शिक्षा निदेशालय

राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली सरकार

सहायक सामग्री

(2020–2021)

कक्षा : दसवीं

गणित

मार्गदर्शनः

श्रीमती मनीषा सक्सेना

सचिव (शिक्षा)

श्री बिनय भूषण

निदेशक (शिक्षा)

डॉ. सरोज बाला सेन

अतिरिक्त शिक्षा निदेशक (स्कूल एवं परीक्षा)

समन्वयकः

श्रीमती मुक्ता सोनी
उप शिक्षा निदेशक (परीक्षा)

श्री राजकुमार
विशेष कार्याधिकारी (परीक्षा)

श्री कृष्ण कुमार
विशेष कार्याधिकारी (परीक्षा)

उत्पादन मंडल

अनिल कुमार शर्मा

दिल्ली पाठ्य पुस्तक ब्यूरो में **प्रभजोत सिंह**, सचिव, दिल्ली पाठ्य पुस्तक ब्यूरो, 25/2, पंखा रोड, संस्थानीय क्षेत्र, नई दिल्ली द्वारा प्रकाशित तथा **मुद्रक :** सुप्रीम ऑफसेट प्रेस, मालवीय नगर, नई दिल्ली-110017

MANISHA SAXENA
IAS

सत्यमेव जयते

सचिव (शिक्षा)
राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र
दिल्ली सरकार
पुराना सचिवालय, दिल्ली-110054
दूरभाष : 23890187 टेलीफैक्स : 23890119

Secretary (Education)
Government of National Capital Territory of Delhi
Old Secretariat, Delhi-110054
Phone : 23890187 Telefax : 23890119
e-mail : secyedu@nic.in

MESSAGE

The importance of adequate practice during examinations can never be overemphasized. I am happy that support material for classes IX to XII has been developed by the Examination Branch of Directorate of Education. This material is the result of immense hard work, co-ordination and cooperation of teachers and group leaders of various schools. The purpose of the support material is to impart ample practice to the students for preparation of examinations. It will enable the students to think analytically & rationally, and test their own capabilities and level of preparation.

The material is based on latest syllabus prepared by the NCERT and adopted by the CBSE for the academic session 2020-21 and covers different levels of difficulty. I expect that Heads of Schools and Teachers will enable and motivate students to utilize this material during zero periods, extra classes and regular classes best to their advantage.

I would like to compliment the team of Examination Branch for their diligent efforts of which made it possible to accomplish this work in time. I also take this opportunity to convey my best wishes to all the students for success in their endeavours.

(Manisha Saxena)

BINAY BHUSHAN, IAS

सत्यमेव जयते

Director
Education & Sports
Govt. of NCT of Delhi
Old Secretariat, Delhi- 110054
Tel.: 23890172, Fax : 23890355
E-mail : diredu@nic.in
Website : www.edudel.nic.in

D.O. No.

Date : 03-10-19

Dear Students,

Directorate of Education is committed to providing qualitative and best education to all its students. The Directorate is continuously engaged in the endeavor to make available the best study material for uplifting the standard of its students and schools.

Every year, the expert faculty of Directorate reviews and updates Support Material. The expert faculty of different subjects incorporates the changes in the material as per the latest amendments made by CBSE to make its students familiar with new approaches and methods so that students do well in the examination.

The book in your hand is the outcome of continuous and consistent efforts of senior teachers of the Directorate. They have prepared and developed this material especially for you. A huge amount of money and time has been spent on it in order to make you updated for annual examination.

Last, but not the least, this is the perfect time for you to build the foundation of your future. I have full faith in you and the capabilities of your teachers. Please make the fullest and best use of this Support Material.

BINAY BHUSHAN
DIRECTOR (EDUCATION)

Dr. (Mrs.) Saroj Bala Sain
Addl. Director of Education
(School / Exam / EVGB/IEB/ VOC.)

सत्यमेव जयते

Govt. of NCT of Delhi
Directorate of Education
Old Secretariat, Delhi-110054
Tel.: 23890023, 23890093

D.O. No. PA/Addl.DE(Sch)/86
Date : 03-10-2019

I am very much pleased to forward the Support Material for classes IX to XII. Every year, the Support Material of most of the subjects is updated/revised as per the most recent changes made by CBSE. The team of subject experts, officers of Exam Branch, members of Core Academic Unit and teachers from various schools of Directorate has made it possible to make available unsurpassed material to students.

Consistence use of Support Material by the students and teachers will make the year long journey seamless and enjoyable. The main purpose to provide the Support Material for the students of government schools of Directorate is not only to help them to avoid purchasing of expensive material available in the market but also to keep them updated and well prepared for exam. The Support Material has always been a ready to use material, which is matchless and most appropriate.

I would like to congratulate all the Team Members for their tireless, unremitting and valuable contributions and wish all the best to teachers and students.

S. Sain

(Dr. Saroj Bala Sain)
Addl.DE (School/Exam)

शिक्षा निदेशालय

राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली सरकार

सहायक सामग्री

(2020-2021)

गणित

कक्षा : दसवीं

(हिन्दी माध्यम)

निःशुल्क वितरण हेतु

दिल्ली पाठ्य-पुस्तक ब्यूरो द्वारा प्रकाशित

Team Members for Review of Support Material

S.No.	Name & Designation	School Name/Branch
1.	Mr. Vipin Kumar Vice Principal ***Group Leader***	R.P.V.V. Sector-11 Rohini Delhi
2.	Mr. Tushar Saluja TGT (Maths)	CORE ACADEMIC UNIT DoE, GNCT of Delhi
3.	Dr. Sushma Singh	CORE ACADEMIC UNIT DoE, GNCT of Delhi
4.	Ms. Anju Sareen TGT (Maths)	S.C.S.D G.S.V Sector-9 Rohini, Delhi
5.	Ms. Amita Taneja TGT (Maths)	R.P.V.V. Sector -11 Rohini, Delhi
6.	Dr. Preeti Sharma TGT (Maths)	R.P.V.V. Sector -11, Rohini Delhi
7.	Mr. Maqsood Ahmed TGT (Maths)	Anglo Arabic Sr. Sec. School Ajmeri Gate, Delhi-6

भारत का संविधान

भाग 4क

नागरिकों के मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51क

मूल कर्तव्य – भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह –

1. संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्र ध्वज और राष्ट्रगान का आदर करें।
2. स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे।
3. भारत की प्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण रखे।
4. देश की रक्षा करे।
5. भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे।
6. हमारी सामाजिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका निर्माण करे।
7. प्राकृतिक पर्यावरण की रक्षा और उसका संवर्धन करे।
8. वैज्ञानिक दृष्टिकोण और ज्ञानार्जन की भावना का विकास करे।
9. सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे।
10. व्यक्तिगत एवं सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत् प्रयास करे।
11. माता–पिता या संरक्षक द्वारा 6 से 14 वर्ष के बच्चों हेतु प्राथमिक शिक्षा प्रदान करना (86वां संशोधन)।

CONSTITUTION OF INDIA

Part IV A (Article 51 A)

Fundamental Duties

Fundamental Duties : It shall be the duty of every citizen of India —

1. to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;
2. to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;
3. to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;
4. to defend the country and render national service when called upon to do so;
5. to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;
6. to value and preserve the rich heritage of our composite culture;
7. to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers and wild life, and to have compassion for living creatures.
8. to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;
9. to safeguard public property and to adjure violence;
10. to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement.
11. who is a parent or guardian to provide opportunities for education to his child or, as the case may be, ward between the age of six and fourteen years.

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक **(सम्पूर्ण प्रभुत्व–सम्पन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य)** बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की समता

प्राप्त करने के लिए,

तथा उन **सब में,**

व्यक्ति की गरिमा और **(राष्ट्र की एकता**

और अखंडता) सुनिश्चित करने वाली बंधुता

बढ़ाने के लिए

हम दृढ़संकल्प होकर इस संविधान को आत्मार्पित करते हैं।

THE CONSTITUTION OF INDIA

PREAMBLE

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a **(SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC)** and to secure to all its citizens :

JUSTICE, social, economic and political,

LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship,

EQUALITY of status and of opportunity; and to promote among them all

FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the **(unity an integrity of the Nation)**;

WE DO HEREBY GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.

COURSE STRUCTURE CLASS -X

Units	Unit Name	Marks
I	NUMBER SYSTEMS	06
II	ALGEBRA	20
III	COORDINATE GEOMETRY	06
IV	GEOMETRY	15
V	TRIGONOMETRY	12
VI	MENSURATION	10
VII	STATISTICS & PROBABILTY	11
	Total	**80**

UNIT I: NUMBER SYSTEMS

1. REAL NUMBER

Euclid's division lemma, Fundamental Theorem of Arithmetic - statements after reviewing work done earlier and after illustrating and motivating through examples, Proofs of irrationality of $\sqrt{2}, \sqrt{3}\ \sqrt{5}$ Decimal representation of rational numbers interms of terminating/non-terminating recurring decimals.

UNIT II: ALGEBRA

1. POLYNOMIALS

Zeros of a polynomial. Relationship between zeros and coefficients of quadratic polynomials. Statement and simple problems on division algorithm for polynomials with real coefficients.

2. PAIR OF LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES

Pair of linear equations in two variables and graphical method of their solution, consistency/inconsistency.

Algebraic conditions for number of solutions. Solution of a pair of linear equations in two variables algebraically - by substitution, by elimination and by cross multiplication method. Simple situational problems. Simple problems on equations reducible to linear equations.

3. QUADRATIC EQUATIONS

Standard form of a quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$. Solutions of quadratic equations (only real roots) by factorization, and by using quadratic formula. Relationship between discriminant and nature of roots.

Situational problems based on quadratic equations related to day to day activities to be incorporated.

4. ARITHMETIC PROGRESSIONS

Motivation for studying Arithmetic Progression Derivation of the n^{th} term and sum of the first n terms of A.P. and their application in solving daily life problems.

UNIT III: COORDINATE GEOMETRY

1. LINES (In two-dimensions)

Review: Concepts of coordinate geometry, graphs of linear equations. Distance formula. Section formula (internal division). Area of a triangle.

UNIT IV: GEOMETRY

1. TRIANGLES

Definitions, examples, counter examples of similar triangles.

1. (Prove) If a line is drawn parallel to one side of a triangle to intersect the other two sides in distinct points, the other two sides are divided in the same ratio.
2. (Motivate) If a line divides two sides of a triangle in the same ratio, the line is parallel to the third side.
3. (Motivate) If in two triangles, the corresponding angles are equal, their corresponding sides are proportional and the triangles are similar.
4. (Motivate) If the corresponding sides of two triangles are proportional, their corresponding angles are equal and the two triangles are similar.
5. (Motivate) If one angle of a triangle is equal to one angle of another triangle and the sides including these angles are proportional, the two triangles are similar.
6. (Motivate) If a perpendicular is drawn from the vertex of the right angle of a right triangle to the hypotenuse, the triangles on each side of the perpendicular are similar to the whole triangle and to each other.
7. (Prove) The ratio of the areas of two similar triangles is equal to the ratio of the squares of their corresponding sides.
8. (Prove) In a right triangle, the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the other two sides.
9. (Prove) In a triangle, if the square on one side is equal to sum of the squares on the other two sides, the angles opposite to the first side is a right angle.

2. CIRCLES

Tangent to a circle at, point of contact

1. (Prove) The tangent at any point of a circle is perpendicular to the radius through the point of contact.
2. (Prove) The lengths of tangents drawn from an external point to a circle are equal.

3. CONSTRUCTIONS

1. Division of a line segment in a given ratio (internally).
2. Tangents to a circle from a point outside it.
3. Construction of a triangle similar to a given triangle.

UNIT V: TRIGONOMETRY

1. INTRODUCTION TO TRIGONOMETRY

Trigonometric ratios of an acute angle of a right-angled triangle. Proof of their existence (well defined); motivate the ratios whichever are defined at 0° and 90°. Values of the trigonometric ratios of 30^0, 45^0 and 60^0. Relationships between the ratios.

2. TRIGONOMETRIC IDENTITIES

Proof and applications of the identity $sin^2A + cos^2A = 1$. Only simple identities to be given.Trigonometric ratios of complementary angles.

3. HEIGHTS AND DISTANCES: Angle of elevation, Angle of Depression.

Simple problems on heights and distances. Problems should not involve more than two right triangles. Angles of elevation / depression should be only 30°, 45°, 60°.

UNIT VI: MENSURATION

1. AREAS RELATED TO CIRCLES

Motivate the area of a circle; area of sectors and segments of a circle. Problems based on areas and perimeter / circumference of the above said plane figures. (In calculating area of segment of a circle, problems should be restricted to central angle of 60°, 90° and 120° only. Plane figures involving triangles, simple quadrilaterals and circle should be taken.)

2. SURFACE AREAS AND VOLUMES

1. Surface areas and volumes of combinations of any two of the following: cubes, cuboids, spheres, hemispheres and right circular cylinders/cones. Frustum of a cone.
2. Problems involving converting one type of metallic solid into another and other mixed problems. (Problems with combination of not more than two different solids be taken).

UNIT VII: STATISTICS AND PROBABILITY

1. STATISTICS

Mean, median and mode of grouped data (bimodal situation to be avoided). Cumulative frequency graph.

2. PROBABILITY

Classical definition of probability. Simple problems on finding the probability of an event.

MATHEMATICS-Standard

Code (041)

QUESTION PAPER DESIGN

CLASS – X (2020-21)

Time : 3 Hours **Max. Marks: 80**

S. No.	Typology of Questions	Very Short Answer-Objective type (VSA) (1 Mark)	Short Answer-I (SA) (2 Marks)	Short Answer-II (SA) (3 Marks)	Long Answer (LA) (4 Marks)	Total Marks	% Weightage (approx.)
1	**Remembering:** Exhibit memory of previously learned material by recalling facts, terms, basic concepts, and answers.	6	2	2	1	20	25
2	**Understanding:** Demonstrate understanding of facts and ideas by organizing, comparing, translating, interpreting, giving descriptions, and stating main ideas	6	1	1	3	23	29
3	**Applying:** Solve problems to new situations by applying acquired knowledge, facts, techniques and rules in a different way.	5	2	2	1	19	24
4	**Analyzing :** Examine and break information into parts by identifying motives or causes. Make inferences and find evidence to support generalizations **Evaluating:** Present and defend opinions by making judgments about information, validity of ideas, or quality of work based on a set of criteria. **Creating:** Compile information together in a different way by combining elements in a new pattern or proposing alternative solutions	3	1	3	1	18	22
	Total	20x1 =20	6x2 =12	8x3=24	6x4=24	80	100

INTERNAL ASSESSMENT	**20 MARKS**
Pen Paper Test and Multiple Assessment (5+5)	10 Marks
Portfolio	05 Marks
Lab Practical (Lab activities to be done from the prescribed books)	05 Marks

MATHEMATICS-Basic

Code (241)

QUESTION PAPER DESIGN

CLASS – X (2020-21)

Time : 3Hours **Max. Marks: 80**

S. No.	Typology of Questions	Very Short Answer-Objective type (VSA) (1 Mark)	Short Answer-I (SA) (2 Marks)	Short Answer-II (SA) (3 Marks)	Long Answer (LA) (4 Marks)	Total Marks	% Weightage (approx.)
1	**Remembering:** Exhibit memory of previously learned material by recalling facts, terms, basic concepts, and answers.	5	2	5	2	32	40
2	**Understanding:** Demonstrate understanding of facts and ideas by organizing, comparing, translating, interpreting, giving descriptions, and stating main ideas	7	1	1	4	28	35
3	**Applying:** Solve problems to new situations by applying acquired knowledge, facts, techniques and rules in a different way.	5	2	1	-	12	15
4	**Analyzing :** Examine and break information into parts by identifying motives or causes. Make inferences and find evidence to support generalizations **Evaluating:** Present and defend opinions by making judgments about information, validity of ideas, or quality of work based on a set of criteria. **Creating:** Compile information together in a different way by combining elements in a new pattern or proposing alternative solutions	3	1	1	-	8	10
	Total	20x1 =20	6x2 =12	8x3=24	6x4=24	80	100

INTERNAL ASSESSMENT	**20 MARKS**
Pen Paper Test and Multiple Assessment (5+5)	10 Marks
Portfolio	05 Marks
Lab Practical (Lab activities to be done from the prescribed books)	05 Marks

विषय–तालिका

क्रम सं.	विषय सामग्री	पृष्ठ संख्या
1.	वास्तविक संख्याएँ	1
2.	बहुपद	17
3.	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	28
4.	सिद्धांत समीकरण	39
5.	समांतर श्रेढ़ियाँ	58
6.	त्रिभुज	77
7.	निर्देशांक ज्यामिति	101
8.	त्रिकोणमिति का परिचय	111
9.	त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	122
10.	वृत्त	132
11.	रचनाएँ	152
12.	वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल	160
13.	पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	185
14.	सांख्यिकी	208
15.	प्रायिकता	224
16.	अभ्यास प्रश्न–पत्र	241

1

अध्याय

वास्तविक संख्याएँ

महत्वपूर्ण बिन्दु

वास्तविक संख्याओं का दशमलव रुप

- **परिमेय संख्या (Q)**
  - सांत दशमलव
    ($\frac{3}{5}, \frac{5}{4}$ ....)
    हर $= 2^n x 5^m$
    $m, n \in$ धनात्मक पूर्णांक
  - असांत आवर्ती दशमलव
    ($\frac{2}{3}, \frac{1}{7}$ -----------)
- **अपरिमेय संख्या (I)**
  - असांत अनावर्ती दशमलव
    (1.010010001...
    1.232232223.....)

