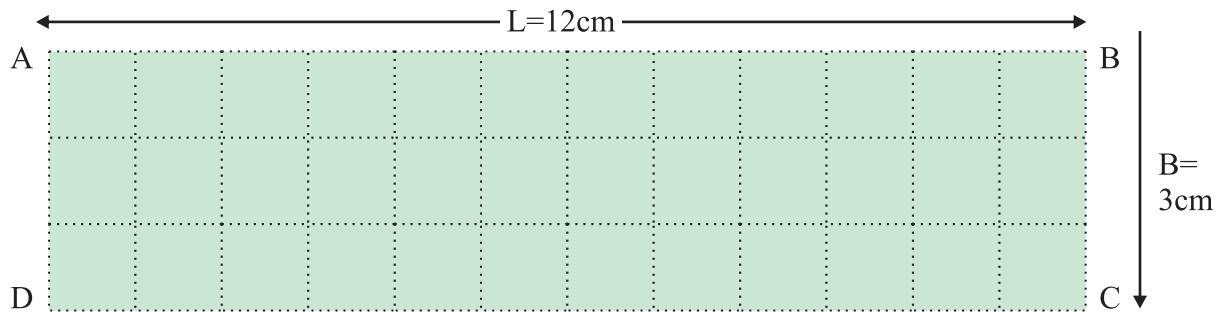
गति/चाल			समय लिया		
सबसे कम (1)	साइकिल	क्रम बढ़ा/घटा	साइकिल (1)	(1) सबसे कम	
.....(2)	कार	 (2)	(2)	क्रम बढ़ा/घटा
.....(3)	ट्रेन	 (3)	(3)	
.....(4)	हवाई जहाज़	 (4)	(4)	

निश्चित दूरी

गति बढ़ी – समय घटा

अनुपात – प्रतिलोम अनुपात

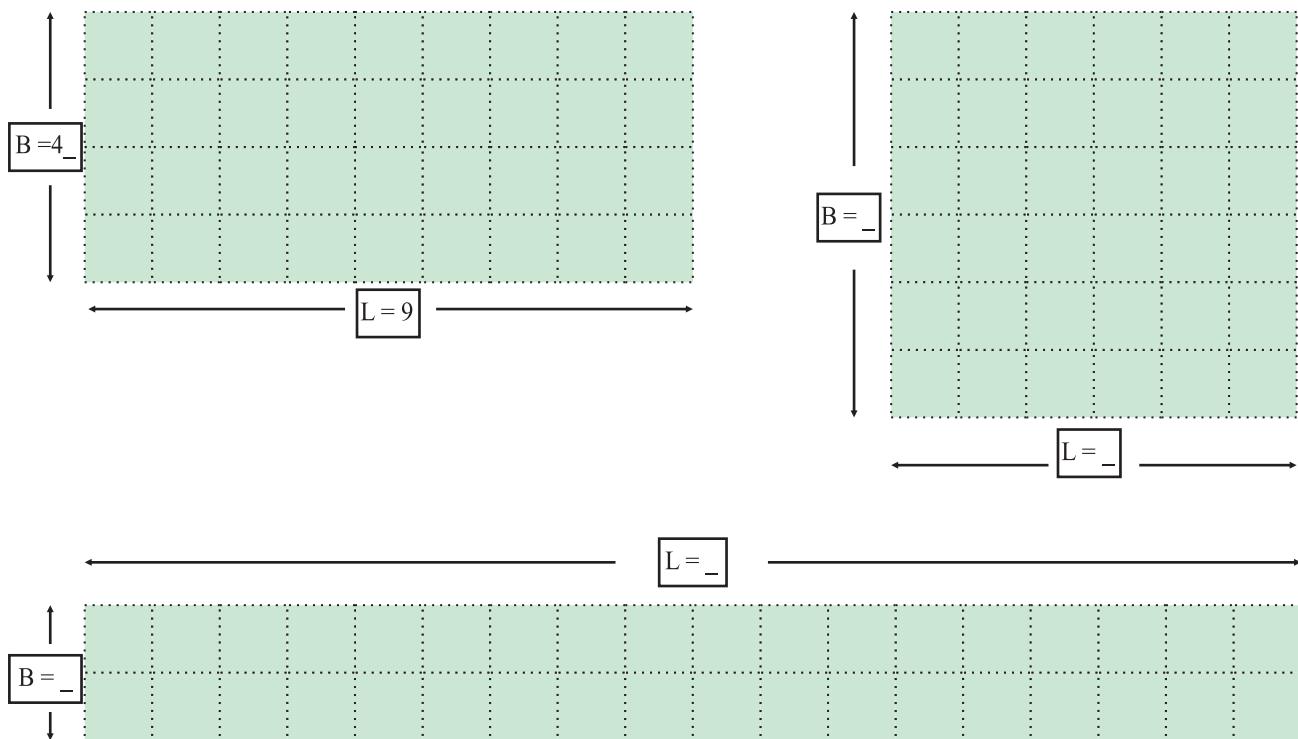
ग्राफ पर बिंदुओं को जोड़े तथा सोचो



1. चतुर्भुज ABCD में कितने वर्ग हैं?

2. यदि एक वर्ग का क्षेत्रफल 1cm^2 है तो ABCD का क्षेत्रफल cm^2

ग्राफ पर दिए गए बिंदुओं को मिलाइए तथा प्राप्त चित्र की लंबाई तथा चौड़ाई ऊपर दिखाए गए चित्र के अनुसार बताइए।



चित्र 1.

चारों आयतों की लंबाई व चौड़ाई निम्न तालिका में लिखिए।

चित्र	1.	2.	3.	4.
लम्बाई L (cm)	18	-----	-----	-----
लम्बाई B (cm)	2	-----	-----	-----

क्या आपने देखा : तालिका में जैसे-जैसे एक निश्चित क्षेत्रफल के लिए आयत की लंबाई कम होती गई तो चौड़ाई बढ़ती गई?

क्योंकि $L \times B$ का मान सभी आयतों में बराबर है।

1	18×2	$=$	<input type="text" value="36"/>
2	---- \times ----	$=$	<input type="text"/>
3	---- \times ----	$=$	<input type="text"/>
4	---- \times ----	$=$	<input type="text"/>

प्रत्येक में क्षेत्रफल 36 वर्ग इकाई आ रहा है।

यह स्थिति प्रतिलोमानुपाती है या अनुक्रमानुपाती? (लिखिए)

जूरा सोचें (प्रतिलोम अनुपात)

तालिकाओं को ध्यान से देखो और बताओ कि कौन से x,y युग्म तालिका में प्रतिलोम अनुपात को दर्शाते हैं।

i)	x	40	80	100	120	150
	y	150	75	60	50	40

ii)	x	15	25	35	45
	y	40	35	30	25

2. खुद करके देखो :-

किन्हीं दो वस्तुओं के नाम लिखो तथा उनकी मात्रा इस प्रकार लिखो कि दोनों राशियाँ तालिकाओं में प्रतिलोम अनुपात को दर्शाती हों।

i)					

ii)					

याद करो :- क्या हम जानते हैं?

1. जब दो राशियाँ x तथा y सीधे अनुपात में अनुक्रमानुपाती होती हैं तो

$$\frac{x}{y} = K \text{ (अचर)}$$

2. जब दो राशियाँ x तथा y प्रतिलोमानुपाती में होती हैं तो

$$x \times y = K \text{ (अचर)}$$

3. तालिकाओं को पूरा करो :-

यदि a तथा b प्रतिलोम अनुपात में हो तो (p, q, r), (x, y, z) (c, d, e) तथा (l, m, n) के मान ज्ञात करो।

a	6	8	9	12
b	18	P	27	r

a	2	6	y	10
b	x	15	12.5	z

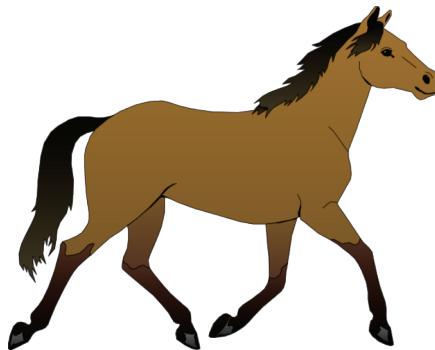
a	c	4	2.5	e
b	5	d	8	10

a	5	l	10	n
b	8	2	m	16

एकिक नियम विधि द्वारा हल करें:-

करो और लिखो

1. 35 घोड़े एक मैदान की घास को 8 दिन में खाते हैं। यदि उसी घास को 14 दिन तक चलाना हो तो कितने घोड़े मैदान में छोड़ने पड़ेंगे?



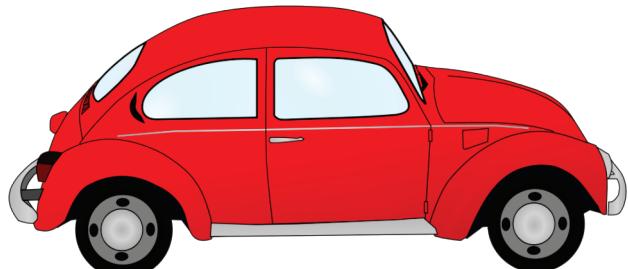
2. शबाना अपने घर से स्कूल जाने में 18 मिनट लेती है। वह 6 कि.मी./घंटे की चाल से चलती है। यदि वह 15 मिनट में स्कूल पहुँचना चाहती है तो उसे किस चाल से चलना होगा?



3. अगर एक पैकेट मिठाइयाँ 12 बच्चों में बाँटते हैं तो प्रत्येक को 5 मिठाइयाँ मिलती हैं। यदि वही मिठाइयाँ 10 बच्चों में बाँटनी हों तो प्रत्येक बच्चे को कितनी मिठाइयाँ मिलेंगी?



4. एक गाड़ी 75 कि.मी./घंटे की चाल से एक निश्चित दूरी 3.6 घंटों में तय करती है। यदि उसे यह दूरी 3 घंटों में तय करनी हो तो गाड़ी को किस चाल से चलना होगा?



आइए अब हम कुछ प्रश्नों को हल करते हैं।

प्र.1 यदि 1 मज़दूर 5 दिन काम करने के 3000 रु. लेता है। बताइए इस हिसाब से वह 1 दिन काम करने के लिए कितने रुपये लेगा?

हल :

प्र.2 यदि 5 जूस की बोतल का मूल्य 125 रु. है तो 3 जूस की बोतल का मूल्य कितना होगा?

हल :

प्र.3 यदि 1 दर्जन केले का मूल्य 60 रु. है तो 3 केलों का मूल्य कितना होगा?

हल :

प्र.4 यदि 50 कि.ग्रा. गेहूँ का मूल्य 1200 रु. है तो 15 कि.ग्रा. गेहूँ हमें कितने रुपयों में मिलेगा?

हल :

Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

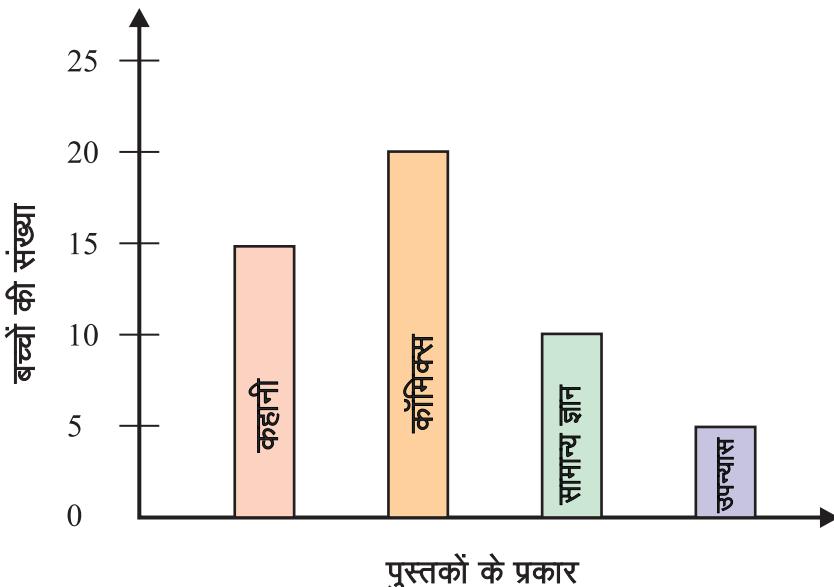
1. अनुपात को गुणा या भाग द्वारा राशियों की तुलना के रूप में समझ पाना।
2. समतुल्य अनुपात जानना।
3. दैनिक जीवन की परिस्थितियों में समानुपात को समझना।
4. दैनिक जीवन के उदाहरणों में अनुपात व समानुपात का उपयोग कर पाना।