वास्तविक संख्याओं के गुणधर्म

<u>यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका</u>

दो धनात्मक पूर्णांक 'a और 'b' के लिए सतुंष्ट करने वाली पूर्ण संख्याएं 'q' व r इस प्रकार है– $a = bq + r, 0 \le r < b$

<u>यूक्लिड विभाजन एल्गोरिदम</u>

किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a तथा b का म.स.जहाँ a>b हो, निम्न लिखित विधि द्वारा प्राप्त किया जा सकता है–

चरण 1: q तथा r ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कीजिए जहँ $a = bq + r, o \le r < b$

चरण 2: यदि $r = 0$ तो म.स. $(a, b) = b$

चरण 3: यदि $r \ne 0$ तो b और r यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कीजिए। इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक शेषफल शून्य न प्राप्त हो। इस स्थति वाला भाजक म.स. (a,b) होगा

<u>अंकगाणित की आधार भूत प्रमेय</u>

प्रत्येक भाज्य सख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता है तथा वह गुणनखण्ड अद्वितीय होता है। इस पर कोई ध्यान दिए बिना कि अभाज्य गुणनखण्ड किस क्रम में आ रहे हैं।

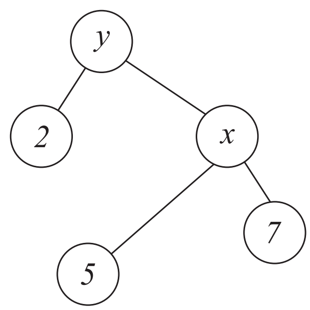
अति लघुउत्तरीय प्रश्न

प्र. 1 किसी संख्या N को 16 से विभाजित करने पर शेषफल 5 प्राप्त होता है। यदि इस संख्या को 8 से विभाजित करें तो शेषफल________होगा।

प्र. 2 म0स0 3^3x5^4 और 3^4x5^2=_________

प्र. 3 यदि 9=xy^2 तथा $b = x^3y^5$ जहाँ x तथा y अभाज्य संख्याएँ है तो ल.स. (a,b) =________

प्र. 4 इस गुणनखण्ड वृक्ष में x तथा y का मान ज्ञात कीजिए



प्र. 5 यदि n एक वास्तविक संख्या है तो $25^{2n} - 9^{2n}$ विभाज्य होगा

i) 16 ii) 34 iii) 16 तथा 34 दोनों (iv) इनमें से कोई नहीं

प्र. 6 $\frac{327}{2^3x5}$ संख्या का दशमलव निरूपण सांत होगा

a) एक दशमलव स्थान b) दो दशमलव स्थान

c) तीन दशमलव स्थान b) तीन से अधिक दशमलव स्थान

प्र. 7 निम्नलिखित में से किन परिमेय संख्याओं को सांत दशमलव के रुप में व्यक्त किया जा सकता है

i) $\frac{16}{225}$ ii) $\frac{5}{18}$ iii) $\frac{2}{21}$ iv) $\frac{7}{250}$

a) i) और ii) b) ii) तथा iii) c) i) तथा iii) d) i) तथा iv)

प्र. 8 यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका के अनुसार यदि $a=bq+r$, जहाँ, a,b धनात्मक पूर्णांक है तब r के क्या मान हो सकते हैं

a) $1<r<b$ b) $o<r7b$ c) $o7r<b$ d) $o<r<b$

प्र. 9 यदि $p^n=(a\times5)^n$ हो तो p^n के इकाई स्थान पर 0 आने के लिए a का मान

a) कोई वास्तविक संख्या b) सम संख्या

c) विषम संख्या d) इनमें से कोई नही

प्र. 10 म.स. हमेशा

a) ल.स. का गुणज b) ल.स. का गुणनखण्ड

c) ल.स. से विभाज्य d) a और c दोनो

प्र. 11 सभी दशमलव संख्याएँ होती हैं–

a) परिमेय संख्याएँ b) अपरिमेय संख्याएँ

c) वास्तविक संख्याएँ d) पूर्णांक

प्र. 12 इनमें से किस संख्या का इकाई का अंक 6 होगा।

a) 4^n b) 2^n c) 6^n d) 8^n

प्र. 13 प्रत्येक घनात्मक सम पूर्णांक का सामान्य रूप लिखिए।

प्र. 14 प्रत्येक घनात्मक विषम पूर्णांक का सामान्य रूप लिखिए।

प्र. 15 यदि n^2-1 , 8 से भाज्य है तो n के मान लिखिए।

प्र. 16 एक अपरिमेय और परिमेय संख्या का गुणनखण्ड क्या होगा?

प्र. 17 $\frac{13497}{1250}$ का दशमलव निरूपण कितने दशमलव स्थान के बाद सांत होगा।

प्र. 18 वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 1 से 10 तक की सभी संख्याओं से विभाज्य है।

प्र. 19 यदि संख्याएँ 525 और 3000; 3, 5, 15, 25 और 75 से भाज्य है तो 525 और 3000 का म. स. लिखिए।

प्र. 20 9^n मे इकाई के स्थान पर कौन सा अंक होगा?

लघु उत्तरीय प्रश्न-I

प्र. 21 यदि n एक घनात्मक विषम पूर्णांक है, तो दर्शाइए कि $n^2 - 1$, 8 से विभाज्य है।

प्र. 22 यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम द्वारा 16 और 28 का म.स. ज्ञात कीजिए।

प्र. 23 यदि n एक प्राकृत संख्या है तो दिखाइए 12^n का ईकाई का अंक 0 या 5 नहीं हो सकता है। (NCERT Exemplar)

प्र. 24 लम्बी विभाजन विधि का प्रयोग किए बिना बताइए कि $\frac{395}{10500}$ का दशमलव प्रसार सांत है या असान्त आवर्ती।

प्र. 25 यदि किसी परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार 327. 7081 हो और यदि वह $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए तो उसके हर (q) के अभाज्य गुणनखण्ड के बारे में आप क्या कह सकते है ?

प्र.26 वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ को गुणा करने पर एक परिमेय संख्या प्राप्त हो। उस परिमेय संख्या को भी ज्ञात कीजिए।

प्र. 27 $\sqrt{3}$ तथा $\sqrt{5}$ के बीच एक परिमेय तथा एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

प्र. 28 यदि 144 व 180 के म.स. को $13m-3$ के रूप में व्यक्त किया जाता है तो m का मान ज्ञात करो। (CBSE 2014)

प्र. 29 $(-1)^n + (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} + (-)^{4n+2}$ का मान ज्ञात कीजिए यदि n कोई धनात्मक विषम पूर्णांक है। (CBSE 2016)

प्र. 30 सिद्ध करो कि कोई धनात्मक विषम पूर्णांक $4q+1$ या $4q+3$ के रूप में होता है जहाँ q एक पूर्णांक है। (CBSE 2012)

प्र. 31 दो टैंकरों में क्रमशः 850 लीटर व 680 लीटर पेट्रौल है। उस कंटेनर की अधिकतम क्षमता क्या होगी जो इन टैंकरों के पेट्रोल को सही सही माप सके? (CBSE 2016)

लघुउत्तरीय प्रश्न-II

प्र. 32 दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन $4m$, $4m + 1$ या $4m + 3$ के रूप में होता है, जहाँ m एक पूर्णांक है।

प्र. 33 सिद्ध कीजिए $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्र. 34 अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का कथन लिखिए। इसका प्रयोग करते हुए 120 के अद्वितीय गुणनखण्ड कीजिए।

प्र. 35 सिद्ध कीजिए $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्र. 36 सिद्ध कीजिए $5-\frac{3}{7}\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्र. 37 सिद्ध कीजिए $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्र. 38 अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 56 और 112 का म.स. ज्ञात कीजिए।

प्र. 39 बताओं कि निम्न भाज्य संख्याएँ क्यों हैं

(I) $7 \times 11 \times 13 \times 15 + 15$

(ii) $11 \times 13 \times 17 + 17$

(iii) $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7+3 \times 7$

प्र. 40 प्रातः तीन व्यक्ति भ्रमण के दौरान अपने कदम एक साथ उठाते हैं, जिनकी माप क्रमशः 40 सेमी, 42 सेमी और 45 सेमी है। वह कम से कम दूरी ज्ञात कीजिए जिसे तीनों पूरे कदमों में माप सकें। (NCERT Exemplar)

प्र. 41 एक सेल के दौरान रंगीन पैसिलें 24 के और क्रेयोन 32 के पैक में उपलब्ध हैं।यदि आप समान संख्या में पेंसिलें और क्रेयोन खरीदना चाहतें है तो आप दोनों के कितने पैकेट खरीदेंगे? (CBSE 2017)

प्र. 42 वह बडी से बडी संख्या बताइए जिससे 31 तथा 99 को भाग देने पर शेषफल क्रमश 5 व 8 बचे।

प्र. 43 यदि 65 और 117 के म.स. को $65m-117$ के रूप में लिखा जा सकता है तो m का मान ज्ञात कीजिए। अभाज्य गुणनखण्ड़ विधि द्वारा 65 व 117 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

प्र. 44 युक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके वह बडी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 1251, 9377 और 15628 को भाग देने पर क्रमश 1,2,3 शेष बचे। (NCERT Exemplar)

प्र. 45 सिद्ध कीजिए कि किसी पूर्णांक m के लिए विषम पूर्णांक का वर्ग $4m+1$ के रूप में होता है।

प्र. 46 यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका द्वारा 180, 252 व 324 का म.स. ज्ञात कीजिए। (CBSE 2016)

प्र. 47 छः अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करो जो 18,24 व 36 से पूर्णतः विभाजित हो।

प्र. 48 तीन घंटियाँ क्रमशः 9,12, 15 मिनट के अंतराल पर बजती है। यदि वे एक साथ एक समय पर बजती है तो वे पुनः एक साथ कब बजेंगी?

प्र. 49 सिद्ध करो कि $n, n+2, n+4$ में से केवल एक संख्या 3 से विभाज्य होगी।

प्र. 50 404 तथा 96 का ल.स. और म.स. निकालो और सिद्ध कीजिए कि ल.स. × म.स. =दोनो संख्याओं का गुणन। (CBSE 2018)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्र. 51 यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम द्वारा 56, 96, 324 का म. स. ज्ञात कीजिए।

प्र. 52 दर्शाइए कि किसी भी पूर्णांक q के लिए कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6q+1$, $6q+3$ या $6q+5$, के रूप में होगा।

प्र. 53 दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग $5q$, $5q+1$ या $5q+4$ के रूप का होता है, जहाँ q एक घनात्मक पूर्णांक है।

प्र. 54 सिद्ध कीजिए कि तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 6 से भाज्य है।

प्र. 55 किसी भी धनात्मक पूर्णांक n के लिए सिद्ध कीजिए कि $n^3 - n$, 6 से भाज्य है। (CBSE Exemplar)

प्र. 56 सिद्ध कीजिए n, $n+2$, $n+4$ में से एक ओर केवल एक 3 से भाज्य है।

प्र. 57 आकृति ने अपने जन्मदिन के उपलक्ष्य में एक अनाथाश्रम में दूध वितरित करने का निर्णय लिया। दूध के विक्रेता ने दूध के दो कंटेनर में 398 ली. और 436 ली. दूध है। एक ड्रम द्वारा इसमें से दूध तीसरे कंटेनर में डालना है। तीसरे कंटेनर में ड्रम द्वारा पलटने पर क्रमशः 7 ली. और 11 ली. दूध बचता है। ड्रम की अधिकतम धारिता ज्ञात कीजिए।

प्र. 58 वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात करो जिसमें यदि 17 बढ़ा दिया जाए तो वह 520 व 468 दोनों से पूर्णतया विभाजित हो जाए।

प्र. 59 एक गली में दुकानदार 396 गुलाब जामुन व 342 रसगुल्ले बनाता है। वह इन्हें इक्टठे पैक करता है प्रत्येक कंटेनर में या तो गुलाब जामुन हैं या रसगुल्ले हैं। परन्तु प्रत्येक कंटेनर में दोनों पीस बराबर–बराबर हैं कम से कम डिब्बे बनाने के लिए उसे प्रत्येक डिब्बे में कितने पीस रखने होंगे? (CBSE 2016)

प्र. 60 सिद्ध कीजिए कि पूर्णाक 2 के लिए किसी भी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग $5q+2$ या $5q+3$ ही हो सकता है।

प्र. 61 72 व 124 के म.स. को रैखिक युग्य में व्यक्त कीजिए।

प्र. 62 सिद्ध कीजिए कि n का कोई धनात्मक पूर्णांक ऐसा नही है जिसके लिए $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$ एक परिमेय संख्या हों। (HOTS)

प्र. 63 युक्लिड विभाजन एल्गोरिथम का प्रयोग करके 134791, 6341 अथवा 6339 का म.स. ज्ञात कीजिए।

प्र. 64 किसी सेमीनार में हिन्दी, इंगलिश व गणित के क्रमशः 60,84 और 108 प्रतिभागी है। कम से कम कितने कमरों की आवश्यकता होगी यदि प्रत्येक कमरे में बराबर–बराबर प्रतिभागी हों व एक ही विषय के हों। (HOTS)

प्र. 65 अंकगणित की आधारभूत प्रमेय बताओ। क्या किन्ही दो संख्याओं का म.स. व ल.स. क्रमश 24 व 540 हो सकता है। उत्तर की पृष्टि कीजिए।

उत्तर तथा संकेत

1. 5

2. $3^3 \times 5^2$

3. $x^3 \times y^2$

4. $n=35, y=70$

5. *iii)* $25^{2n}-q^{2n}$ को $a^{2n}-b^{2n}$ के रूप मे लिखा जा सकता है तो यह $a-b$ और $a+b$ से विभाजित होगा, इसलिए $25+9=34$ और $25-9=16$ दोनो से विभाजित है।

6. *c)* तीन दशमलव स्थान

7. *d) (i)* तथा *(iv)*

8. *c)* 07$r<b$

9. *b)* कोई वास्तविक संख्या

10. *b)* ल.स. का गुणनखण्ड

11. *c)* वास्तविक संख्याएं

12. *c)* 6^n

13. $2m$

14. $2t+1$

15. विषम पूर्णांक

16. अपरिमेय संख्या

17. 4

18. 2520

19. 75

20. 1 और 9

21. कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक जिसे $4q+1$ या $4q+3$ के रूप मे व्यक्त किया जा सके जहाँ पर q कोई पूर्णांक है।

यदि $n=4q+1$

$n^2-1 = (4q+1)^2-1 = 16q^2+8q = 8q(2q+1) \Rightarrow n^2-1$, 8 से विभाजित होगा

यदि $n=4q+3$

$(n^2-1)=(4q+3)^3-1=16q^2+24q+8=8(2q^2+3q+1) \Rightarrow n^2-1,\ 8$ से विभाज्य होगा

22. 4

23. 2,2,3 12 के गुणनखण्ड है, क्योंकि 12 का 5 गुणनखण्ड नही है अतः 12^n कभी भी 0 अथवा 5, इकाई संख्या नही, देगा।

24. असान्त आवर्ती

25. हर 2 तथा 5 का गुणनफल है।

26. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$, 3

28. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका

$180=144\times1+36$

$144=36\times4+0$

म.स. 180 तथा 144 का 36 है

$36=13m-3 \Rightarrow 13m=39 \Rightarrow m=3$

29. दिया है कि n एक धनात्मक विषम पूर्णांक है $\Rightarrow 2n$ और $4n+2$ एक सम धनात्मक पूर्णांक है और n अथवा $2n+1$ एक विषम धनात्मक पूर्णांक है।

$(-1)^n=-1,\ (-1)^{2n}=+1, (-1)^{2n+1}=-1, (-1)^{4n+2}=+1;\ (-1)^n+(-1)^{2n}+(-1)^{2n}+1+(-1)^{4n+2}$

$$=-1+1-1+1=0$$

30. a और b के संदर्भ में यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम का प्रयोग करने पर $a=4q+r$, जहाँ

$b=4$

$r=0,1,2,3$

यदि $r=0,$	$a=4q$	जोकि सम संख्या होगी।
यदि $r=1,$	$a=4q+1$	जोकि विषम संख्या होगी।
यदि $r=2,$	$a=4q+2, 2(2q+1).$	जोकि सम संख्या होगी।
यदि $r=3,$	$a=4q+3$	जोकि विषम संख्या होगी।

31. 850 और 680 का म.स. $=2\times5\times17=170$ लीटर

32. माना n को धनात्मक पूर्णांक है, तब यह $4q, 4q+1, 4q+2, 4q+3$ के रूप में होगा।

यदि $n=4q, n^3=64q^3=4(16q)^2=4m$ यदि $m=16q^3$

यदि $n=4q+1,\ n^3=(4q+1)^3=64q^3+48q^2+12q+1=4(16q^3+12q^2+3q)+1=4m+1$

यहाँ $m=16q^3+12q^2+3q$ इसी प्रकार $n=4q+2$ तथा $n=4q+3$ के लिए किया जा सकता है।

34. $2\times2\times2\times3\times5$

35. सिद्ध कीजिए $\sqrt{3}$ तथा $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है तथा किन्ही दो अपरिमेय संख्याओं का योग भी अपरिमेय संख्या होता है।

36. 5 एक परिमेय संख्या है तथा $\frac{3}{7}\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। किसी परिमेय संख्या व अपरिमेय संख्या का अन्तर सदैव एक अपरिमेय संख्या होता है।

38. म.स. = 56, ल.स.=112

39 1) $15\times(7\times11\times3+1)$ के दो से अधिक गुणनखंड है तो यह भाज्य संख्या है।

40. ल.स. 40,42,45 = 2520

प्रत्येक कम से कम 2520 cm की दूरी तय करेगा।

41. म.स. 24 और 32 का 96

96 क्रेयान या $\frac{96}{32}=3$ पैकेट क्रेयान के

96 पैंसिले या $\frac{96}{24}=4$ पैकेट पैंसिले

42. दी गई संख्याएँ 31 तथा 99

31−5=26 तथा 99−8=91

26 के अभाज्य गुणनखण्ड, 26=2 ×13, 91 के अभाज्य गुणनखंड 91=7×13 म.स. (26,91)=13

∴ 13 वह बड़ी से बड़ी संख्या है जिससे 31 तथा 91 के भाग देने पर शेषफल क्रमशः 5 तथा 8 आएगा।

43. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम के प्रयोग से 117 तथा 65 का म.स.