अध्याय 11 – आलेखों से परिचय

हम जानते हैं कि आँकड़ों का रुझान और तुलना दिखाने के लिए आलेख बहुत उपयुक्त होते हैं क्योंकि आलेख द्वारा उन्हें जल्दी आसानी व स्पष्टता से समझा जा सकता है।

आओ, विभिन्न प्रकार के आलेखों से परिचय करें।

बच्चे किस प्रकार की पुस्तकें पढ़ना पसंद करते हैं, नीचे एक आलेख द्वारा दिखाया गया है।



आओ आलेख देखकर प्रश्नों के उत्तर दें।

कक्षा में कितने बच्चे सामान्य ज्ञान की पुस्तकें पढ़ना पसंद करते हैं।

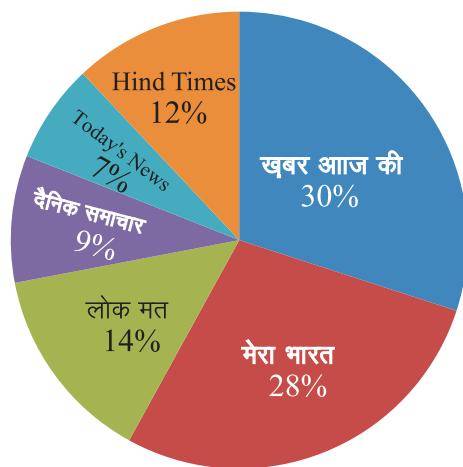
इस आलेख को क्या कहते हैं?

बच्चे सबसे अधिक कौन सी पुस्तकें पढ़ना पसंद करते हैं?

यदि प्रत्येक बच्चे ने केवल एक ही प्रकार की पुस्तक पसंद की हो तो कक्षा में कुल बच्चों की संख्या बताइए।

आइए, अब एक और आलेख को भी देखते हैं।

एक मोहल्ले में विभिन्न अखबारों के पाठकों का प्रतिशत निम्न आलेख में दर्शाया गया है।



क्या हम इस आलेख
को पहचानते हैं ?

प्र०:- इस वृत्त आलेख को देखकर बताएँ कि यह क्या दर्शाता है?

उ०:- _____

प्र०:- कितने प्रतिशत व्यक्ति दैनिक समाचार पढ़ते हैं?

उ०:- _____

प्र०:- सबसे अधिक प्रतिशत किस अखबार के पाठकों का है?

उ०:- _____

प्र०:- खबर आज की तथा मेरा भारत के पाठकों के प्रतिशत में कितना अंतर है?

उ०:- _____

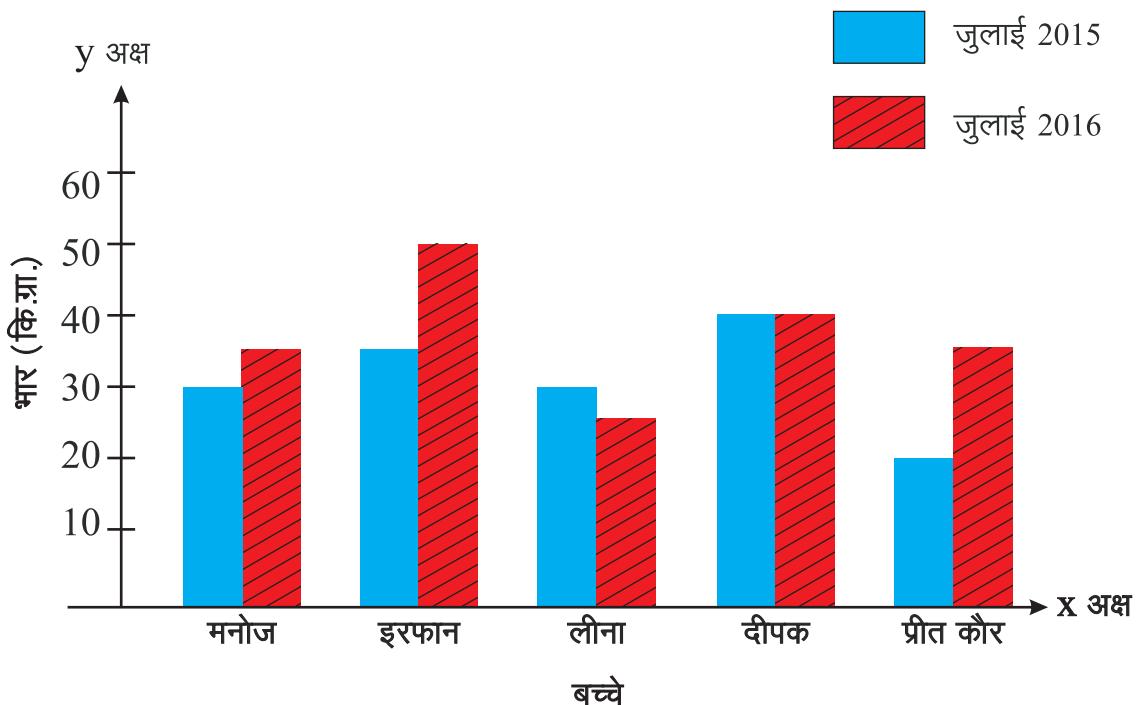
प्र०:- अखबार में किस भाषा के पाठकों की संख्या अधिक है?

उ०:- _____

पाई चार्ट / वृत्त आलेख दंड आलेख से कैसे भिन्न है, अध्यापक के साथ चर्चा करें।

नीचे दिए आलेख को पहचानकर इसका नाम बताइए

नीचे दिए गए पाँच बच्चों के 2015 व 2016 के भारों को दर्शाया गया है।



अब आलेख के आधार पर नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए

प्र०:- आलेख क्या दर्शा रहा है?