117=65 ×1+52

65=52 ×1+13

52=13 ×4+0 म.स. (117,65) = 13 $65m-117=13 \Rightarrow 65m=130 \Rightarrow m=2$

ल.स. 65,117=13×13^2×5=585

44. 1251−1=1250, 9377−2=9375,15628−3=15625

म.स. (15625, 9375) = 3125

म.स. (3125, 1250) = 625

म.स. (15625, 9375, 1250) = 625

45. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम रखने पर, $a=bq+r$ जहाँ $0 \leq r<4, b=4$ रखने पर $a=4q+r$ जहाँ $r=0,$1,2,3

यदि $r=0,$ $a=4q$ जोकि सम संख्या होगी

यदि $r=1,$ $a=4q+1$ जोकि 2 से विभाजित नहीं है

यदि $r=2,$ $a=4q+2=2(2q+1)$ जोकि सम संख्या होगी

यदि $r=3,$ $a=4q+3,$ जोकि 2 से विभाजित नहीं है

अतः किसी धनात्मक पूर्णांक q के लिए $4q+1$ तथा $4q+3$ विषम पूर्णांक होगे।

अब $a^2=(4q+1)^2=16q^2+1+8q=4(4q^2+2q)+1$

$=m+1$ जहाँ $m=4q^2+2q$

इसी प्रकार $4q+3$ के लिए भी

46. म.स. 324, 252, 180 = 36

47. ल.स. 18, 24, 36 = 72

बड़ी से बड़ी 6 अंको की संख्या = 999999

```
72) 999999 (13888
    -72
     279
    -216
      639
     -576
       639
      -576
        639
       -576
         63
```

अतः 6 अंको की वान्छिक संख्या

999999
− 63
9,99,936

48. ल.स. 9,12,15 = 180 मिनट

49. माना 3 से विभाज्य संख्या $=3k+r$, जहाँ $r=0,1,2,\ldots\ldots\ldots a=3k$, $3k+1$ अथवा $3k+2$

(i) जब $a=3k$

$n=3k \Rightarrow n, 3$ से विभाज्य है।

$n+2=3k+2 \Rightarrow n+2, 3$ से विभाज्य नहीं है।

$n+4=3k+4 \Rightarrow 3k+3+1=3(k+1)+1 \Rightarrow n+4, 3$ से विभाज्य नहीं है

अतः $n, (n+2)$तथा$(n+4)$ में से केवल एक ही 3 से विभाज्य है।

इसी प्रकार $a=3k+2$ के लिए भी सिद्ध करें।

50. म.स. (404,96)$=4$

ल.स. (404,96)$=9696$

म.स. × ल.स.$=38,784=404x96$

51. 4

52. माना a एक धनात्मक विषम पूर्णांक है। इसे 6 से विभाजित करने पर भागफल q तथा शेषफल r मिलता है।

$\Rightarrow a=6q+r$ जहाँ $r=0,1,2,3,4,5$

यदि $a=6q+0 \Rightarrow 2(3q)$ जो कि एक धनात्मक सम पूर्णांक है, अतः यह संभव नही है।

यदि $a=6q+1,$ जो कि विषम पूर्णांक है

यदि $a=6q+2=2(3q+1)$ जो कि एक सम पूर्णांक है। अतः यह संभव नही है।

यदि $a=6q+3=3(2q+1)$ जो कि विषम पूर्णांक है

यदि $a=6q+4=2(3q+2)$ एक सम पूर्णांक है। अतः यह संभव नही है।

यदि $a=6q+5$ एक विषम पूर्णांक है

54. माना $a,(a+1),(a+2)$ तीन क्रमागत पूर्णांक हैं

i) यदि a एक सम पूर्णांक है

तो $a+2$ भी सम पूर्णांक होगा

$a(a+2),2$ से विभाज्य होगा

$a(a+2)(a+1)$ भी 2 से विभाज्य होगा

अब $a,(a+1),(a+2)$ तीन क्रमागत पूर्णांक हैं।

$a(a+1)(a+2), 3$ के गुणज हैं।

$a(a+1)(a+2),3$ से विभाज्य होगें।

अतः $a(a+1)(a+2), 6$ से विभाज्य होंगे।

ii) यदि a एक विषम पूर्णांक है

$(a+1)$ एक सम पूर्णांक होगा

$(a+1), 2$ से विभाज्य होगा

$a(a+1)(a+2), 2$ से विभाज्य होगा

अब $a(a+1)(a+2)$ तीन क्रमागत संख्याऐं हैं

$a(a+1)(a+2)$ 3 से विभाज्य होगा

$a(a+1)(a+2)$ 6 से विभाज्य होगाा।

55. $n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$

$=(n-1)(n)(n+1)$

तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांको का गुणनफल अब दिखाएं कि तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णाकों का गुणनफल 6 से विभाज्य है।

किसी पूर्णांक a को $3q, 3q+1$ या $3q+2$ के रूप में दर्शाया जा सकता है, जहाँ q एक पूर्णांक है। माना $a, a+1, a+2$ तीन क्रमागत पूर्णांक है

(I) $a=3q$

$(3q)\ (3q+1)\ (3q+2)=3q(2m) = 6\ qm$ (जहाँ $3q+1$ तथा $3q+2$ क्रमागत पूर्णांक है अतः उनका गुणनफल सम संख्या होगा। जोकि 6 से विभाज्य है।

(II) यदि $a=3q+1$

$a(a+1)(a+2)=(3q+1)(3q+2)(3q+3)$

$= 2\times m\times 3(q+1)$ (जहाँ $(3q+1)(3q+2)=2m)$

$= 6m(q+1)$

जोकि 6 से विभाज्य है

(III) यदि $a=3q+2$

$(a)(a+1(a+2)=(3q+2)(3q+3)(3q+4)$

$=(3q+2), 3, (q+1), (3q+4)$

$=6m\ (q+1)$

जोकि 6 से विभाज्य है

57. 17

58. 4663

59. म.स. (396, 342)$=18$

61. म.स. (124, 72)$=4$

$4=124\times 7+72\times(-12)$

$x=7, y=-12$

62. यदि $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}=\frac{p}{q}$ - ...(1), $q\neq 0\ p,q$ सहअभाज्य संख्या

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{q}{p} = \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}}{-2}$$

$$-\frac{2q}{p} = \sqrt{n-1}-\sqrt{n+1} \text{ or } \sqrt{n+1}-\sqrt{n+1} = \frac{2q}{p} \qquad ....(2)$$

$$(1)+(2)\, 2\sqrt{vn+1} = \frac{p}{q} + \frac{2p}{q} = \frac{p^2+2q^2}{q} \qquad ....(3)$$

$$(1)-(2)\, 2\sqrt{vn-1} = \frac{p}{q} - \frac{2p}{q} = \frac{p^2-2q^2}{pq} \qquad ....(4)$$

(3) और (4) $\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}$ एक परिमेय संख्या है परंतु $\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}$ एक अपरिमेय संख्या है अतः कोई भी ऐसा पूर्णांक n नहीं है जिसके लिए $\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}$ परिमेय हो।

63. म.स. (134791, 6341, 6339)$=1$

64. म.स. 60,84 और 108 $= 2^2 \times 3 = 12$

कमरो की संख्या $= \frac{60+84+108}{12} = 21$ कमरे

65. म.स. =24, ल.स. =540

$\frac{\text{ल.स.}}{\text{म.स.}} = \frac{540}{24}$ =22.5, पूर्णांक नही है।

अतः किन्ही दो संख्याओं का म.स. और ल.स. क्रमशः 24 तथा 540 नही हो सकता।

अभ्यास प्रश्न पत्र

वास्तविक संख्याएँ

समय : 1 घंटा　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　*अंक : 20*

खण्ड—अ

1. $\frac{51}{150}$ का दशमलव निरूपण कितने दशमलव स्थान के बाद सांत होगा। **1**
2. यदि $a = bq + r$ है, a, b धनात्मक पूर्णांक है तब r के क्या मान हो सकते हैं? (यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका में) **1**
3. क x^4y^5, x^8y^3 म.स. बताइए। **1**
4. 14 और 122 का ल.स. बताइए। **1**

खण्ड—ब

5. दर्शाइए कि 9^n की ईकाई की संख्या कभी भी शून्य नहीं होगी। **2**
6. लम्बी विभाजन विधि का प्रयोग करे बिना बताइए कि $\frac{935}{10500}$ का दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती। **2**
7. दर्शाइए कि किसी विषम धनात्मक पूर्णांक का वर्ग $4m+1$ के रूप का होता है। जहाँ m एक धनात्मक पूर्णांक है। **2**

खण्ड—स

8. सिद्ध कीजिए $\frac{1}{3-2\sqrt{5}}$ अपरिमेय संख्या है। **3**
9. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका द्वार 36, 96 और 120 का म. स. ज्ञात कीजिए। **3**

खण्ड—द

10. एक बार एक खेल का सामान बेचने वाले विक्रेता ने एक 'पैदल चलने के फायदे' को जागरूकता के लिए एक अभियान चलाया। जिसमें सोहम और बानी ने हिस्सा लिया किसी खेल के मैदान के चारों और एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में बानी को 18 मिनट ओर सोहम को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करके एक ही दिशा में चलते हैं। तो कितने समय बाद वे पुनः प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे? **4**

2
अध्याय

बहुपद

प्रमुख बिंदु

1. यदि x एक चर है, n एक प्राकृत संख्या है और $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots\, a_n$ वास्तविक संख्याएं हैं, तो $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0, (a_n \neq 0)$ चर x में एक बहुपद कहलाता है।

2. 1, 2 तथा 3 घातांक वाले बहुपद क्रमशः रैखिक, द्विघात एवं त्रिघात बहुपद कहलाते हैं।

3. एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के रूप का बीजीय व्यंजक होता है जबकि a, b तथा c वास्तविक संख्याएं हैं तथा $a \neq 0$.

4. बहुपद के शून्यक उन बिंदुओं के x – निर्देशांक हैं जिन पर $y = p(x)$ का आलेख (GRAPH) x–अक्ष को प्रतिच्छेद करता है। अर्थात् $x = a$, बहुपद $p(x)$ का शून्यक होगा यदि $p(a) = 0$

5. बहुपद के अधिकतम शून्यक उतने हो सकते हैं जितनी बहुपद की घात है।

6. (*i*) यदि बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक दूसरे का योज्य प्रतिलोम हो तो x का गुणांक = 0

(*ii*) यदि बहुपद $p(x)$ के शून्यक एक–दूसरे के गुणन प्रतिलोम हो तो, x^2 का गुणांक = अचर पद

7. **बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध–**

यदि α, β द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ के शून्यक हो, तो

$$\alpha + \beta = \text{शून्यकों का योग} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{c}{a}$$

8. यदि α, β किसी द्विघात बहुपद के शून्यक हो, तो बहुपद

$p(x) = k\,[x^2 -$ (शून्यकों का योग) $x +$ शून्यकों का गुणनफल$]$

जहाँ k कोई वास्तविक संख्या है तथा $k \neq 0$

9. रैखिक बहुपद $p(x) = ax + b$ का आलेख एक सरल रेखा होती है।

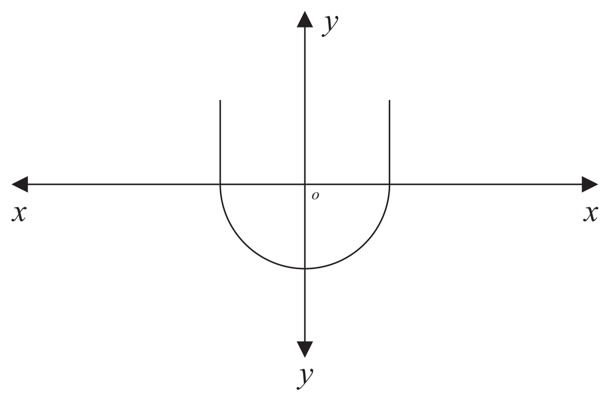
10. **विभाजन एल्गोरिथ्म**–किंही दो बहुपदों $p(x)$ तथा $g(x)$ के लिए अन्य दो बहुपदों $q(x)$ तथा ( ) का अस्तित्व इस प्रकार है:

$p(x) = g(x).\ q(x) + r(x)$; जबकि $g(x) \neq 0$ तथा $r(x) = 0$ या घातांक $r(x) <$ घातांक $g(x)$
विभिन्न प्रकार के बहुपदों के आलेख

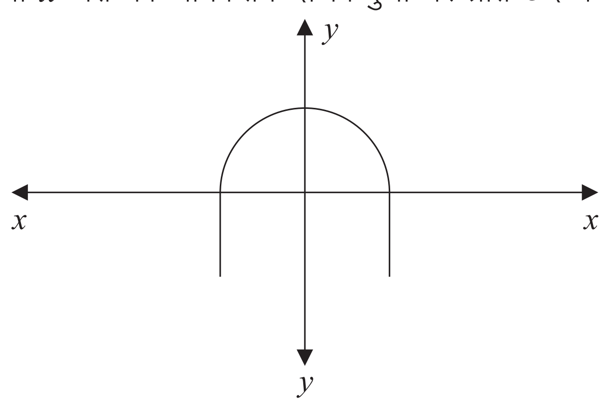
<u>रैखिक बहुपद</u> – रैखिक बहुपद $ax+b$ का आलेख एक सीधी रेखा के रूप में होता है जो कि x अक्ष को किसी एक बिन्दु पर प्रतिबद्ध करती है।

<u>द्विघात बहुपद–</u>

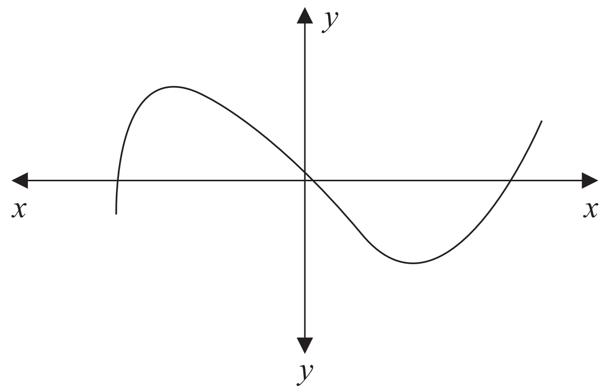
1. द्विघात बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ का आलेख उपर की ओर खुले परवलय *(Parabola)* के रूप में होता है। यह परवलय अंग्रेजी के अक्षर U जैसा होता है। यदि $a>o$ हो तथा x अक्ष को अधिकतम दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करे।



2. द्विघात बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ का आलेख नीचे की ओर खुले परवलय के रूप में होता है। यदि $a<o$ हो तथा x अक्ष को अधिकतम दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करे।



3. त्रिघात बहुपद – सामान्यता किसी बहुपद $p(x)$ जिसकी घात n हो का आलेख x अक्ष को अधिकतम n बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है।



अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्र. 1 यदि बहुपद $p(x)=5x^2+13x+k$ का एक मूल दूसरे मूल का व्युत्क्रमानुपाती हो तो k का मान होगा

(a) o (b) 5 (c) $\frac{1}{6}$ (d) 6

प्र. 2 यदि α तथा β बहुपद $p(x)=x^2-p(x+1)-c$ के शून्यक हैं तथा $(\alpha+1)(\beta+1)=0$ हो तो $c=$__________

प्र. 3 यदि द्विघाती बहुपद x^2+3x+k का एक शून्यक 2 हो तो k का मान होगा।

(a) 10 (b) -10 (c) 5 (d) -5

प्र. 4 यदि द्विघाती बहुपद $x^2+(a+1)x+b$ के शून्यक 2 तथा –3 हों तो–

(I) $a=-7, b=-1$ (ii) $a=5, b=-1$ (iii) $a=2, b=-6$ (iv) $a=o, b=-6$

प्र. 5 बहुपद x^2-5x+4 में क्या जोड़े कि प्राप्त बहुपद का एक शून्यक 3 हो–

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 5

प्र. 6 यदि α तथा β बहुपद $f(x)=x^2+x+1$ के मूल हो तो $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=$__________

प्र. 7 यदि किसी द्विघात बहुपद $f(x)$ का गुणनखण्ड रैखिक गुणनखण्डों के रूप में नही हो सकता तो बहुपद के शून्यक वास्तविक नही होंगे। (सही/गलत)

प्र. 8 यदि कोई द्विघाती बहुपद $f(x)$ किसी रैखिक बहुपद का वर्ग है तो उसके शून्यक संपाती होंगे (सही/गलत)

प्र. 9 बहुपद x^3+4x^2+x-6 के शून्यकों का गुणनफल होगा–

(a) -4 *(b)* 4 *c)* 6 *(d)* -6

प्र. 10 यदि त्रिघाती बहुपद ax^3+bx^2+cx+d के दो शून्यक 0 हैं, तो बहुपद का तीसरा शून्यक होगा–

(a) $\frac{-b}{a}$ *(b)* $\frac{b}{a}$ *c)* $\frac{c}{a}$ *(d)* $\frac{-d}{a}$

11. उस रैखिक बहुपद के शून्यकों की संख्या क्या होगी जिसका आलेख (ग्राफ):

(*i*) मूल बिंदु से गुजरता हो (*ii*) x-अक्ष को किसी भी बिंदु पर स्पर्श या प्रतिच्छेद नहीं करता हो।

12. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यक $\left(5+2\sqrt{3}\right)$ और $\left(5-2\sqrt{3}\right)$ हो।

13. यदि $4x^2-(8k^2-40k)\,x-9$ का एक शून्यक दूसरे शून्यक का योज्य प्रतिलोम हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

14. $P(x)=x^2-5x+4$ में क्या जोड़ा जाए ताकि प्राप्त बहुपद का एक शून्यक 3 हो।

15. एक द्विघात बहुपद के (*i*) अधिकतम (*ii*) न्यूनतम कितने शून्यक हो सकते हैं?

16. बहुपद x^2+1 के वास्तविक शून्यकों की संख्या क्या होगी?

17. यदि $6x^2-7x-3$ के शून्यक α और β हो तो एक द्विघात बहुपद बनाइए जिसके शून्यक 2α और 2β हो। (CBSE)

18. यदि $4x^2-17x+k-4$ के शून्यक α और $\frac{1}{\alpha}$ हो, तो k का मान क्या होगा?

19. उन बहुपदों के शून्यकों की संख्या क्या होगी जिनका आलेख (*i*) y-अक्ष (ii) x-अक्ष के समांतर हो।

20. उन बहपदों के शून्यकों की संख्या क्या होगी जिनका आलेख अक्षों को केवल निम्नलिखित बिंदुओं पर स्पर्श या प्रतिच्छेद करता है:

(*i*) (–3, 0), (0, 2) और (3, 0) (*ii*) (0, 4), (0, 0) और (0, –4)

लघु उत्तरीय प्रश्न-I

21. यदि $(k-1)x^2 + kx + 1$ का एक शून्यक -3 हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

22. यदि $ax^2 - 6x - 6$ के शून्यकों का गुणनफल 4 हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए और उससे शून्यकों का योग ज्ञात कीजिए।

23. यदि $x^2 - kx + 6$ के शून्यक 3 : 2 के अनुपात में हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

24. यदि द्विघात बहुपद $(k^2 + k)x^2 + 68x + 6k$ का एक शून्यक दूसरे शून्यक का गुणन प्रतिलोम हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

25. यदि α और β बहुपद $x^2 - 5x + m$ के शून्यक इस प्रकार से हो कि $\alpha - \beta = 1$, तो m का मान ज्ञात कीजिए। (CBSE)

26. यदि $x^2 - 8x + k$ के शून्यकों के वर्गों का योग 40 हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

27. यदि α और β बहुपद $t^2 - t - 4$ के शून्यक हों तो एक द्विघात बहुपद बनाइए जिसके शून्यक $\frac{1}{\alpha}$ और $\frac{1}{\beta}$ हो।

प्र. 28 बहुपद $x^3-3x^2+6x-15$ में क्या जोड़े कि यह $(x-3)$ से पूर्णतया विभाजित हो जाए। (CBSE 2016)

प्र. 29 यदि m तथा n बहुपद के $3x^2+11x+4$ शून्यक हो तो $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$ का मान ज्ञात कीजिए। (CBSE 2012)

प्र. 30 एक द्विघाती बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यक $\frac{3+\sqrt{5}}{5}$ तथा $\frac{3+\sqrt{5}}{5}$ हों। (CBSE 2013)

लघु उत्तरीय प्रश्न-II

31. यदि $y^2 + 2y - 15$ और $y^3 + a$ में से प्रत्येक का एक गुणनखंड $(k + y)$ हो, तो k और a के मान ज्ञात कीजिए।

32. बहुपद $4\sqrt{3}\,x^2 + 5x - 2\sqrt{3}$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और इसके शून्यकों और गुणाकों में संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

33. यदि $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 12x + 18$ को $(x^2 + 5)$ से भाग करने पर शेषफल $= (px + q)$ प्राप्त हो तो p व q के मान ज्ञात कीजिए।

34. $2x^2 + px - 15$ का एक शून्यक -5 है। $p(x^2 + x) + k$ के शून्यक परस्पर समान हैं। k का मान ज्ञात कीजिए।

35. यदि बहुपद $3x^2 + 2kx + x - k - 5$ के शून्यकों का योग उनके गुणन का आधा हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

36. यदि $y^2 + 5y + m$ के शून्यक α और β हों तो m का मान ज्ञात कीजिए ताकि $(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = 24$

37. यदि $x^2 - x - 2$ के शून्यक α और β हों, तो एक बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यक $(2\alpha + 1)$ और $(2\beta + 1)$ हों।

38. a और b के मान ज्ञात कीजिए ताकि बहुपद $x^4 + x^3 + 8x^2 + ax + b$, $x^2 + 1$ से पूर्णतया विभाजित हो जाए।

39. $8x^4 + 14x^3 - 2x^2 + 7x - 8$ में से क्या घटाया जाए ताकि प्राप्त बहुपद $4x^2 + 3x - 2$ से पूर्णतया विभाजित हो जाए?

40. $4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ में क्या जोड़ा जाए ताकि प्राप्त बहुपद $x^2 - 2x - 3$ से पूर्णतया विभाजित हो जाए?

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

41. यदि $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ के दो शून्यक $\sqrt{3}$ और $-\sqrt{3}$ हों, तो इसके सभी शून्यक लिखिए।

42. यदि $6x^3 + \sqrt{2}\,x^2 - 10x - 4\sqrt{2}$ का एक शून्यक $\sqrt{2}$ हो, तो इसके अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।

43. यदि $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138\,x - 35$ के दो शून्यक $(2 \pm \sqrt{3})$ हो, तो अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।

44. $x^3 - 5x^2 + 6x - 4$ को बहुपद $g(x)$, से भाग देने पर भागफल और शेषफल क्रमशः $(x - 3)$ और $(-3x + 5)$ हैं। $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

45. बहुपद $2x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 3x + 6$ के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि इसके दो गुणनखंड $\left(x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ हो।

प्र. 46 यदि बहुपद $x^4-3x^3-6x^2+kx-16,$ बहुपद x^2-3x+2 से पूणतया हो तो का मान ज्ञात कीजिए। (CBSE 2014)

प्र. 47 यदि बहुपद $x^4-6x^3+16x^2-25x+10$ को x^2-2x+k से विभाजित करें तो शेष $(x+a)$ मिलता है। k तथा a का मान ज्ञात कीजिए। (CBSE)

प्र. 48 α तथा β बहुपद x^2+4x+3 के मूल हैं तो वह बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके मूल $1+\frac{\beta}{\alpha}$ तथा $1+\frac{\alpha}{\beta}$ हों। (CBSE)

प्र. 49 यदि x^2+2x+k बहुपद $2x^4+x^3-14x^2+15x+6$ का गुणनखण्ड हो तो k का मान ज्ञात कीजिए तथा दोनों बहुपदों के शून्यक भी ज्ञात कीजिए।

प्र. 50 यदि $x-\sqrt{5},$ त्रिघाती बहुपद $x^3-3\sqrt{5}x^2+13x-3\sqrt{5}$ का गुणनखण्ड हो तो बहुपद के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए।

उत्तर और संकेत

1. (b) 5
2. −1
3. $b)-10$
4. $d)\ a=0,\ b=-6$
5. $b)\ 2$
6. -1
7. सत्य
8. सत्य
9. $c)\Rightarrow 6$
10. $a)\ \frac{-b}{a}$
11. (i) 1 (ii) 0
12. $x^2-10x+13$
13. $k=0,5$
14. 2
15. (i) 2 (ii) 0
16. 0
17. $3x^2-7x-6$
18. $k=8$
19. (i) 1 (ii) 0
20. (i) 2 (ii) 1
21. 4/3
22. $a=-3/2$, शून्यकों का योग$=-4$
23. $-5,\ 5$
24. 5
25. 6
27. $4t^2+t-1$
28. $x^3-3x^2+6x-15$ को $x-3$ से भाग करने पर, शेषफल $+3$ आता है। अतः $x^3-3x^2+6x-15$ में -3 जोड़ना पडेगा।

29. $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2+n^2}{mn_2} = \frac{(m+n)^2-2mn}{mn}$

$$= \frac{\left(\frac{-11}{3}\right)^2-2\left(\frac{-4}{3}\right)}{\frac{-4}{3}} = \frac{-145}{12}$$

30. $\alpha+\beta=\frac{6}{5}$ $\alpha\beta=\frac{4}{25}$

$25x^2-30x+4$

31. $k=3,-5$ और $a=27,-125$

32. $\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{4}}$

33. $p=2, q=3$

34. $7/4$

35. 1

36. 1

37. x^2-4x-5

38. $a=1, b=7$

39. $14x-10$

40. $61x-65$

41. $\sqrt{3},-\sqrt{3},-\frac{1}{2}$

42. $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

43. $-5, 7$

44. x^2-2x+3

45 $2, -1, \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

46. x^2-3x+2

$=(x-2)(x-1)$

$P(1) = 0$

$k=24$

47. $x^4-6x^3+16x^2-25x+10$ को x^2-2x+k से भाग करने पर शेषफल आता है $(2k-9)x+(10-8k+k^2)$

शेषफल दिया है $=x+a$

$\Rightarrow 2k-9=1 \Rightarrow k=5$

$10-8k+k^2=a \Rightarrow a=10-40+25=-5$

$a=-5,\ k=5$

48. $x^2-\frac{16x}{3}+\frac{16}{3}$ या $\frac{1}{3}(3x^2-16x+16)$

49. $2x^4+x^3-14x^2+5x+6$ को x^2+2x+k से भाग करने पर शेषफल आता है $(7k+21)x+2k^2+8k+6$ यहाँ शेषफल 0 है।

$\Rightarrow 7k+21=0$ और $2k^2+8k+6=0$

$\Rightarrow k=-3$ और $k=-1,\ -3$

$\Rightarrow 7k=-3$

x^2+2x-3 के शून्यक है $1,-3$ और $2x^4+x^3-14x^2+5x+6$ के शून्यक है $1,-3,2,-\frac{1}{2}$

50. $\sqrt{5},\ \sqrt{5}+\sqrt{2},\ \sqrt{5}-\sqrt{2}$

अभ्यास प्रश्न–प्रत्र

बहुपद

समय : 1 घंटा — अंक : 20

खंड–अ

1. यदि α और β द्विघात बहुपद $p(x)$, के शून्यक हों,तो $p(x)$ का गुणनखंडन कीजिए। 1

2. यदि $x^2 - x - 1$ के शून्यक α और β हों, तो $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

3. यदि द्विघात बहुपद $(k-1)x^2+kx+1$ का एक शून्यक –3 हो तो k का मान क्या होगा

   a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{-4}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{-2}{3}$ 1

4. वह द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यक–3 और 4 हों

   a) x^2-x+12 b) x^2+x+12 c) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 6$ d) $2x^2+2x-24$

खंड ब

5. बहुपद $x^2 - (k+6)x + 2(2k-1)$ के शून्यक α और β हैं। यदि $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\alpha\beta$ हो तो k का मान ज्ञात कीजिए। 2

6. एक द्विघात बहुपद बनाइए जिसका एक शून्यक $(3+\sqrt{2})$ हो और शून्यकों का योग 6 हो। 2

7. यदि द्विघात बहुपद $x^2+4x+2a$ के शून्यक α और $\frac{2}{\alpha}$ हो तो a का मान ज्ञात कीजिए। 2

खंड–स

8. a और b के मान ज्ञात कीजिए यदि (x^2+1) बहुपद $x^4 + x^3 + 8x^2 + ax + b$ का एक गुणनखंडन हों। 3

9. यदि सच और झूठ बहुपद $px^2 + qx + r, (p \neq 0)$ के शून्यक हों जो एक–दूसरे के व्युत्क्रम हों तों p और r में संबंध ज्ञात कीजिए। 3

खंड–द

10. यदि बहुपद $x^3 + 2x^2 + kx + 7$ को $(x-3)$ से भाग करने पर शेषफल 25 प्राप्त होता हों तो भागफल तथा k का मान ज्ञात कीजिए। इस प्रकार प्राप्त भागफल के शून्यकों का योग और गुणनफल भी ज्ञात कीजिए। 4

3

अध्याय

दो चर वाले रैखिक समीकरण

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

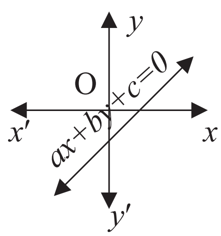
$a_1x+b_1y+c_1=0$-(1)

$a_2x+b_2y+c_2=0$-(2)

सरल रेखा के समीकरण

$ax+by+c=0$

x,y का मान सरल रेखा पर स्थित बिन्दु



दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म में बदले जा सकने वाले समीकरण

$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$ $\frac{5}{x}+\frac{4}{y}=2$

माना $\frac{1}{x}=a$; $\frac{1}{y}=b$

$2a+3b=13$ $5a+4b=2$

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म को हल करने की विधियाँ

बीज गणितीय विधि

प्रतिस्थापन विधि

$a_1x+b_1y+c_1=0$-(1)

$a_2x+b_2y+c_2=0$-(2)

x का मान समीकरण (1) से समीकरण (2) में प्रतिस्थापित कर y का मान ज्ञात करेंगें तथा इसके विलोमतः

विलोपन विधि

$a_1x+b_1y=c_1$-(1)

$a_2x+b_2y=c_2$-(1)

समीकरण (1) को a_2 से तथा समीकरण (2) को a_1 से गुणा करके x के गुणांक समान करके x का लोप करते हुए y का मान ज्ञात करेंगे

वज्र गुणन विधि।

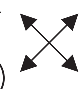
$$\begin{matrix} & x & & y & & \\ b_1 & \times & c_1 & \times & a_1 & \times & b_1 \\ b_2 & & c_2 & & a_2 & & b_2 \end{matrix}$$

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-a_2c_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_1c_2}$$

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-b_1a_2} \quad y=\frac{c_1a_2-a_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2}$$

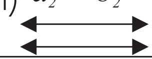
आलेखी विधि

प्रतिच्छेदी रेखाऐं $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ (एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें) (अद्वितीय हल)



संपाती रेखाऐं $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ अपरिमित अनेक हल

समांतर रेखाएं $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ (कोई हल नहीं)



अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्र. 1 यदि समीकरण $3x+2ky=2$ तथा $2x+5y=1$ द्वारा आलेखित रेखाएं समांतर हों तो k का मान होगा।

प्र. 2 यदि $x=a$ तथा $y=b$ समीकरण युग्म $x-y=2$ तथा $x+y=4$ का हल है तो a तथा b के मान होंगे।

प्र. 3 दो चर वाला रैखिक समीकरण युग्म जिसका अद्वितीय हल $x=2$ तथा $y=-3$ होगा।

(a) $x+y=1$ तथा $2x-3y=-5$

(b) $2x+5y=-11$ तथा $4x+10y=-22$

(c) $2x+5y=-11$ तथा $4x+10y=22$

(a) $x-4y-14=0$ तथा $5x-y-13=0$

प्र. 4 $x=3, y=4$ तथा $x=y$ द्वारा आलेखित त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा।

प्र. 5 k का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए रैखिक समीकरण $3x+5y=0$ तथा $kx+10y=0$ के शून्य से अन्येतर हल हैं।

प्र. 6 यदि कोई दो चर वाला रैखिक समीकरण युग्म संगत हो तो समीकरणों द्वारा आलेखित रेखाएं होंगी–

(a) प्रतिच्छेदी (b) समान्तर (c) संपाती (d) प्रतिच्छेदी अथवा संपाती

प्र. 7 समीकरण $2x+3y=4$ के लिए y को x के रूप में व्यक्त करेंगे–

प्र. 8 समीकरण $ax+by=c$ तथा y अक्ष का एक उभयनिष्ठ हल होगा–

(a) $\left(0, \frac{c}{b}\right)$ (b) $\left(0, \frac{b}{c}\right)$ c) $\left(\frac{c}{b}, 0\right)$ (d) $\left(0, \frac{-c}{b}\right)$

प्र. 9 यदि समीकरण युग्म $ax+by=c$ तथा $lx+my=n$ का एक अद्वितीय हल हो तो समीकरण युग्म के गुणाकों के मध्य संबंध होगा–

(a) $am \neq lb$ (b) $am=lb$ c) $ab=lm$ d) $ab \neq lm$

प्र. 10 ΔABC में $\angle C=3\angle B$, $\angle C=2(\angle A+\angle B)$ हो तो $\angle A, \angle B$ तथा $\angle C$ का मान क्रमशः.................................होगा।

(a) $30^o, 60^o, 90^o$ (b) $20^o, 40^o, 120^o$ c) $45^o, 45^o, 90^o$

(d) $110^o, 40^o, 50^o$

11. यदि $x = 3m - 1$ तथा $y = 4$, समीकरण $x + y = 6$ का हल हो तो m का मान ज्ञात कीजिए।

12. समीकरण $3x - 2y = 6$ से बनी रेखा तथा y-अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए।

13. p के किस मान के लिए रैखिक समीकरण युग्म $2x + py = 8$ और $x + y = 6$ का कोई हल नहीं है।

14. एक मोटर साईकिल वाला $x - y = 2$ के अनुसार चल रहा है। दूसरा मोटर साईकिल वाला $x - y = 4$ के अनुसार चल रहा है उनके चलने की दिशा ज्ञात कीजिए।

15. k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए रैखिक समीकरण युग्म $3x + 2y = -5$ और $x - ky = 2$ का एक अद्वितीय हल हो।

16. यदि $3x - 7y = 10$ हो तो y को x के पदों में व्यक्त कीजिए।

17. यदि $2x + 5y = 4$ एक समीकरण हो, एक अन्य रैखिक समीकरण लिखो ताकि रैखिक समीकरण युग्म संपाती रेखाएँ प्रदर्शित कीजिए।

18. जांच कीजिए क्या रैखिक समीकरण युग्म $x + 2y - 4 = 0$ और $2x + 4y - 12 = 0$ का ग्राफ प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं या समान्तर रेखाएँ है।

19. यदि $3x + 2ky = 2$ तथा $2x + 5y + 1 = 0$ समान्तर रेखाओं के समीकरण हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

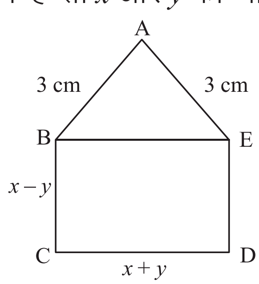
20. $x = 2$ और $y = 3$ का आलेख बनाने पर किस प्रकार की रेखाएँ प्राप्त होगी?