उ०:- _____

प्र०:- किस बच्चे के भार में सबसे अधिक वृद्धि देखी जा रही है?

उ०:- _____

प्र०:- लीना का भार बढ़ा है या कम हुआ है।

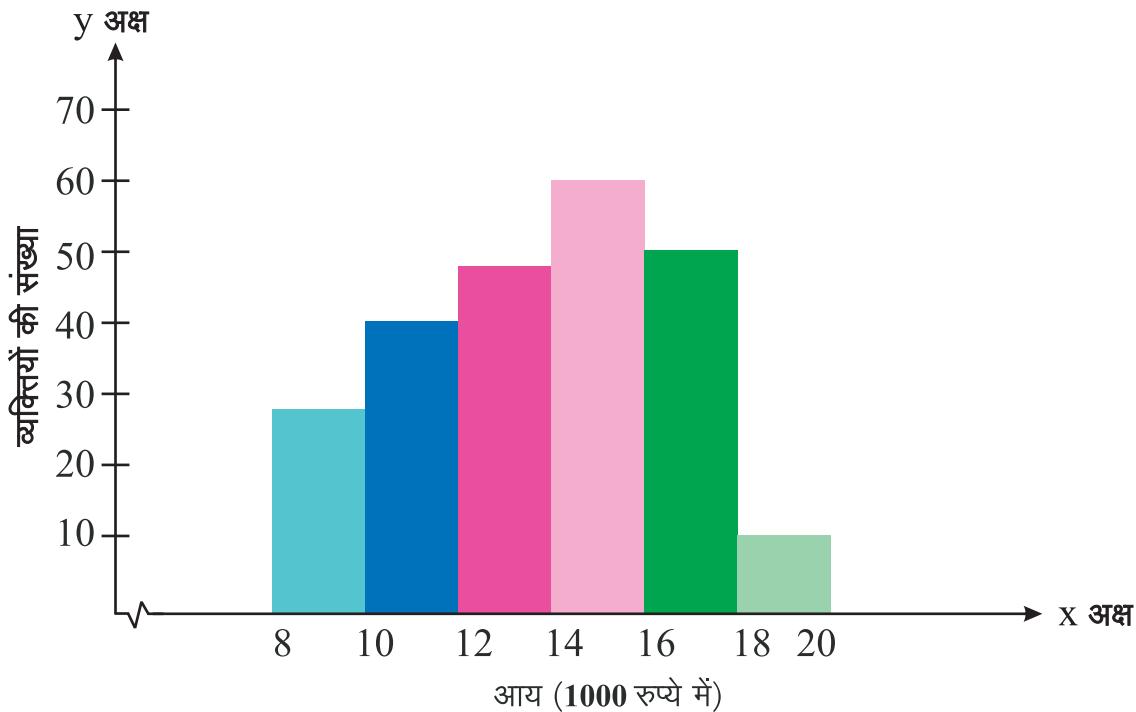
उ०:- _____

प्र०:- आपके अनुमान से लीना के भार में हुए बदलाव के क्या कारण हो सकते हैं?

उ०:- _____

आओ, समझने का प्रयास करें।

यह एक आयत चित्र है जिसमें एक फैक्ट्री में काम करने वाले 250 व्यक्तियों की आय का विवरण दिया गया है।



प्र०:- दंड आलेख में किसकी तुलना की थी?

उ०:- _____

प्र०:- आयत चित्र क्या दर्शा रहा है?

उ०:- _____

प्र०:- 14000 – 16000 रु. आय पाने वाले कितने व्यक्ति हैं?

उ०:- _____

प्र०:- सबसे अधिक आय वर्ग में कितने व्यक्ति हैं?

उ०:- _____

प्र० :- 8000–10000 रु. आय पाने वाले व्यक्तियों की संख्या लिखिए।

उ०:- _____

क्या आप जानते हैं कि दंड आलेख व आयत चित्र में क्या अंतर है? इसकी चर्चा साथियों व अध्यापक के साथ करें।

रेखा आलेख

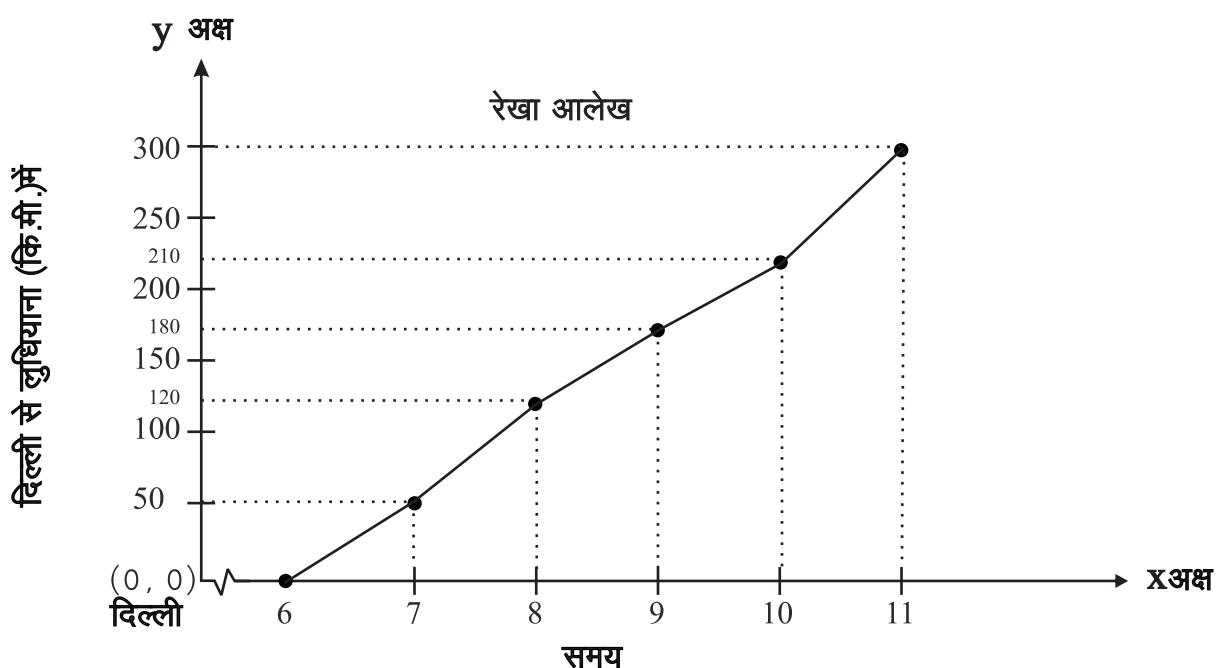
रेखा आलेख को हम ऐसे ऑँकड़ों को दिखाने के लिए प्रयोग करते हैं, जो समय के साथ-साथ बदलते रहते हैं।