लघु उत्तरीय प्रश्न–I

21. एक रैखिक समीकरण युग्म बनाइये–यदि एक भिन्न के अंश व हर का योगफल उसके हर के दुगुने से 3 कम हो तथा यदि अंश और हर दोनों में से एक घटा दिया जाए तो भिन्न का अंश हर का आधा हो जाता है।

22. p के किस मान के लिए रैखिक समीकरण युग्म $(p + 2)x - (2p + 1)y = 3(2p - 1)$, $2x - 3y = 7$ का एक अद्वितीय हल है।

23. दिए गए चित्र में यदि पंचभुज ABCDE का परिमाप 21 cm है। BE || CD तथा BC || DE यदि BC भुजा CD पर लंब है तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।



24. x और y के लिए हल कीजिए

$$x - \frac{y}{2} = 3 \text{ और } \frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{2}{3}$$

25. x और y के लिए हल कीजिए

$3x + 2y = 11$ और $2x + 3y = 4$

p का मान भी ज्ञात कीजिए यदि $p = 8x + 5y$

26. रैखिक समीकरण युग्म

$$x - 7y + 42 = 0$$

$$x - 3y - 6 = 0$$ को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए।

27. राम बिन्दु (1, 4) और (0, 6) को जोड़ने वाली रेखा पर चल रहा रहीम बिन्दु (3, 4) और (1, 0) को जोड़ने वाली रेखा पर चल रहा है। ग्राफ द्वारा उपरोक्त को दर्शाइए और बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए जिस पर दोनों एक दुसरे को प्रतिच्छेद करे।

28. दिये हुए रैखिक समीकरण $2x + 3y - 12 = 0$ के लिए दो चर में अन्य रैखिक समीकरण लिखिए कि इस युग्म का ग्राफीय निरूपण .... है।

(*i*) समान्तर रेखाएँ (*ii*) संपाती रेखाएँ

29. दो संख्याओं का अन्तर 66 है, यदि एक संख्या दूसरी संख्या का 4 गुना हो तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

30 k के किस मान के लिए दिए गए रैखिक समीकरण युग्म असंगत है

$$kx + 3y = k - 3$$

$$12x + ky = k$$

लघु उत्तरीय प्रश्न-II

31. रैखिक समीकरण युग्म $5x - y = 5$ और $3x - 2y = -4$ को ग्राफीय विधि से हल कीजिए। उन बिन्दुओं के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए जहां ये रेखाएँ y-अक्ष को प्रतिच्छेद करती हो।

32. x और y के लिए हल कीजिए

$$\frac{5}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2$$

$$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$$

33. वज्र गुणन विधि द्वारा हल कीजिए। (CBSE)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a + b$$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 2$$

34. a और b के वह मान ज्ञात कीजिए ताकि रैखिक समीकरण युग्म (CBSE)

$$2x + 3y = 7$$

$$a(x + y) - b(x - y) = 3a + b - 2$$

के अनेक अनन्त हल हो।

35. रैखिक समीकरण युग्म को हल कीजिए।

$$152x - 378y = -74$$

$$-378x + 152y = -604$$

36. पिंकी ने एक परीक्षा में 40 अंक अर्जित किए जबकि उसे सही उत्तर पर 3 अंक मिले और गलत उत्तर पर 1 अंक की कटौती की गई। यदि उसे सही उत्तर पर 4 अंक मिलते और गलत उत्तर पर 2 अंक कटते, तो पिंकी को 40 अंक ही मिलते। परीक्षा में कुल कितने प्रश्न थे?

37. एक दो अंकों की संख्या या तो उसके अंको के योग के 8 गुना में 1 जोड़ने पर प्राप्त होता है या अंकों के अन्तर के 13 गुना में 2 जोड़ने पर प्राप्त होती है संख्या ज्ञात कीजिए।

38. पिता की आयु उसके दो पुत्रों की आयु के योग की तीन गुणा है। 5 वर्ष बाद उसकी आयु अपने दोनों पुत्रों की आयु के योग की दुगुनी होगी। पिता की आयु ज्ञात कीजिए।

39. एक टी. वी. को 5% लाभ तथा फ्रिज को 10% लाभ पर बेचने पर एक दुकानदार को ₹ 2000 का लाभ होता है, यदि वह टी. वी. को 10% लाभ तथा फ्रिज 5% हानि पर बेचे तो उसे ₹ 1500 का लाभ होता है टी. वी. और फ्रिज के वास्तविक मूल्य ज्ञात कीजिए।

40. सुनीता के पास ₹ 50 और ₹ 100 के कुछ नोट है जिनका मूल्य ₹ 15,500 है। यदि नोटों की कुल संख्या 200 है। तो सुनीता के पास ₹ 50 तथा ₹ 100 के नोटों की संख्या ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

41. रैखिक समीकरण युग्म $3x - 4y + 3 = 0$ और $3x + 4y - 21 = 0$ को ग्राफीय विधि से हल करो।

इन रेखाओं तथा x-अक्ष से बने त्रिभुज के निर्देशांक लिखिए। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

42. x और y के लिए हल कीजिए।

$$\frac{1}{2(2x+3y)}+\frac{12}{7(3x-2y)}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{(2x+3y)}+\frac{4}{(3x-2y)}=2$$

$2x + 3y \neq 0$

$3x - 2y \neq 0$

43. समीकरण युग्मों को रैखिक समीकरण युग्म में बदलकर हल कीजिए।

$$\frac{3x+2y}{xy}=1 \text{ और } \frac{4x-2y}{xy}=13$$

a का मान भी ज्ञात करो यदि $y = ax - 4$ हो।

44. एक व्यक्ति 600 किमी की दूरी पर अपने घर जाने के लिए कुछ दूरी रेलगाड़ी द्वारा तथा कुछ दूरी बस द्वारा तय करता है। यदि वह 120 किमी दूरी रेलगाड़ी द्वारा तथा शेष दूरी बस द्वारा तय करता है तो उसे कुल 8 घंटे का समय लगता है। यदि वह 200 किमी दूरी रेलगाड़ी द्वारा तथा शेष बस द्वारा तय करता है तो उसे पहले से 20 मिनट अधिक समय लगता है। रेलगाड़ी और बस की चाल ज्ञात कीजिए।

45. A तथा B सड़क हाईवे में 150 किमी की दूरी पर हैं। दो कारें A तथा B से एक ही दिशा में एक ही समय पर अलग–अलग गति से चलती हैं तो 15 घंटे बाद मिलती है। यदि वे एक दूसरे की तरफ चलती है तो 1 घंटे बाद मिलती है। दोनों कारों की गति ज्ञात कीजिए।

46. एक नाव धारा के प्रतिकूल 32 किमी जाने तथा धारा के अनुकूल 36 किमी वापिस आने में 7 घंटे का समय लेती है। यदि वह 40 किमी धारा के प्रतिकूल तथा 48 किमी धारा के अनुकूल चले तो उसे 9 घंटे का समय लगता है। नाव की गति शांत जल में तथा धारा की गति ज्ञात कीजिए।

47. किसी भिन्न के अंश और हर का योग अंश के दुगुने से 4 अधिक है। यदि अंश और हर में 3 जोड़ दे उनका अनुपात 2 : 3 होगा। भिन्न ज्ञात कीजिए।

48 8 महिलाएँ और 12 आदमी किसी कार्य को मिलकर 10 दिन में पूरा कर सकते हैं। जबकि 6 महिलाएँ और 8 आदमी उसी कार्य को 14 दिन में कर सकते हैं। एक महिला और एक आदमी द्वारा अकेले इस कार्य को करने में कितने दिन लगेंगे?

49 दो व्यक्तियों की आय का अनुपात 3 : 4 है। जबकि उनके खर्चों का अनुपात 5 : 7 है। यदि प्रत्येक ₹ 15,000 वार्षिक बचत करता है। उनकी वार्षिक आय ज्ञात कीजिए।

50 विजय के पास कुछ केले हैं वह उन केलों को दो ढेरियों में बाँटता है। पहली ढेरी को ₹ 2 प्रति 3 केले के हिसाब से बेचने पर तथा दूसरी ढेरी को ₹ 1 प्रति केले के हिसाब से बेचने पर उसे कुल ₹ 400 प्राप्त होते हैं। यदि वह पहली ढेरी ₹ 1 प्रति केले के हिसाब से तथा दूसरी ढेरी को ₹ 4 प्रति 5 केले के हिसाब से बेचता तो उसे कुल ₹ 460 प्राप्त होते हैं। विजय के पास केलों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

51 रेलवे की आधी टिकट की कीमत पूरी टिकट की कीमत से आधी है, किन्तु आधी टिकट तथा पूरी टिकट दोनों पर आरक्षण शुल्क समान है। स्टेशन A से स्टेशन B तक के एक पूरी टिकट का मूल्य ₹ 2530 है तथा एक पूरी तथा एक आधी टिकट के आरक्षण शुल्क सहित कुल ₹ 3810 लगते हैं। स्टेशन A से स्टेशन B तक की एक पूरी टिकट तथा आरक्षण शुल्क ज्ञात कीजिए।

52 निम्नलिखित रैखिक समीकरण युग्म को हल कीजिए।

$$\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2 \quad \text{तथा} \quad \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$$ (CBSE 2015)

53 रेखाएं $y=x$, $3y=x$ तथा $x+y=8$ के आलेख द्वारा बनने वाले त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए।

54 समीकरण $x=3, x=5$ तथा $2x-y-4=0$ के आलेख खीचिए। इन रेखाओं तथा x अक्ष द्वारा बनने वाले चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

55 यदि किसी आयत की लम्बाई 5 इकाई कम कर दी जाए तथा चौड़ाई 3 इकाई बढ़ा दी जाए तो आयत का क्षेत्रफल 9 वर्ग इकाई कम हो जाता है। यदि आयत की लम्बाई 3 इकाई बढ़ा दी जाए तथा चौडाई 2 इकाई बढ़ा दी जाए तो आयत का क्षेत्रफल 67 वर्ग इकाई बढ जाता है। आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

1 $k=\frac{15}{4}$

2 $a=3$ और $b=1$

3 b) $2x+5y=-11$ तथा $4x+10y=-22$

4 $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई

5 6

6 d) प्रतिच्छेदी अथवा संपाती

7 $y=\frac{4-2x}{3}$

8 a) $(0, \frac{c}{b})$

9 a) $am \neq lb$

10 b) $20^o, 40^o, 120^o$

11 $m=1$

12 $(0,-3)$

13 $p=2$

14 समान्तर

15 $k \neq -\frac{2}{3}$

16 $y = \frac{3x-10}{7}$

17 $4x + 10y = 8$

18 समान्तर रेखाएँ

19 $K = \frac{15}{4}$

20 प्रतिछेदी रेखाएँ

21 $x-y = -3, 2x-y = 1$

22 $P \neq 4$

23 $x = 5, y = 0$

24 4, 2

25 $x = 5, y = -2, P = 30$

26 42, 12

27 (2, 2)

28 (i) $4x+6y+10=0$

(ii) $4x+6y-24=0$

29 88, 22   30 $k = -6$

31 (2,5)(0,–5) और (0,2)

32 3, 2

33 $x = a^2, \ y = b^2$

34 $a = 5, b = 1$

35 2,1   36 40 प्रश्न

37 41   38 45 साल

39 टी.वी. = ₹. 20,000

फ्रीज = ₹ 10,000

40 ₹ 50 के नोट = ₹ 90, ₹ 100 के नोट = 110

41 हल (3,3) शीर्ष (-1,0),(7,0) और (3,3)

क्षेत्रफल = 12 वर्ग इकाई

42 (2,1)

43 $x = \frac{-2}{5}, y = \frac{1}{2}$ $a = \frac{-45}{4}$

44 60 किमी/घंटा, 80 किमी/घंटा

45 80 किमी/घंटा, 70 किमी/घंटा

46 10 किमी/घंटा, 2 किमी/घंटा

47 $\frac{5}{9}$

48 1 औरत 140 दिनों में

1 आदमी 280 दिनों में

49 ₹ 90,000, ₹ 1,20,000

50 माना केले की संख्या ढ़ेरी A में x और ढ़ेरी B में y है

$Case\ I\ \frac{2}{3}x + y = 400$ ₹ $2x+3y=1200$

$Case\ II\ x + \frac{4}{5}y = 460$ ₹ $5x+4y=2300$

$x=300,\ y=200,$ कुल केले =500

51 मान पूरी एवम आधी टिकट का मूल्य ₹ x और ₹ $\frac{x}{2}$ है और आरक्षण शुल्क ₹ y है।

$Case\ I\ x+y=2530$

$x+y+\frac{x}{2}+y=3810$

$x=2500,\ y=30$

पूरी टिकट का मूल्य ₹ 2500 और आरक्षण शुल्क ₹ 30 है।

52 $x=4,\ y=9$

53 त्रिभुज के शीर्ष (0,0) (4,4) (6,2)

54 चतुर्भुज $ABCD$ के शीर्ष $A\ (3,0),\ B\ (5,0),\ C\ (5,6),\ D\ (3,2)$

क्षेत्रफल $ABCD = \frac{1}{2} \times AB \times (AD+BC)$

$= \frac{1}{2} \times 2 \times (6+2) = 8$ वर्ग इकाई

55 आयत की लम्बाई = 17 इकाई

आयत की लम्बाई = 9 इकाई

आयत का परिभाप = 52 इकाई

अभ्यास प्रश्न–प्रत्र

दो चरों वाले रैखिक समीकरण

समय : 1 घंटा | *अंक : 20*

खण्ड–अ

1 k के किस मान के लिए समीकरण युग्मों का एक अद्वितीय हल है 1

$x + 2y = 3,\ 5x + ky + 7 = 0$

2 क्या बिन्दु (2, 3) रेखा $3x - 2y = 5$ के ग्राफ पर स्थित है? 1

3 रैखिक समीकरणों के युग्म $x=a$ और $y=b$ को ग्राफीय रूप से प्रदर्शित करने पर प्राप्त रेखाए होगी। 1

(1) सामान्तर रेखाएं (2) प्रतिछेंदी (b,a) पर (3) समपाती (4) प्रतिछेंदी (a,b) पर

4 k के किस मान के लिए समीकरणों का युग्म $3x-y+8=0$ तथा $6x-ky=-16$ सम्पाती रेखाए प्रदर्शीत करेगे। 1

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{-1}{2}$ c) 2 d) -2

खण्ड–ब

5 a तथा b के मान ज्ञात कीजिए ताकि समीकरण युग्मों $2x - 3y = 7$ और $ax + 3y = b$ के अनेक अनन्त हल हो। 2

6 x और y के लिए हल कीजिए।

$0.4x + 0.3y = 1.7$

$0.7x - 0.2y = 0.8$ 2

7 यदि समीकरणों के युग्म $6x+2y=3$ और $kx+y=2$ का एक अद्वितीय हल है तो k का मान ज्ञात कीजिए। 2

खण्ड–स

8 वज्र गुणन विधि से हल कीजिए। 3

$x + y = a + b$

$ax - by = a^2 - b^2$

9 एक पिता और उसके पुत्र की आयु का योगफल 40 वर्ष है। यदि पिता की आयु पुत्र की आयु का तीन गुना हो तो उनकी आयु ज्ञात कीजिए। 3

खण्ड–द

10 निम्न समीकरण युग्मों को ग्राफीय विधि से हल कीजिए। 4

$3x + 5y = 12$ और $3x - 5y = -18$

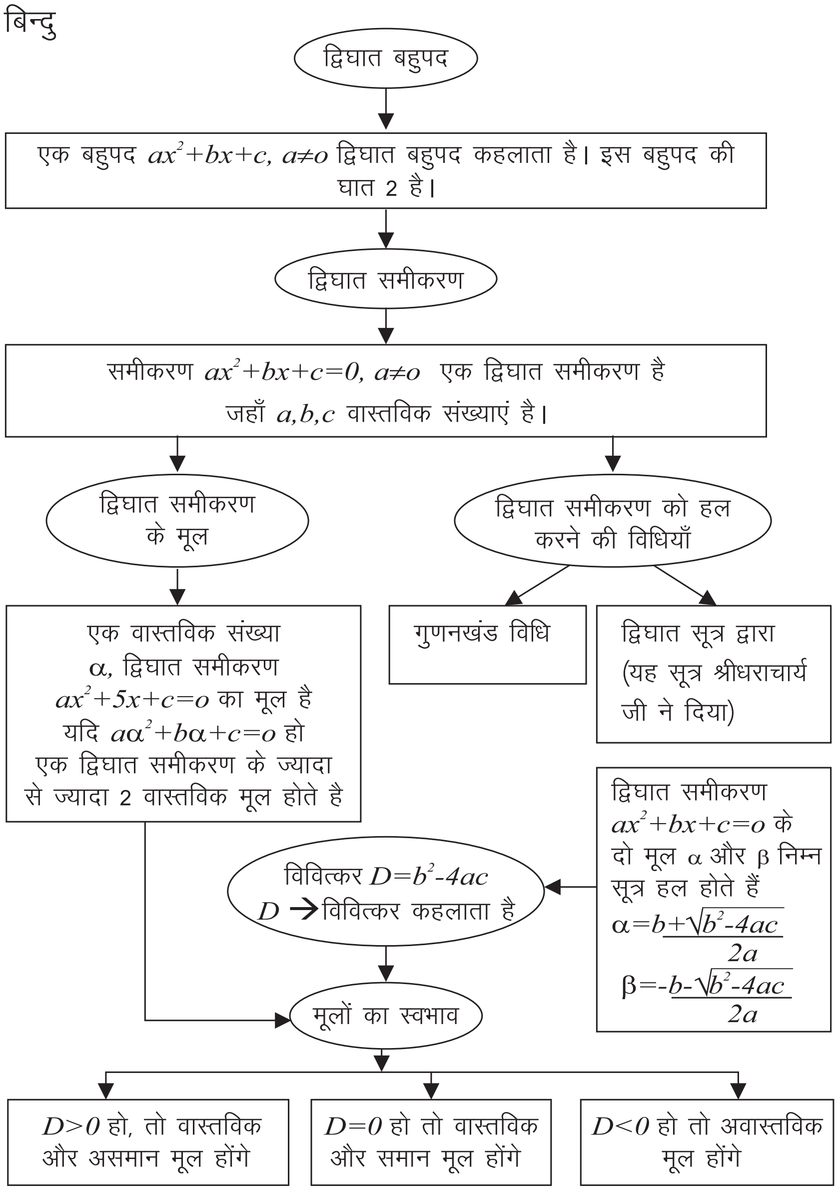
इन रेखाओं तथा x-अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र को छायांकित कीजिए।

4

अध्याय

द्विघात समीकरण

महत्वपूर्ण बिन्दु



नोट 1 वास्तविक और असमान मूल $=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ से ज्ञात कीजिए।

2 वास्तविक और बराबर मूल $=\frac{-b}{2a}, -\frac{b}{2a}$ होते हैं।

3 कुछ द्विघात समीकरण के वास्तविक मूल नही होते हैं उदाहरण $x^2+1=0$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1 निम्न में से कौन सा समीकरण द्विघात समीकरण नहीं है?