आइए रेखा आलेख को कुछ उदाहरणों से समझने का प्रयास करते हैं।

उदाहरण 1

दिवाकर गर्मी की छुट्टियों में अपने दादाजी के पास लुधियाना गया। दी गई तालिका में रेलगाड़ी द्वारा एक समय में तय की गई दूरी को दिखाया गया है।

समय (प्रातः)	6 बजे	7 बजे	8 बजे	9 बजे	10 बजे	11 बजे
दूरी (कि.मी. में)	0	50	120	180	210	300



रेखा आलेख को समझकर, नीचे लिखे प्रश्नों के उत्तर दीजिए

प्र०:- रेखा आलेख में x अक्ष क्या दर्शा रहा है?

उ०:- _____

प्र०:- रेखा आलेख में y अक्ष क्या दर्शा रहा है?

उ०:- _____

प्र०:- रेलगाड़ी दिल्ली से किस समय चली?

उ०:- _____

प्र०:- रेलगाड़ी ने प्रातः 9 से 10 बजे तक कितनी दूरी तय की?

उ०:- _____

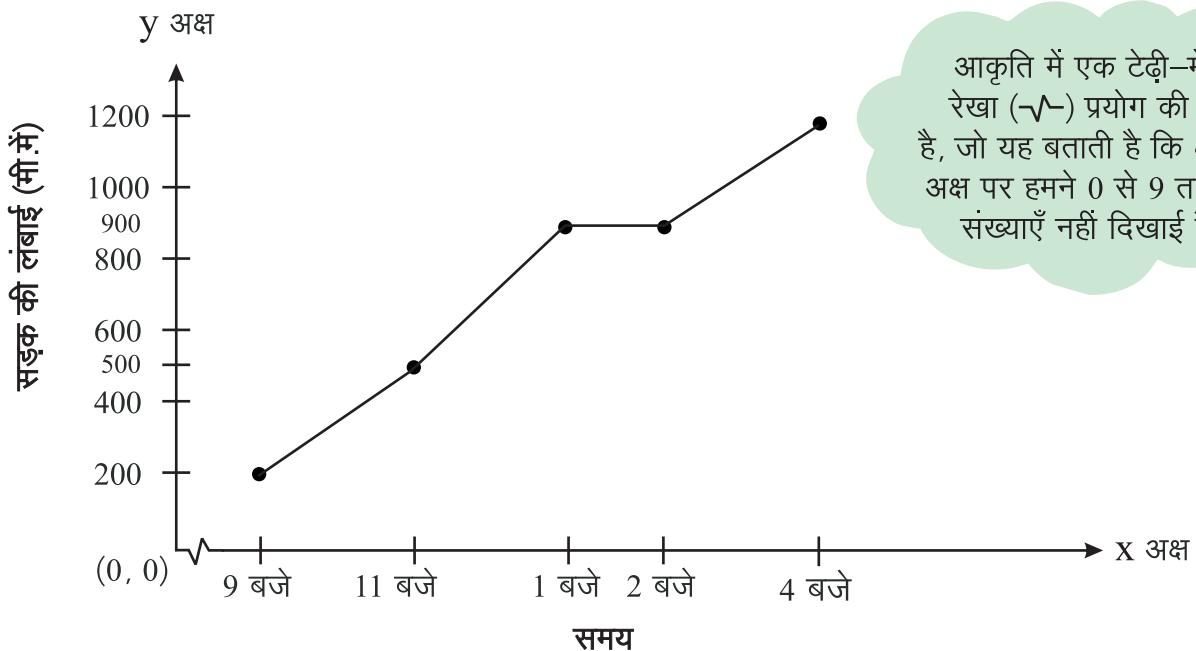
प्र०:- 10-11 बजे के बीच रेलगाड़ी ने कितनी दूरी तय की?

उ०:- _____

उदाहरण 2

निम्न तालिका में मजदूरों द्वारा हर दो घंटे में बनाई गई सड़क का उल्लेख है।

समय	9 बजे प्रातः	11 बजे प्रातः	1-2 बजे दोपहर	2 बजे दोपहर	4 बजे शाम
बनी हुई सड़क (मी.में)	200	500	900	900	1200



आकृति में एक टेढ़ी-मेढ़ी रेखा ($\nearrow\searrow$) प्रयोग की गई है, जो यह बताती है कि क्षैतिज अक्ष पर हमने 0 से 9 तक की संख्याएँ नहीं दिखाई हैं।

रेखा आलेख को समझकर उत्तर दीजिए

प्र०:- सुबह 11 बजे तक कितनी लंबी सड़क बन गई थी?

उ०:- _____

प्र०:- सड़क बनाने की गति किस एक समय अंतराल में सबसे अधिक है?

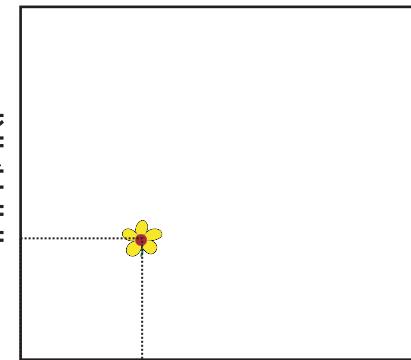
उ०:- _____

प्र०:- पूरे दिन में कितने मीटर सड़क बनी?