a) $2(x-1)^2=4x^2-2x+1$ b) $3x-x^2=x^2+6$

c) $(\sqrt{3x}+\sqrt{2})^2 = 2x^2-5x$ d) $(x^2+2x)^2=x^4+3+4x^2$

2 निम्न में से किस समीकरण का एक मूल 2 होगा?

a) $x^2+4=0$ b) $x^2-4=0$

c) $x^2+3x-12=0$ d) $x^2-5x-6=0$

3 यदि समीकरण $x^2+px-\frac{5}{4}=0$ का एक मूल $\frac{1}{2}$ हो तो p का मान क्या होगा?

a) 2 b) -2

c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$

4 हर द्विघात समीकरण का ज्यादा से ज्यादा

a) 3 मूल होंगे b) एक मूल होगा

c) 2 मूल होंगे d) कितने भी मूल होंगे

5 $x^2-7x=0$ के मूल क्या होंगे

a) 7 b) 0,–7

c) 0, 5 d) 0, 7

प्र. 6 रिक्त स्थान भरिएः

a) यदि $px^2+qx+r=0$ के मूल बराबर हो तो r का मान ....होगा।

*b)*द्विघात समीकरण $x^2-5x-6=0$ को यदि $(x+p)(x-q)=0$ के रूप में व्यक्त करें तो p और q का मान क्रमशः ....और.........................होगा।

c) k का वह मान जिसके लिए द्विघात समीकरण $4x^2+4x + k = 0$ के मूल वास्तविक होंगे.........

d) यदि द्विघात समीकरण $4x^2-2x+c=o$ के मूल एक दूसरे के व्युत्क्रम हो तो c का मान ....होगा।

e) यदि किसी द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ में a का मान शून्य हो जाए तो यह समीकरण एक..................समीकरण हो जाएगा।

प्र. 7 निम्न कथन सत्य है या असत्य, कारण सहित बताएँ

a) हर द्विघात समीकरण का कम से कम एक वास्तविक मूल होता है।

b) यदि किसी द्विघात समीकरण में x^2 के गुणांक तथा अचर के चिन्ह विपरित हो तो उस द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक होंगे।

c) 0.3 समीकरण $x^2-0.9=0$ का एक मूल है।

d) $(x-2)^2=0$ का विवित्कर धनात्मक होगा।

प्र. 8 निम्नलिखित प्रश्नों के मिलान करें

i) $3x^2-27=0$ के मूल	*a)* $169/9$
ii) $2x^2+\frac{5x}{3}-2=0$ का D	*b)* 0
iii) $8x^2+2x-3=0$ के मूलों का योग	*c)* $x^2-(a+b)x+ab=o$
iv) एक द्विघात समीकरण जिसके मूल a तथा b हो	*d)* $3,-3$
v) $x^2+8x=0$ के मूलों का गुणनखंड	*e)* $-1/4$

लघु उत्तरीय प्रश्न-I

प्र. 9 यदि द्विघात समीकरण $px^2-2\ \ 5px+15=o$ के मूल बराबर हो तो p का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 10 निम्न समीकरणों को गुणनखंड द्वारा x के लिए सरल कीजिए।

a) $8x^2-22x-21=0$ b) $3\sqrt{5}x^2+25x+10\sqrt{5}=0$

c) $2x^2+ax-a^2=0$ (CBSE 2014) d) $3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$ (CBSE 2010)

e) $\sqrt{3}x^2+10x+7\sqrt{3}=0$ f) $\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0$

g) $(x-1)^2-5\ (x-1)-6=0$

प्र. 11 यदि –5 द्विघात समीकरणों $2x^2+px-15=0$ का एक मूल हो तथा द्विघात समीकरण $p(x^2+x)+k=0$ के मूल बराबर हो तो k का मान ज्ञात कीजिए। (CBSE 2014, 2016)

प्र. 12 यदि $x=2/3$ और $x=-3$ द्विघात समीकरण $ax^2+7x+b=0$ के मूल हों तो a तथा b ज्ञात कीजिए। (CBSE 2016)

प्र. 13 P के किस मान के लिए द्विघात समीकरण $px^2+6x+4p=0$ के मूलों का गुणनखंड और मूलों का योग बराबर होगा?

प्र. 14 दो वर्गों की भुजाएँ x से.मी तथा $(x+4)$ से.मी. हैं। उनके क्षेत्रफलों का योग 656 वर्ग से.मी. हैं। दोनों वर्गों की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

प्र. 15 द्विघात समीकरण $x^2-5x+(3k-3) = 0$ के मूलों का अंतर 11 हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

लघु उत्तरीय प्रश्न-II

प्र. 16 यदि द्विघात समीकरण $x^2+kx+64=0$ और $x^2-8x+k=o$ के मूल वास्तविक हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

प्र. 17 x के लिए सरल कीजिए:–

a) $\dfrac{1}{a+b+x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{x},\ a+b+x \neq 0, a,b,x\neq 0$

b) $\dfrac{1}{2a+b+2x} = \dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2x},\ 2a+b+2x\neq 0,\ a,b,x\neq 0$

c) $\frac{2x}{x-3} + \frac{1}{2x+3} + \frac{3x+9}{(x-3)(2x+3)} = 0, x \neq 3, -\frac{3}{2}$

d) $4x^2+4bx-(a^2-b^2)=0$

e) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+5} = \frac{6}{7}, x \neq 1,-5$

f) $4x^2 - 2(a^2+b^2)x + a^2b^2 = 0$

g) $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{2(x-2)} + \frac{23}{5x}, x \neq 0,-1,2$

h) $\left(\frac{2x}{x-5}\right)^2 + \frac{10x}{(x-5)} - 24=0, x \neq 5$

i) $4x^2-4a^2x+a^4-b^4=0$

j) $2ax^2 + b(6a^2+1)x + 3b^2=0$

k) $3\left(\frac{7x+1}{5x-3}\right) - 4\left(\frac{5x-3}{7x+1}\right) = 11, x \neq \frac{3}{5}, \frac{-1}{7}$

l) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{3} \quad x \neq -4,7$ (NCERT)

m) $\frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x-7} = \frac{10}{3} \quad x \neq -5,7$ (CBSE 2014)

n) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+4} \quad x \neq -1,-2,-4$

o) $\frac{1}{2x-3} + \frac{1}{x-5} = 1, \; x=3/2, \; 5$

p) $x^2 + 5\sqrt{5}x-70=0$

q) $\frac{16}{x} - 1 = \frac{15}{x+1}, x \neq 0,-1$ (CBSE 2014)

प्र. 18 द्विघात सूत्र द्वारा निम्न द्विघात समीकरण सरल कीजिएः $abx^2 + (b^2-ac)x-bc=0$

प्र. 19 यदि द्विघात समीकरण $(p+1)x^2-6(p+1)x+3(p+9)=0$ के मूल बराबर हो तो p का मान ज्ञात कीजिए और फिर इस समीकरण के मूल भी ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्र. 20 एक रेलगाड़ी 54 कि.मी. की दूरी किसी औसत गाति से तय करती है और फिर 63 कि.मी. की दूरी तय करने के लिए अपनी औसत गति से 6 किमी/घंटा अधिक गाति से तय करती है। यदि यह रेलगाड़ी पूरी यात्रा के लिए 3 घंटे का समय लेती है तो इसकी प्रथम गाति ज्ञात कीएिए।

प्र. 21 एक प्राकृतिक संख्या में 12 बढाने पर यह संख्या अपने व्युत्क्रम की 160 गुना हो जाती है यह संख्या ज्ञात कीजिए।

प्र. 22 एक चोर 100 मी/मिनट की गति से भाग रहा है। इसके एक मिनट बाद एक पुलिस वाला इस चोर को पकड़ने के लिए इसके पीछे भागता है। वह पहले मिनट में 10 मीटर/मिनट की गति से दौड़ता है और हर बढ़ते मिनट पर अपनी गाति 10 मीटर/मिनट से बढा देता है। कितने मिनट बाद पुलिसवाला चोर को पकड़ लेगा?

प्र. 23 दो नल एक साथ एक टैंक को 6 घंटे में भरते हैं। बड़े व्यास वाला नल छोटे व्यास वाले नल से 9 घंटे कम लेता है, इस टैंक को अलग से भरने के लिए वह समय ज्ञात कीजिए जिसमें ये दोनों नल अलग–2 इस टैंक को भरेंगे।

प्र. 24 एक आयाताकार पार्क जिसकी बीमाएँ $50m \times 40m$ हैं, इसके बीच में एक आयाताकार तालाब का निर्माण इस प्रकार करना है ताकि इसके चारों तरफ घास का क्षेत्रफल 1184 वर्ग मी. हो। इस तालाब की लंबाई तथा चौडाई ज्ञात कीजिए।

प्र. 25 एक किसान 100 वर्ग मी. का आयाताकार बगीचा लगाना चाहता है। उसके पास केवल 30 मीटर कांटेदार तार है, जिसे वो इस बगीचे के तीन ओर लगाता है तथा अपने मकान की दीवार को चौथी तरफ की बाड़ के रूप में मानता है। इस बगीचे की बीमाएं ज्ञात कीजिए।

प्र. 26 एक मोर 9 m ऊँचें स्तंभ पर बैठा था। स्तंभ के तल से 27 m दूर एक सांप है जो अपने बिल की तरफ, जो स्तंभ के तल में है, आ रहा है। सांप को देखकर मोर उस पर झपटता है। यदि उन दोनों की गति बराबर हो तो बिल से कितनी दूरी पर मोर सांप को पकड़ लेगा?

प्र. 27 यदि किसी किताब का मूल्य ₹ 5 घटाया जाए तो कोई व्यक्ति 5 और किताबें ₹ 300 में खरीद पाऐगा। किताब का वास्तविक सूची मूल्य ज्ञात कीजिए।

प्र. 28 ₹ 6500 को कुछ व्यक्तियों में बराबर बांटा गया। यदि 20 व्यक्ति और आ जाएँ तो प्रत्येक व्यक्ति को ₹ 30 कम प्राप्त होंगे। तो कुल व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

प्र. 29 खराब मौसम के कारण एक हवाई जहाज को 600 km की दूरी तय करने के लिए, अपनी औसत गाति 200km/hr की दर से कम करनी पड़ी जिस कारण से उड़ान का समय 30 मिनट बढ़ गया। इस उड़ान का समय ज्ञात कीजिए।

प्र. 30 एक तेज चलने वाली रेलगाड़ी एक धीरे चलने वाली रेलगाड़ी से 600 km की दूरी तय करने में 3 घंटे कम समय लेती है। यदि धीमी रेलगाड़ी की गति 10 किमी/घंटा तेज रेलगाडी से कम हो तो दोनों रेलगाड़ी की गति ज्ञात कीजिए।

प्र. 31 एक नाव जिसकी गति शांत जल में 15 किमी/घंटा है जो 30 किमी धारा के विरूद्ध जाकर अपने मूल बिंदु पर धारा की दिशा मे वापस आने के लिए 4 घंटा 30 मिनट लेती है। धारा की गति ज्ञात कीजिए।

प्र. 32 दो वर्गों के क्षेत्रफलों का योग 400 वर्ग सेमी है। इनके परिमापों का अंतर 16 सेमी हो तो प्रत्येक वर्ग की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

प्र. 33 एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 60 वर्ग सेमी है। इसकी बराबर भुजाओं की लंबाई 13 सेमी हो तो इसके आधार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

प्र. 34 किसी भिन्न का हर उसके अंश के दुगने से एक अधिक है। यदि इस भिन्न और इसके व्युत्क्रम को जोड़े तो $2\frac{16}{21}$ प्राप्त होता है। यह भिन्न ज्ञात कीजिए।

प्र. 35 एक लड़की की उम्र अपनी बहन से दुगुनी है। चार वर्ष पश्चात दोनों की आयु का गुणनफल 160 होगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

प्र. 36 एक दो अंकों वाली संख्या के अंकों का गुणनफल 18 है। जब इस संख्या में से 63 घटाया जाए तो अंक अपने स्थान बदल लेते हैं। यह संख्या ज्ञात कीजिए।

प्र. 37 तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों में पहली संख्या का वर्ग और अन्य दो संख्याओं का गुणनफल जोड़ने पर 46 प्राप्त होता है। पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

प्र. 38 एक कपड़ा ₹ 200 का है। यदि कपड़े की लंबाई 5 मी अधिक होती और प्रति मीटर कपड़े का मूल्य दो रुपए कम होता है तो भी कपड़े का कुल मूल्य वही रहता। कपड़े की लंबाई और प्रति मीटर कपड़े का मूल्य ज्ञात कीजिए।

प्र. 39 एक मोटर बोट जिसकी शांत धारा में गति 24 किमी/घंटा है। 32 किमी धारा के विरूद्व जाने में 1 घंटा अधिक लेती है, धारा के दिशा में इसी स्थान पर आने में धारा की गति ज्ञात कीजिए। (CBSE 2016)

प्र. 40 यदि द्विघात समीकरण $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ के मूल बराबर हो तो सिद्व कीजिए $2b=a+c$ है।

प्र. 41 यदि द्विघात समीकरण $(1+m^2)n^2x^2+2mncx+(c^2-a^2)=0$ के मूल बराबर हो तो सिद्व कीजिए $c^2=a^2(1+m^2)$ है।

उत्तर और संकेत

Q 1 (d) ($x^4+4x^2+4x^3=x^4+3+4x^2 \Rightarrow 4x^3=3 \Rightarrow degree=3$)

Q 2 (b) ($x=2$, समीकरण मे रखने पर जाँच करें)

Q 3 (a) ($x=\frac{1}{2}$, $x^2+px-\frac{4}{5}=0$ में रखकर)

Q 4 (c) एक द्विघाती बहुपद की डिग्री 2 होती है और इसके ज्यादा से ज्यादा दो शून्यांक होते हैं)

Q 5 (d) ($x(x-7)=0 \Rightarrow x=0, x=7$)

Q 6 (a) $r=\frac{q^2}{4p}$ ($D=0 \Rightarrow q^2-4pr=0$)

(b) $p=-6, q=1$ ($x^2-5x-6=0 \Rightarrow (x-6)(x+1)=0$)

c) $k<4$

d) $c=4$ (गुणनफल$=1, \frac{c}{4}=1$)

e) रैखिक समीकरण($x=0 \Rightarrow ax^2+bx+c=0 \Rightarrow bx + c = 0$)

Q 7 (a) असत्य (एक द्विघात समीकरण के ज्यादा से ज्यादा दो वास्तविक मूल होते हैं)

(b) सत्य (x^2 का गुणांक $=a$, अचर$=c$

$D=b^2-4ac=b^2-4a(-c)=b^2+4ac>0$)

c) असत्य ($x^2=0.9 \Rightarrow x=\pm 0.9$)

d) असत्य ;एक द्विघात बहुपद की डिग्री 2 होती है। यदि डिग्री 1 हो तो सीधी रेखा)

$Q\ 8\ (i) \Rightarrow d$

$(ii) \Rightarrow a$

$(iii) \Rightarrow e$

$(iv) \Rightarrow c$

$(v) \Rightarrow b$

$Q\ 9\ D=0$

$20p^2-60p=0,\ p\neq 0$

$20\ p(p-3)=0$

$p=3$

$Q\ 10$ a) $x=\frac{7}{2}$, $x=\frac{-3}{4}$ b) $x=\sqrt{5}$, $x=-2\sqrt{5}$

c) $x=\frac{a}{2}$, $x=-a$ d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}$

e) $x=-\sqrt{3}$, $x=-\frac{7\sqrt{3}}{3}$ f) $x=-\sqrt{2}$, $x=-\frac{5\sqrt{2}}{2}$

g) माना $x-1=y$

$y^2-5y-6=0 \quad \Rightarrow (y+1)\ (y-6)=0$

$y=-1, \qquad y=6$

$x-1=-1 \qquad x-1=6$

$x=0 \qquad x=7$

$Q\ 11\ 2(-5)^2+p(-5)-15=0 \Rightarrow p=7$

$7x^2+7x+k=0$

$D=49-28k=0$

$k=\frac{49}{28}=\frac{7}{4}$

$Q\ 12\ x=\frac{2}{3}$ रखने पर $4a+9b=-42$

$x=-3$ रखने पर $9q+b=21$

हल करने पर $a=3,\ b=-6$

Q 13 गुणनफल $= \frac{-c}{a} = \frac{4p}{p} = 4$

योग $= \frac{-b}{a} = \frac{-6}{p} = 4 \Rightarrow p = \frac{-3}{2}$

Q 14 $x^2+(x+4)^2=656$

$x^2+4x-320=0$

$D=1296$

$x= \frac{-4 \pm \sqrt{1296}}{2} = \frac{-4+36}{2}, \frac{-4-36}{2}$

$x=16 \qquad x \neq -20$

भुजाऐं 16 cm, 20 cm

Q 15 प्रश्नानुसार $\alpha - \beta = 11, \alpha + \beta = \frac{b}{a} = 5$

हल करें $\alpha = 8, \beta = 3$

मुलों का गुणनफल $= \frac{c}{a} \Rightarrow 24 = 3k-3$

$k=9$

Q 16 $x^2+kx+64=0$

$D_1=k^2-256 \geq 0 \qquad \Rightarrow k^2 \geq 256 \Rightarrow k>16, k \leq -16$ ...(1)

$x^2-8x+k=0$

$D_2=64-4k \geq 0 \Rightarrow k \leq 16$ ...(2)

(1) & (2) $\Rightarrow k=16$

Q 17 a) $= \frac{1}{a+b+x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$$\frac{x-a-b-x}{x(a+b+x)} = \frac{a+b}{ab}$$

$-(a+b)ab=(a+b)(a+b+x)x$

$\Rightarrow x^2+xa+bx+ab=0$

$x=-a, x=-b$

b) 17 (a) के जैसे हल करें

c) लघुत्तम लेकर समीकरण $2x^2+5x+3=0$ को हल करें $x=-1, x\neq-3/2$

d) $4x^2+4bx+b^2-a^2=0$

$(2x+b)^2-a^2=0$ $(A^2-B^2)=(A+B)(A-B)$ लगाकर हल करें। $x=-\frac{(a+b)}{2}, x=\frac{a-b}{2}$

(e) लघुत्तम लेकर समीकरण $x^2+4x-12=0$ प्राप्त कीजिए। इसे हल करके $x=2,-6$ उत्तर प्राप्त होगा।

f) $4x^2-2a^2x-2b^2x+a^2b^2=0$

$2x(2x-a^2)-b^2(2x-a^2)=0\Rightarrow(2x-b^2)(2x-a^2)=0$

$\Rightarrow x=\frac{b^2}{2},\frac{a^2}{2}$

g) लघुत्तम लेकर $11x^2-21x-92=0$ प्राप्त कीजिए।

$$11x^2-44x+23x-92=0$$

सरल करें तथा $x=4,-\frac{23}{11}$ उत्तर प्राप्त होगा।

h) $\left(\frac{2x}{x-5}\right)^2+5\left(\frac{2x}{x-5}\right)-24=0$

माना $\frac{2x}{x-5}=y$

$y^2+5y-24=0$

सरल करने पर $y=3, y=-8$

y का मान रखने पर $\frac{2x}{x-5}=3, \frac{2x}{x-5}=-8$

हल करने पर $x=15, x=4$) उत्तर

i) $4x^2-4a^2x+a^4-b^4=0$

$(2x-a^2)^2-(b^2)^2=0$

$(2x-a^2-b^2)(2x-a^2+b^2)=0$

$x=\frac{a^2+b^2}{2}, x=\frac{a^2-b^2}{2}$

j) विवित्कर $D=b^2(6a^2-1)^2$ प्राप्त कीजिए

$n=\frac{-B\pm\sqrt{D}}{2a}$ का प्रयोग करें

उत्तर $x=-\frac{b}{2a^2},-3b.$

k) $\frac{7x+1}{5x-3}=y$ (माना)

$\therefore\ 3y-\frac{4}{y}=11\Rightarrow 3y^2-11y-4=0$

सरल करने पर $y=-\frac{1}{3}$, $y=4$

y का मान रखे व सरल करें। उत्तर $x=0,1$

l) लघुत्तम लेने $x^2-3x+2=0$ पर प्राप्त होगा।

सरल करने $x=1,\ x=2$

m) लघुत्तम लेने पर $2x^2-27x+88=0$

$x=8,\frac{11}{2}$

n) लघुत्तम लेने पर $x^2-4x-8=0$ प्राप्त होगा।

द्विघात सूत्र $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ का प्रयोग करें।

उत्तर $x=2\pm2\sqrt{3}$

o) लघुत्तम लेने पर $2x^2-16x+23=0$ प्राप्त होगा।

द्विघात सूत्र द्वारा सरल करें

उत्तर $x=\frac{-8\pm3\sqrt{2}}{2}$

p) $x^2+7\sqrt{5}x-2\sqrt{5}x-70=0$

$(x+7\sqrt{5})\ (x-2\sqrt{51})=0$

$x=2\sqrt{5},-7\sqrt{5}$

q) $\frac{16-x}{x}+\frac{15}{x+1}\Rightarrow x^2-16=0\Rightarrow\ x=\pm4.$

$Q\ 20$ $\frac{54}{x} + \frac{63}{x+6} = 3$ x=पहली गति

उत्तर $x=36, x \neq -3$ $x+6$= बढ़ी हुई गति

$Q\ 21$ माना प्राकृतिक संख्या $=x$

प्रश्नानुसार $x+12=\frac{60}{x}$

$x^2+12x-160=0$

$(x+20)(x-8)=0$

$x=8, x \neq -20$

$Q\ 22$ माना कुल समय $= n$ मिनट

पुलिसवाले द्वारा लिया समय $= (n-1)$ मिनट

चोर द्वारा तय की गई दूरी$=(100n)$ मीटर ...(1)

(1 मिनट में तय की गई दूरी $=100$ मीटर) पुलिसवाले द्वारा तय की गई दूरी

100+110+120+.........+$(n+1)$ पद ...(2)

(1) & (2)

$= 100x=\frac{(n-1)}{2}(2\times 100+(x-2)10)$

$=) n^2-3n-18=0$

$n=6, n \neq -3$

पुलिसवाला चोर को 5 मिनट में पकड़ लेगा।

$Q\ 23$ छोटे व्यास वाले नल द्वारा लिया गया समय $= x$ घंटे

बड़े व्यास वाले नल द्वारा लिया गया समय $= (x-9)$ घंटे

प्रश्नानुसार $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-9} = \frac{1}{6}$

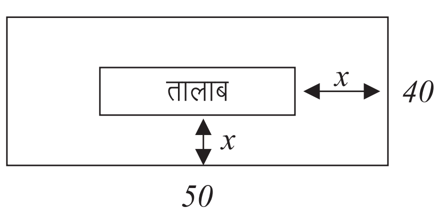
सरल करें $x^2-21x+54=0$

$x=3, x=18$

$x \neq 3 \therefore x-9=3-9=-6 < 0$

$x= 18$ घंटे $x-9=9$ घंटे।

$Q\ 24$



आयाताकार बगीचे का क्षेत्रफल $= 50\times 40$

तालाब का क्षेत्र. $=(50-2x)(40-2x)$

प्रश्नानुसार $(50\times40)-(50-2x)\,40-2x)=0$

सरल करे $x^2-45x+296=0$

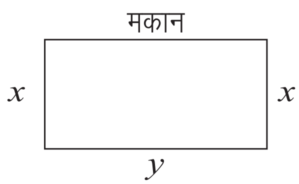
$x=37,\ x=8$

$x\neq37 \because\ 40-2x=40-2(37)<0$

तालाब की लंबाई $=34$ मीटर

तालाब की चौड़ाई $=24$ मीटर

Q 25



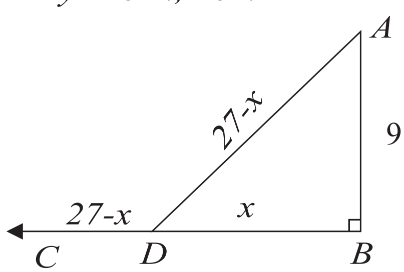
$x+y+x=30$

$xy=100$

सरल करे $x=5m,\ 10m$

$y=20\ m,\ 10m$

Q 26



ABD में, पाइथागोरस प्रमेय द्वारा $a^2+x^2=(27-x)^2$

सरल करें तथा $x=12$ प्राप्त $x=12$ मीटर

Q 27 माना वास्तविक सूची मूल्य ₹ x

प्रश्नानुसार $\frac{300}{x-5} \quad \frac{-300}{x} = 5$

सरल करें $x=20,\ x\neq-15$

उत्तर ₹ 20

Q 28 माना वास्तविक व्यक्तियों की संख्या$=x$

प्रश्नानुसार $\frac{6500}{x}-\frac{6500}{x+15}=30$

सरल करें $x=50,\ x\neq-65$

Q 29 धीमी रेल गाड़ी की गति $=x$ किमी/घंटा

प्रश्नानुसार

$$\frac{600}{x-200} - \frac{600}{x} = \frac{1}{2}$$

सरल करें $x=600, x\neq-400$

उडान का समय $= \frac{600}{600} = 1$ घंटा

Q 30 धीमी रेल गाड़ी की गति $=x$ किमी/घंटा

प्रश्नानुसार

$$\frac{600}{x} - \frac{600}{x+10} = 3$$

सरल करें $x=40, x\neq-50$

उत्तर 40 किमी/घंटा

Q 31 $\frac{30}{15-x} + \frac{30}{15+x} = \frac{9}{2}$ धारा की गति $=x$ किमी/घंटा

सरल करें $x=5, x\neq-5$

उत्तर 5 किमी/घंटा

Q 32 $x^2 + y^2 = 400$ ...(1)

$4x-4y=16$ या $4y-4x=16$

$= x-y=4$ ...(2) या $y-x=4$ ...(3)

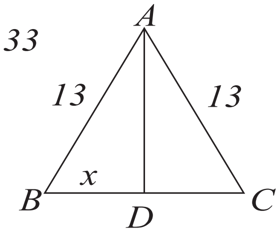
(1) & (2) को सरल करने पर $x=16, x\neq-12$

(1) & (3) को सरल करने पर $x=12, x\neq-16$

उत्तर $x=16$ मीटर, $y=12$ मीटर

$x=12$ मीटर, $y=16$ मीटर

Q 33



$BC=2x$

$BD=x$

पाईथा गोरस प्रमेय द्वारा

$AD=\sqrt{169-x^2}$

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 2x \times \sqrt{169-x^2} = 60$

सरल करें $x^2=144, x^2=25$

$x=12, x=5 \ (x\neq-12,-5)$

आधार $2x=24, 10 \ cm$

Q 34 भिन्न $= \frac{x}{2x+1}$

प्रश्नानुसार $\frac{x}{2x+1} + \frac{2x+1}{x} = 2\frac{16}{21} = \frac{58}{21}$

सरल करें $x=3, x=\frac{-7}{11}$

उत्तर भिन्न $\frac{3}{7}$

Q 35 बहन की आयु $= x$ वर्ष

लडकी की आयु $= 2x$ वर्ष

प्रश्नानुसार $(x+4)(2x+4)=160$

सरल करें $x=6, x\neq-12$

$2x=12$

उत्तर 6 वर्ष, 12 वर्ष

Q 36 संख्या $10x+\frac{18}{x}$ (इकाई अंक $18/x$

(दहाई अंक $=x$)

प्रश्नानुसार $(10x+\frac{18}{x})-(10\times\frac{18}{x}+x)=63$

सरल करें $x=9, x\neq-2$

उत्तर संख्या $= 92$

Q 37 माना संख्याएं $x,x+1,x+2$

प्रश्नानुसार $x^2+(x+1)(x+2)=46$

$2x^2+3x-44=0$

द्विघात सूत्र द्वारा $x=4, x\neq-22$

संख्याएं 4,5,6

$Q\ 38$ माना कपड़े की लंबाई $= x$ मीटर

प्रश्नानुसार $\frac{200}{x} - \frac{200}{x+5} = 2$

सरल करें $x=20, x \neq -25$

मूल्य प्रति मीटर $= \frac{200}{x} = \frac{200}{20} =$ ₹ 10

$Q\ 39$ माना धारा की गति $= x$ किमी/घंटा

प्रश्नानुसार $\frac{32}{24-x} - \frac{32}{24+x} = 1$

$x^2-64x-576=0$

$(x-72)(x+8)=0$

$x \neq -8\ x=72$ km/hr

$Q\ 40\ D$ ज्ञात करें तथा $D=0$ रखें

$(c-a)^2 - 4\ (b-c)\ (a-b) = 0$

$\Rightarrow (a+c-2b)^2=0$

$a+c=2b$

$Q\ 41\ D=0$

$(2mnc)^2-4\ (1+m^2)\ n^2(c^2-a^2)=0$

$4n^2c^2= 4na^2(1+m^2)$

$c^2=a^2(1+m^2).$

अभ्यास प्रश्न–प्रत्र

द्विघात समीकरण

समय : 1 घंटा अंक : 20

खण्ड–अ

1 यदि $x=3$ द्विघात समीकरण $x^2-2kx-6=0$ का एक मूल हो तो k का मान ....होगा। 1

2 यदि $3x^2+2x+\alpha=0$ का विवित्कर, $x^2-4x+2=0$ के विवित्कर के दुगुना हो तो α का मान ....होगा। 1

3 यदि $6x^2-bx+2=0$ का विवित्कर 1 होगा, तो b का मान ....होगा। 1

4 $(x-1)^3=x^3+1$ एक द्विघात समीकरण है। (सत्य/असत्य) 1

खण्ड–ब

5 यदि $x^2+kn+12=0$ के मूल 1:3 में हो तो k का मान ज्ञात कीजिए। 2

6 x का मान ज्ञात कीजिए: $21x^2-2x+\frac{1}{21}=0$ 2

7 यदि द्विघात समीकरण $kx(x-2)+6=0$ के मूल बराबर हो तो k का मान ज्ञात कीजिए। 2

खण्ड–स

8 द्विघात सूत्र द्वारा हल करें: $4\sqrt{3}x^2+5x-2\sqrt{3}=0$ 3

9 k के किस मान के लिए $(4-k)x^2+(2k+4)x+(8k+1)=0$ एक संपूर्ण वर्ग है। 3

खण्ड–द

10 दो नल एक टैंक को मिलकर $1\frac{7}{8}$ घंटे में भरते है। जिस नल का व्यास बडा है वो छोटे व्यास वाले नल से टैंक भरने में 2 घंटे कम लेता है। दोनों नल अलग–2 टैंक भरने में कितना समय लेंगे? (CBSE 2018) 4

5

अध्याय

सामांतर श्रेढ़ियाँ

माइन्ड मैप

महत्वपूर्ण बिंदु

1. यदि a_n दिया हो तो
$d=a_{n-1}-a_n$

2. यदि S_n दिया हो तो
$a_n=S_n-S_{n-1}$

3. यदि $a,b,c,$ समांतर श्रेढ़ी के क्रमागत पद हो तो
$2b=a+c$

4. अंत से nवां पद $= l-(n-1)\ d$
l अंतिम पद

5. किसी $A.P.$ के तीन पद जब उनको योग दिया हो $a-d,\ a,\ a+b)$

6. 4 पद $a-3d,a-d,a+d,a+3d$

7. 5 पद $a-2d,a-d,a$
$a+d,\ a+2d$

समांतर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल
$S_n+\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$
$sn+\frac{n}{2}[a+l]$
$l=a_n$ अंतिम पद

अथार्त $A.P.$ एक अनुक्रम है $a_1,a_2a_3.....a_n$ जहाँ
$a_2-a_1=a_5-a_2=a_4-q_3$
$=a_n-a_{n-1}=d$

$a\rightarrow$ सार्वअंतर कहलाता है
$a\rightarrow$ प्रथम पद
$a_n=a+(n-1)d$
$a_n\rightarrow$ व्यापक पद कहलाता है।

समांतर श्रेढी–एक अनुक्रम जिसमें प्रत्येक पद का अगले पद से निश्चित अंतर होता है, समांतर श्रेढी कहलाती है $(A.P.)$

अनुक्रम–संख्याओं का एक समुच्चय जो किसी नियम द्वारा निश्चित क्रम में व्यवस्थित होता है, अनुक्रम कहलाता है।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु:

1. **अनुक्रम**–संख्याओं का एक समुच्चय जो किसी नियम द्वारा निश्चित क्रम में व्यवस्थित होता है, अनुक्रम कहलाता है।

2. **समान्तर श्रेढ़ी**–एक अनुक्रम जिसमें प्रत्येक पद का अगले पद से निश्चित अंतर होता है, समांतर अनुक्रम या समांतर श्रेढ़ी (स. श्रे. या **A . P.**) कहलाती है। अर्थात–समातंर श्रेढ़ी (स. श्रे. या **A. P.**) एक अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots$ हैं जहां $a_n - a_{n-1} = \ldots. = d$

3. **व्यापक पद**–यदि एक समातंर श्रेढ़ी का प्रथम पद *'a'* तथा सार्व अंतर *'d'* हो तो n वॉ पद (व्यापक पद) निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है–

$$a_n = a + (n-1)d$$

4. समातंर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल–

(*i*) $s_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$; जहां a = प्रथम पद

d = सार्व अंतर

(*ii*) $s_n = \frac{n}{2}[a + l]$; जहां a = प्रथम पद

l = अंतिम पद

5. (*i*) यदि a_n दिया हो तो सार्व अंतर $(d) = a_n - a_{n-1}$

(*ii*) यदि s_n दिया हो तो $a_n = s_n - s_{n-1}$

(*iii*) यदि $a, b, c,$ समांतर श्रेढ़ी के क्रमागत पद हो तो $2b = a + c$

(*iv*) यदि किसी अनुक्रम में x पद हैं, तो इसका अंत से r वां पद प्रारंभ से $(n-r+1)$वां पद।

(*v*) यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के m वें तथा n वें पदों में अंतर:

$$(a_m - a_n) = (m-n)d$$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1 यदि एक स. श्रे. (A.P.) का n वां पद $3x–5$ हो तो इसका 5वां पद क्या होगा?

2 प्रथम 10 सम संख्याओं का योगफल ज्ञात करों।

3 विषय संख्याओं का n वां पद लिखिए।

4 प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल क्या होगा?

5 प्रथम n सम संख्याओं का योग क्या होगा?

6 स0 श्रे0 –10, –15, –20, –25, ... का n वां पद ज्ञात किजिए।

7 स0 श्रे0 $4\frac{1}{9}, 4\frac{2}{9}, 4\frac{1}{3}$....... का सार्व अंतर ज्ञात किजीए।

8 स0 श्रे0 का सार्व अंतर ज्ञात कीजिए यदि इसका n वां पद $(a_n) = 3n + 7$

9 स0 श्रे0 4, 9, 14, ..., 254 के लिए $a_8 – a_4$ का मान क्या होगा?

10 स0 श्रे0 –10, –12, –14, –16, ... के लिए a_{16} का मान क्या होगा?