उ०:- _____

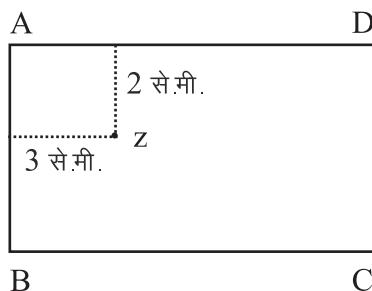
1 बजे और 2 बजे के बीच काम रुका हुआ है। इसका क्या कारण हो सकता है?
अपने साथियों के साथ चर्चा करो।

मेजपोश पर फूल पेन्ट किया हुआ है।

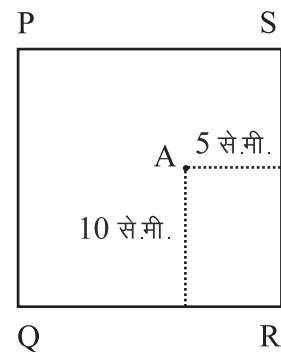


कौन से कथन से फूल की सही-सही स्थिति बता सकते हैं।

1. फूल मेजपोश के नीचे वाले आधे भाग मे हैं।
2. फूल मेजपोश के बाएँ किनारे के पास है।
3. फूल मेजपोश के बाएँ किनारे से 4 से०मी० दूर है।
4. फूल मेजपोश के निचले किनारे से 4से०मी० दूर है।
5. फूल मेजपोश के बाएँ किनारे के 4 से.मी. पास है तथा निचले किनारे के 3 से.मी. पास है।



बिंदु की स्थिति बताना



ऊपर दी गई आकृतियों की मदद से खाली स्थान भरिए।

1. बिन्दु Z, AB से ___ से.मी. दूर है तथा AD से ___ से.मी. दूर है।
2. बिन्दु A, RS से ___ से.मी. दूर है तथा QR से ___ से.मी. दूर है।

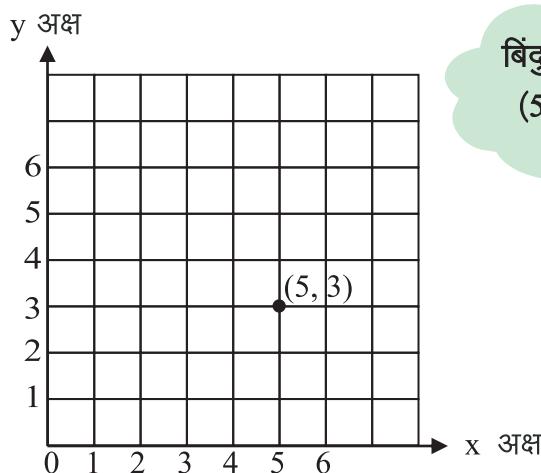
आओ पता करें

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
									A
									B
									C
			■	■					D
									E
	■								F
							■		G
									H

- थियेटर हॉल में अमित की सीट संख्या D-4 है। ठीक—उसके साथ ही उसके मित्र फुरकान की सीट है। फुरकान की सीट संख्या लिखिए। _____
- G पंक्ति में छायांकित सीट की संख्या बताइए _____
- कॉलम 2 में छायांकित सीट की संख्या बताइए _____

आओ समझें

ग्राफ़ पेपर पर एक बिंदु जिसकी दूरी बाएँ किनारे से 5 इकाई गिनकर तथा निचले किनारे से 3 इकाई है (गिनकर देखिए)

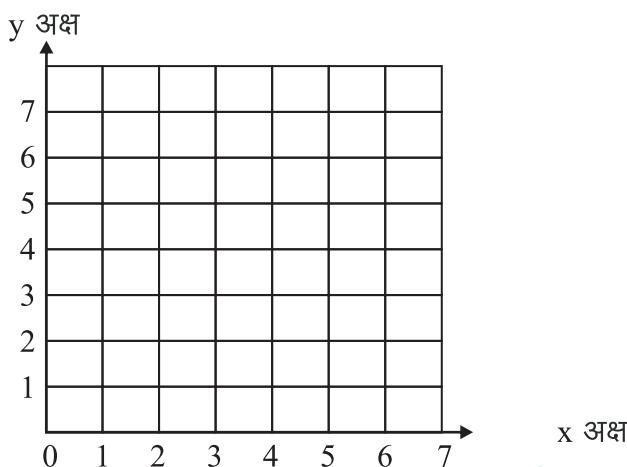


बिंदु की स्थिति को हम (5, 3) से दिखाते हैं।

बिंदु (5, 3) में 5, y अक्ष से लंब दूरी हैं और 3, x अक्ष से लंब दूरी है।

5 → x निर्देशांक है
3 → y निर्देशांक है

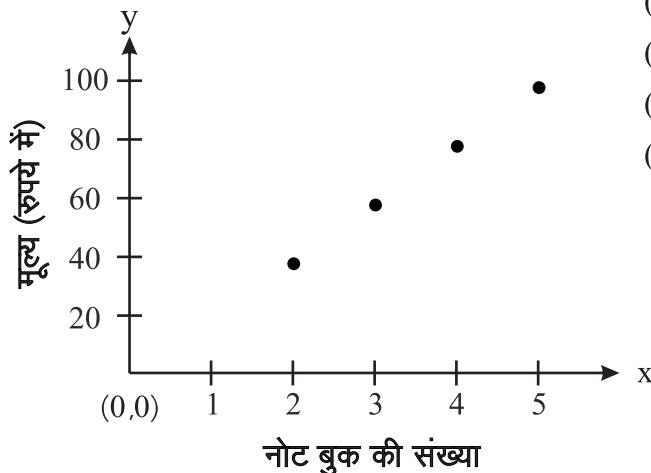
पीछे देखते हुए बिंदु (3, 5), (4, 3) तथा (3, 4) दिए गए ग्राफ़ पेपर पर अंकित कीजिए।



प्रश्न 1.

नोट बुक की संख्या	2	3	4	5
मूल्य (रुपये में)	40	60	80	100

आलेख पूरा कीजिए

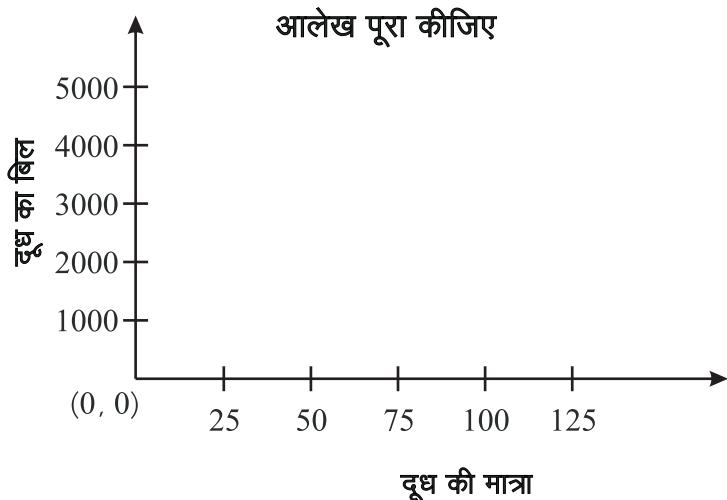


तालिका में देखकर बताएँ

- (1) नोट बुक का मूल्य कब बढ़ता या घटता है? _____
- (2) इन बिंदुओं को मिलाकर क्या बनता है? _____
- (3) स्वतंत्र चर कौन सा है? _____
- (4) आश्रित चर कौन सा है? _____

प्रश्न 2.

दूध की मात्रा (लीटर में)	50	75	100	125
दूध का बिल (रु. में)	2000	3000	4000	5000



- (1) मूल बिन्दु के निर्देशांक क्या हैं?

(1) दूध का कुल मूल्य और दूध की मात्रा में कौन किस पर निर्भर करता है?

(2) स्वतंत्र चर कौन सा है? _____

(3) आश्रित चर कौन सा है? _____

प्रश्न 3.

निम्न तालिका को देखिए और बताइए कि यह क्या दर्शाती है?

वर्ग की भुजा (से.मी.)	2	3	4	5
क्षेत्रफल (वर्ग से.मी.)	4	9	16	25

अब इन आँकड़ों की सहायता से रेखा आलेख बनाइए तथा खुद प्रश्न बनाकर देखें।

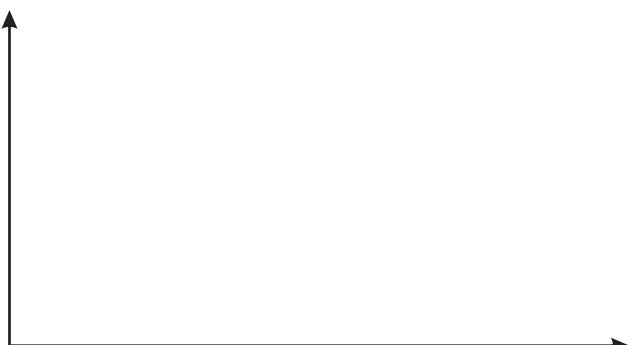


प्रश्न 4.

निम्न तालिका में साइकिल द्वारा तय की गई दूरी दिखाई गई है।

समय (मिनट में)	10	20	30	40
दूरी (कि.मी. में)	1	2	3	4

अब इन आँकड़ों की सहायता से रेखा आलेख बनाइए।



Learning Outcomes (अधिगम सम्प्राप्ति)

1. दंड – आलेख
2. वृत–आलेख या पाई–चार्ट (ग्राफ) या वृत चित्र।
3. रेखा–आलेख
4. आयत–चित्र
5. निर्देशांक
6. स्वतन्त्र चर तथा आश्रित चर में संबंध एक आलेख द्वारा प्रदर्शन।

आओं खेलें (1)

दोस्तो, इस रोल को पढ़ें और अपने अध्यापक की मदद से खेलें।

छात्रों का एक समूह गीत गाता हुआ कक्षा में प्रवेश करता है।

गीत : संख्या क्यों भाए, संख्या क्यों भाए?

(कोरस दोहराता है)

कुछ भी समझ न आए, कुछ भी समझ न आए।

जब ध्यान करोगे, अपने पर मानो

तुम ये पहचानो,

तुम्हें, बात समझ में आए,

हाँ बात समझ में आए।

सूत्रधारः यकीनन बात तो समझ में आनी ही चाहिए। बिना समझ में आए किसी भी बात से नहीं जुड़ा जा सकता। खासतौर से गणित में। और इस सबको हम खेल-खेल में कर सकते हैं।

पात्र 2 : खेल-खेल में! वो कैसे?

सूत्रधारः अच्छा चलिए एक मैजिक ट्रिक करते हैं।

पात्र 3 : मगर मैजिक ट्रिक होता क्या है?

सूत्रधारः ये एक जादुई करिश्मा है, जिसे हम बड़ी आसानी से कर सकते हैं।

पात्र : वो कैसे?

सूत्रधारः ठीक है। अब मैं आपको जो हिदायत दूँ, वैसे ही करने की कोशिश करें।

(गुप्त में सभी बच्चे हाँ-हाँ करते हुए स्वीकृति देते हैं।)

कोई संख्या मन में सोच लें।

पात्र 2 : सोच ली।

सूत्रधारः उसमें उतनी ही संख्या अपने दोस्त की मिला लें।

पात्र 3 : मिला ली।

सूत्रधारः अब उसमें 18 मेरी जोड़ लें।

पात्र 2 : जोड़ ली।

सूत्रधारः अब टोटल का आधा कर दें।

पात्र 3 : कर दिया।

सूत्रधारः दोस्त का दोस्त को वापस दे दें।

पात्र 2 : दे दिया।

सूत्रधारः अब तुम्हारे पास 9 बचेगा।

सभी : अरे वाह! ये तो कमाल है। मगर आपको कैसे पता चला?

सूत्रधारः ये कोई कमाल नहीं है। ये तो सिर्फ़ गणित है।

पात्र 4 : कैसे कैसे? मुझे इसे पूरा दोबारा समझना है।

सूत्रधारः ठीक है। मान लीजिए हमने एक संख्या सोची 32

पात्र : 32 अपने दोस्त की।

सूत्रधारः तो कुल हो गई 32 जमा 32, बराबर 64... ठीक!

पात्र 2 : बिल्कुल, अब 18 आपके जोड़ दिए।

पात्र 3 : तो कुल हो गए... $64 + 18 = 82$

सूत्रधारः अब हमने कुल का आधा कर दिया

$82 / 2$ बराबर 41

पात्र 4 : अब 41 में से, दोस्त के दोस्त को दे दिए।

पात्र 2 : 41-32, और बच गया 9

सूत्रधारः इसको बीजगणित के जूरिए आसानी से समझ सकते हैं।

सभी : कैसे सर?

सूत्रधारः संख्या माना = x

दोस्त की मानी संख्या = x

दोस्तों की संख्या के साथ कुल मिलाकर हुए = 2x

मेरे जोड़ लिए 18, कुल हो गए = $2x + 18$

कुल जोड़ का आधा किया = $\frac{2x+18}{2} = x + 9$

दोस्त का दोस्त को दे दिया (घआ दिया) = $x + 9 - x = 9$

अब बचे 9

आओं खेलें (2)

पीछे के रोल प्ले में अब आप जान गए होंगे कि सूत्रधार ने आपकी सोची गई संख्या (X) का दुगना ($2X$) कराया फिर आधा कराया ($\frac{X}{2}$) और फिर उस संख्या को हटा दिया ($X - \frac{X}{2}$)। जाहिर है शेष बचने वाली राशि सूत्रधार द्वारा जुड़वाई गई राशि की आधी होगी। अब आप भी अपने साथियों के साथ ये खेल खेल सकते हैं।

आओ नन्हे दोस्तों, एक और रोल प्ले खेलते हैं

संख्याओं के साथ खेल

संख्याओं के साथ खेल करते हुए कक्षा को आठ—आठ बच्चों के समूह में बाँटते हैं। बच्चों में एक टीचर की भूमिका निभाता है।

सपना(टीचर) : आज हम एक खेल खेलते हैं। ये दरअसल संख्याओं का खेल है।

अभिजीत : संख्याओं का खेल....वो कैसे?

सपना : इस खेल को हम अकेले—अकेले खेल सकते हैं।

आसिफ : अकेले—अकेले कैसे खेलेंगे? किसी भी खेल के लिए कम से कम दो लोगों का होना ज़रूरी है।

सपना : इस खेल में मैं आपसे कुछ पूछँगी!

कपिल : मगर हमें तो आता ही नहीं है, हम कैसे बताएँगे?

सपना : ठीक है। मैं तुमसे जो भी पूछँगी वो बहुत आसान चीज़ें होंगी। (सब बच्चे मैं—मैं कहकर अपने हाथ उठाते हैं।)

सपना : कमाल है आप सब लोग सवाल सुनने से पहले ही जवाब देना चाहते हैं। (सबके हाथ नीचे हो जाते हैं।)

सपना : अब हम शुरू करते हैं। (सब ध्यानपूर्वक सुनने लगते हैं।)

सपना : दो अंकों की कोई एक संख्या सोचो।

रानी : सोच ली।

सपना : अब उस संख्या के अंकों को पलट दो।

रानी : मतलब इकाई और दहाई के स्थानों को एक—दूसरे के स्थान पर रखें।

सपना : बिल्कुल ठीक। अब पहले सोची गई संख्या और पलटकर बनी संख्या को जोड़ दो।

अभिजीत : जोड़ दिया।

सपना : अब जोड़ने से बनी संख्या को 11 से भाग दो।

आसिफ : दे दिया।

सपना : शेषफल 0 बचा।

सभी : हाँ हाँ.....मगर आपने कैसे पता लगाया?

सपना : क्या सबका शेषफल 0 आ रहा है

रानी : हाँ, कमाल है...

सपना : (हँसती है) कमाल कुछ नहीं है, इसमें गणित है।

अभिजीत : गणित कैसे?

सपना : बताती हूँ, बताती हूँ।

सबसे पहले हमने दो अंकों की सोची एक संख्या : 23

अंकों को पलटकर बनी संख्या : 32

दोनों का कुल मिलाकर योग : $23+32 = 55$

अब 55 को 11 से भाग करें तो शेषफल 0 बचेगा।

अभिजीत : ये क्या हर संख्या के लिए लागू होगा?

सपना : बिल्कुल अभिजीत। अब मैं एक और उदाहरण तुम्हारे सामने रखती हूँ।

आसिफ : क्या ऐसा ही?

सपना : हाँ लगभग ऐसा ही। दो अंकों की कोई संख्या सोचो...सोच लिया?

(सभी हाँ में सिर हिलाते हैं।)

अब संख्या के अंकों को पलट दो।

अब पहले सोची गई संख्या और पलटकर बनी संख्या का अंतर निकालो।

उस अंतर को अगर 9 से भाग दें तो शेषफल 0 बचेगा।

मान लो सोची गई संख्या है 35,

अंक पलटने पर बनी संख्या 53,

53 में से 35 घटाया, बचा 18,

18 को अब 9 से भाग किया।

शेषफल बचा 0,

अरे वाह! ये तो मजेदार है।

आइए, हम सब कुछ और नई संख्याओं को लेकर इस खेल को खेलते हैं.....

Inside Back Cover (Matter)

विभाज्यता का गीत

आओ बच्चो खेल करें सब, मिलकर आपस में

मौज में हम पढ़े पढ़ाएँ, स्कूल और घर में
अंकों की दुनिया का देखो, छोटा सा संसार है

चले जहां से वहीं आ गए, दुनियाभर में प्यार है
अंक अंक करके जो बनते, संख्याओं के जोड़ विशाल

अद्भुत इस दुनिया में दोस्तो, शंकाओं के कटते जाल
कौन सी संख्या बँटेगी कैसे, इसके क्या उसूल हैं

किसने बाँटा किसको बचाया, विभाज्यता के रूल हैं
दो से विभाजित संख्या देखो, अंक इकाई होता सम

पेट फुलाए धूम धूमकर, मिस्टर 'दो' को कोई न गम
तीन से विभाजित होती संख्या, सब अंकों के जोड़ में

वहीं जोड़ जब पूरा बँट गया, तीन से इस होड़ में
पांच पांच करके जो देखा, अंक इकाई शून्य और पाँच

खेल करो और खूब करो पर, कभी न देखो आए आँच
दस की महफिल खूब जमेगी, अगर शून्य हो इकाई पर

समय से पहुँचो अपने घर पर, धूमो न तुम इधर—उधर