11 यदि *3, k-2, 5* स. श्रेढ़ी के पद हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

12 $\frac{4}{5}, p, 2$ समातंर श्रेढ़ी में हैं। p का मान ज्ञात कीजिए।

13 निम्न A.P. में अज्ञात पद ज्ञात कीजिए। (NCERT)

a) 2 ☐ 26

b) ☐ 13 ☐ 3

c) 5 ☐ ☐ $9\frac{1}{2}$

d) -4 ☐ ☐ ☐ ☐ 6

e) ☐ 38 ☐ ☐ ☐ -22

14 बहु विकल्पीय प्रश्न

a) AP 10,7,4..............का 30वाँ पद

A) 97 b) 77 c) -77 d)$-48\frac{1}{2}$

b) AP -3,1/2, 2................ का 11वाँ पद

a) 28 b) 22 c) -38 d)$-48\frac{1}{2}$

c) किसी *A.P* में $d=-4, n=7, a_n=4$ हो तो a का मान

A) 6 B) 7 C) 20 D) 28

d) किसी A.P के प्रथम तीन पद $3y-1, 3y+5$ तथा $5y+1$ हो तो y का मान

A) -3 B) 4 C) 5 D) 2

e) दी गई संख्याएं -10,-6,-2,2....................एक

A) A.P हैं जिसका सार्व अंतर –16 हैं

b) A.P हैं जिसका सार्व अंतर 4 हैं

C) A.P हैं जिसका सार्व अंतर –4 हैं

D) A.P नहीं है।

f) A.P 10,7,4....................... का अंत से 11वाँ पद होगा।

A) 25 B) -32 C) 16 D) 0

g) प्रथम 100 प्राकृतिक संख्याओं का योग ज्ञात करने में जुड़े प्रसिद्ध गणितज्ञ का नाम

A) पाइथागोरस B) न्यूटन C) गॉस D) यूक्लिड

h) यदि किसी A.P में $a_{18}-a_{14} = 32$ हो तो उसका सार्व अन्तर होगा।

A) 8 B) -8 C) -4 D) 4

15 निम्न का मिलान करें

a) $a=-18, n=10, d=2$ तो AP का a_n	a) $\frac{a+c}{2}$
b) यदि a,b,c AP में है तो उनका अंकगणितिय माध्य का सूत्र	b) 0
c) यदि 2,4,6 AP में है तो 4,8,12, भी	c) -41
d) यदि किसी AP में $a_n=9-5n$ हो तो a_{10} का मान	d) 8

e) यदि $d=-2, n=5$ और हो $a_n=0$ हो किसी AP में तो a का मान

e) AP

16 सत्य/असत्य बताएं और करण भी बताएँ

a) 301, AP $5, 11, 17, 23$................का पद है।

b) किसी AP में mवें और nवें पदों का $(m-n)d$ अंतर होगा।

c) $2, 5, 9, 14$................ एक AP है

d) प्रथम 20 प्राकृतिक संख्याओं का योग 410 होगा।

e) AP $5, 10, 15, 20$................n पद और AP $15, 30, 45, 60$................nपद, दोनों का n वाँ पद बराबर होगा।

लघु उत्तरीय प्रश्न 1

17 क्या 144 समातंर श्रेढ़ी 3, 7, 11,.......का एक पद है? अपने उत्तर की पृष्टि कीजिए।

18 स0 श्रे0 3, 8, 13,.......,253 का अंत से 20वां पद ज्ञात कीजिए।

19 स0 श्रे0 5, 15, 25,......का कौन–सा पद इसके 31वां पद से 130 अधिक होगा?

20 किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद, सार्व–अंतर और अंतिम पद क्रमशः 12, 6 और 252 हैं। इसके सभी पदों का योग ज्ञात कीजिए।

21 15 के प्रथम 8 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।

22 क्या नीचे दी गई स्थितियों में बना अनुक्रम एक समांतर श्रेढ़ी है?

(*i*) कुल 1000 विधार्थियों में से विद्यालय सभागर में बचे विद्यार्थियों की संख्या जबकि वे विद्यालय सभागार को 25 के समूह में छोड़ते हैं।

(*ii*) प्रतिवर्ष खाते में राशि जबकि 100 रुपये प्रतिवर्ष जमा करवाए जाते हैं जिन पर 4% वार्षिक दर चक्रवृद्धि ब्याज संयोजित होता है।

23 1 से 200 के बीच की सम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

24 यदि $4m + 8, 2m^2 + 3m + 6, 3m^2 + 4m + 4$ एक समांतर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद हों तो m का मान ज्ञात कीजिए।

25 स0 श्रे0 22, 20, 18,........के कितने पदों का योग शुन्य है?

26 एक स0 श्रे0 के दसवें पद का दस गुणा इसके बीसवें पद के 20 गुने समान है। इसका 30वां पद ज्ञात कीजिए।

27 स0 श्रे0 6, 13, 20.......,216 का मध्यपद ज्ञात कीजिए।

28 क्या –150, स. श्रेढ़ी 11.8,5,2.....................का पद होगा? (NCERT)

29 ज्ञात करें कितनी दो अंको वाली संख्याएं 6 से विभाजित होती है?

30 यदि $\frac{1}{x+2}$ $\frac{1}{x+3}$ *and* $\frac{1}{n+5}$ स. श्रेढ़ी में हो तो x का मान ज्ञात करें।

31 स. श्रेढी *(AP)-6,-2,2 ....58* का मध्य पद ज्ञात कीजिए। (CBSE 2011)

32 किसी स. श्रेणी में यदि a_n=*5n-1* हो तो S_n ज्ञात कीजिए। और इस प्रकार प्रथम 20 पदों का योग भी ज्ञात कीजिए।

33 स. श्रेणी *(AP)3,7,11,15...........* का कौन सा पद 79 होगा? योग *3+7+11+.... 79* भी ज्ञात कीजिए। (CBSE 2011C)

34 स. श्रेणी *121, 117,113.............*का कौन सा पद प्रथम ऋणात्मक पद होगा? (NCERT)

35 स. श्रेणी *3,8,13.............*253 का अंत से 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

लघु उत्तरीय प्रश्न 2

36 स0 श्रे0 7, 13, 19,........241 के मध्य पद ज्ञात कीजिए।

37 10 और 5000 के बीच के उन पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए जो 7 से विभाज्य हैं।

38 एक स0 श्रे0 के 5वें तथा 9वें पदों का योग 72 तथा 7वें और 12वें पदों का योग 97 है। स0 श्रे0 ज्ञात कीजिए।

39 एक स0 श्रे0 का mवां पद $\frac{1}{n}$ तथा n वां पद $\frac{1}{m}$ है। सिद्ध कीजिए कि इसका (mn)वां पद 1 है।

40 एक स0 श्रे0 का p वां पद 2 तथा q वां पद p है। सिद्ध कीजिए कि इसका n वां पद $(p + q - n)$ है।

41 101 और 999 के बीच उन प्राकृत संख्याओं की कुल संख्या ज्ञात कीजिए जो 2 और 5 दोनों से विभाज्य हों।

42 एक स0 श्रे0 के 5वें और 9वें पदों का योग 30 है। यदि इसका 25वां पद इसके 8वें पद का 3 गुना हो तो स0 श्रे0 ज्ञात कीजिए।

43 यदि किसी स0 श्रे0 के प्रथम n पदो का योग $s_n = 5n^2 + 3n$ तो इसका n वां पद और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

44 स. श्रेणी $3, 15, 27, 39....$ का कौन सा पद इसके 21वें पद से 120 अधिक होगा? (CBSE 2018)

45 यदि किसी स. श्रेढ़ी में $S_n=3n^2-4n$ हो तो इसका nवाँ पद ज्ञात कीजिए। (CBSE 2018)

46 किस फूलों की क्यारी में, 23 गुलाब के पौधे प्रथम क्यारी में हैं, द्वितीय क्यारी में 21 हैं तीसरी क्यारी में 19 हैं और इस प्रकार अन्य क्यारियाँ है। अंतिम क्यारी में 5 गुलाब के पौधे है। इस प्रकार कितनी क्यारियाँ होगी? (NCERT)

47 n के किस मान के लिए दो स. श्रेढ़ियों 63,65,67..........................एवं 3,10,17...............का nवाँ पद बराबर होगा। (NCERT)

48 स. श्रेढ़ियों $3, 15, 27, 39.........$का कौन सा पद 54वें पद से 132 अधिक होगा? (NCERT)

49 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए। (NCERT)

50 यदि किसी स. श्रेढी में प्रथम 14 पदों का योग 1050 हो और प्रथम पद 10 हो तो इसका 20वाँ पद ज्ञात कीजिए। (NCERT)

51 यदि $S_n=4n-n^2$ हो तो यह सं श्रेढी ज्ञात कीजिए।

52 सं श्रेढी 9,17,25................के कितने पद लेने पर इसका योग 636 होगा? (NCERT)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

53 एक समातंर श्रेढ़ी के तीसरे और सातवें पदों का योग 6 तथा गुणन 8 है। इस स0 श्रे0 के प्रथम 16 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

54 वह स0 श्रे0 ज्ञात कीजिए जिसका 4वां पद 18 है और 15वें और 9वें पद का अंतर 30 है।

55 किसी स0 श्रे0 के प्रथम 9 पदों का योग 162 है। इसके छटे पद का तेरहवें पद से अनुपात 1 : 2 है। इस स0 श्रे0 का पहला और पन्द्रहवां पद ज्ञात कीजिए।

56 एक स0 श्रे0 का 10वां पद 21 है और प्रथम 10 पदों का योग 120 हैं। इसका n वां ज्ञात कीजिए।

57 एक स0 श्रे0 के प्रथम 7 पदों का योग 63 और अगले 7 पदों का योग 161 है इसका 28वां पद ज्ञात कीजिए।

58 किसी स0 श्रे0 के प्रथम बीस पदों का योग अगले बीस पदों के योग का एक तिहाई है। यदि इस स0 श्रे0 का प्रथम पद 1 हो तो इसके प्रथम 30 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

59 यदि किसी स. श्रेढी के प्रथम चार पदों का योग 40 हो और प्रथम चौदह पदों का योग 280 हो तो इस सं. श्रेढी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए। (CBSE 2018)

60 रामकली को 12 सप्ताह बाद रु 2500 चाहिए अपनी बेटी को स्कूल भेजने के लिए। वह प्रथम सप्ताह में रु100 जोडती है और फिर प्रति सप्ताह रु20 बढाती जाती है। क्या वह इस प्रकार अपनी बेटी को स्कूल भेज पाएगी?

61 किसी स. श्रेढी में 50 पद है और प्रथम 10 पदों का योग 210 है। अंतिम 15 पदों का योग 2565 है। यह सं. श्रेढी ज्ञात कीजिए। (CBSE 2015)

62 किसी स. श्रेढी के 4 पदों का योग $5n2+3n$ है। यदि इसका 4वाँ 168 हो तो m का मान ज्ञात कीजिए। इस स. श्रेढी का 20वां पद भी ज्ञात कीजिए। (CBSE 2014)

63 यदि किसी सं. श्रेढी के प्रथम सात पदों का योग 49 हो और इसके प्रथम सत्रह पदों का योग 289 हो, तो इस सं. श्रेढी के प्रथम 4 पदों का योग ज्ञात कीजिए। (CBSE 2016)

64 यदि किसी सं श्रेढी का चौथा पद शून्य हो तो सिद्ध करो इस सं श्रेढी का 25वां पद इसके 11वे पद का तीन गुना होगा।

65 किसी सं श्रेढी में $S_5+S_7=167$ हो और $S_{10}=235$ हो, जहाँ S_n इसके n पदों का योग है, तो यह स. श्रेढी ज्ञात कीजिए। (CBSE 2015)

66 किसी स. श्रेढी में सिद्ध कीजिए कि $S_{12}=3(S_8-5_4)$ जहाँ S_n स. श्रेढी के n पदों का योग है।

उत्तर और संकेत

Q 1 $a_n = 3n-5,\ a_5 = 10$

Q 2 $S_n = 10(2\times2+9\times2) = 110$

Q 3 1,3,5,...............) $a_n = 1+(n-1)2 = 2n-1$

Q 4 $1+2+\ldots\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Q 5 $2+4+6+\ldots\ldots+2n = \frac{n}{2}(2+2n) = n(n+1)$

Q 6 $a_n = a+(n-1)d = -5(n+1)$

Q 7 $d = a_2 - a_1 = \frac{1}{9}$

Q 8 $a_1 = 3+7 = 10,\ a_2 = 6+7 = 13,\ d = 3$

Q 9 $(a+7d)-(a+3d) = 4d = 20$

Q 10 $a_6 = a+15d = -40$

Q 11 3, k-2,5 एक सं श्रेढी हैं

$k-2 = \frac{3+5}{2} \Rightarrow k = 6$

Q 12 $p = \frac{7}{5}$ (प्र 11 के जैसे)

Q 13 a [14]

b [18] [8]

c [6½] [8]

d [2] [0] [2] [4]

e [53] [23] [8] [-7]

Q 14 a) C

b) B

c) D

d) C

e) B

f) B

g) C

h) A

$Q\ 15\ \ a \Rightarrow b$

$b \Rightarrow a$

$c \Rightarrow e$

$d \Rightarrow c$

$e \Rightarrow d$

प्र 16 (a) असत्य, $301=5+(n-1)6$ को सरल करने पर $n=\frac{151}{3},$ जो प्राकृतिक संख्या नहीं हैं 301, इस श्रेढी का पद नहीं है)

(b) सत्य, $(a+(m-1)d)-(a+(n-1)d)=(m-n)$

(c) असत्य, $a_2-a_1=3, a_3-a_2=4$

(d) असत्य, $S_n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{20x21}{2}=210$

(e) सत्य, यदि a,b,c,d..............सं श्रेढी है तो ka,kb,kc,kd............भी स श्रेढी होगी।

$Q\ 17\ 144=3+(n-1)4$

$\frac{141}{4}+1=n$ जो संभव नहीं है।

उत्तर नहीं

$Q\ 18\ \ l-(n-1)d$ का प्रयोग करें

उत्तर 158

$Q\ 19$ माना $a_n=130+a_{31}$

हल करें $n=44$

उत्तर 44वां पद

$Q\ 20\ \ a=12, d=6,\ a_n=252 \Rightarrow\ n=41$

ज्ञात करें $S_{41}=5412,\ S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ का प्रयोग करें।

Q 21 $S_{15}=15(2a+14d)$ जहाँ $a=8, d=8$

Ans 960

Q 22 (i) हाँ (ii) नही।

Q 23 $2+4+6+.................+198$

$a=2, d=2, a_n=198 \Rightarrow m=99$

$S_n=\frac{n}{2}(a+l)=9900$

Q 24 $b=\frac{a+c}{2}$

$2m^2+3m+6=\frac{4m+8+3m^2+4m+4}{2}$

हल करने पर $m^2-2m=0 \Rightarrow m=0,2$

Q 25 $s_n=0=\frac{n}{2}(44+(n-1)(-2)=0$

हल करें $n=23$

Q 26 प्रश्नानुसार $10a_{10}=20\ a_{20}$

$\Rightarrow a_{10}=2a_{20}$

$a+9d=2a+38d$

$a=-29d \qquad ....(1)$

$a_{30}=a+29d$ में a रखें (1) से तो $a_{30}=0$

Q 27 $6, 13, 20................216$

$a_n=a+(n-1)$ का प्रयोग करके n ज्ञात करें। माध्यमिक का सूत्र लगाकर मध्य पद =111

Q 28 माना $a_n=-150$

$11+(n-1)(-3)+-150$

हल करें और n का मान ज्ञात करें n प्राकृतिक संख्या नहीं है।

नहीं

Q 29 6 से विभाजित होने वाली दो अंक संख्याए 12,18,24............................96 $a_2-a_1=$ $a_3-a_2=6$ स श्रेढी $a_n \Rightarrow 96 \Rightarrow n=15$

$Q\ 30 \quad \frac{2}{n+3} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+5} \quad (2b=a+c)$

हल करे $n=1$

$Q\ 31\ a_n=a+(n-)d$

$58=-6+(n-1)4$

हल करें $n=17$

माध्यिका के सूत्र द्वारा मध्यपद $=\frac{(n+1)}{2}$ पद=9वां पद

$a_9=-6+8(4)=26$

$Q\ 32\ a_n=5n-1$

सं श्रेढी प्राप्त करें $a_1=4, a_2=9, a_3=14$

$4, 9, 14 \ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_2-a_1=5=a_3-a_2$

$S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)=\frac{n}{2}(8+(n-1)5)$

$S_n=\frac{n}{2}(5n+3)$

$S_{20}=\frac{20}{2}(100+3)=10\times103=1030$

$Q\ 33\ 79=3+(n-1)4$

$n=26$

$S_{26}=\frac{26}{2}(3+79)=13(82)=1066$

$Q\ 34\ a_n<0$

$121+(n-1)(-4)<0$

$121-4n+4<0$

$125<4n$

$n>\frac{125}{2} \Rightarrow n=32$

Ans 32वाँ पद

Q 35 अंत से 20वां पद

$=253-19\times5$ [सूत्र $l-(n-1)d$]

$=158$

Q 36 प्र 27 के जैसे

Ans 121, 127

Q 37 10 और 500 के बीच में 7 से विभाजित होने वाली संख्याएं 14,21,28,........................497

$a_n=a+(n-1)d$ का प्रयोग करके n ज्ञात करें।

$s_n=\frac{n}{2}(2a+(m-1)d)$ का प्रयोग करके

उत्तर $S_n=17885$ ज्ञात करें।

Q 38 $a_5+a_9=72$

$a_7+a_{12}=97$

इन समीकरणों को हल करके a और b ज्ञात करें।

उत्तर *AP 6,11,16,21,26........................*

Q 39 $a_m=\frac{1}{n} \Rightarrow a+(m-1)d=1/n$

$a_n=\frac{1}{m} \Rightarrow a+(n-1)d=1/m$

$(m-n)d=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}=\frac{m-n}{mn}$

$d=\frac{1}{mn}, a=\frac{1}{mn}$ प्राप्त करें।

$a_{mn}=a+(mn-1)d$

उत्तर $a_{mn}=\frac{1}{mn}+(mn-1)\frac{1}{mn}=1$

Q 40 $a_p=q,\ a_q=p$

हल करके $a,\ d$ प्राप्त करें

उत्तर $a_{p+q-n}=0$

Q 41 2 और 5 से विभाजित होने वाली संख्याएँ 10 से विभाजित होने वाली संख्याएँ 101 और 999 के बीच में 2 और 5 से विभाजित होने वाली संख्याएँ 110,120,130,140...............999

$a_n=990$ से $n=89$ प्राप्त करें।

Q 42 प्रश्नानुसार $a_5+a_9=30$

$a_{25}=3a_8$

हल करने पर $a=3, d=2$ स श्रेढी 3,5,7,9............................ ।

Q 43 $S_n=5n^2+3n$

$an=S_n-S_{n-1}=10n-2$ प्राप्त करें

इससे $d=10$ प्राप्त करें।

Q 44 माना $a_n=120+a_{21}$

$3+(n-1)d=120+(3+20d)$

$3+(n-1)12=120+(3+20\times12)$

$=120+343=363$

$(n-1)12=360$

$n-1=30 \Rightarrow n=31$

Q 45 $S_n=3n^2-4n$

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3n^2-4n)-(3(n-1)^2-4(n-1)$

$=(3n^2-4n)-(3n^2+3-6n-4n+4)$

$=-(7-6n)$

$a_n=6n-7$

Q 46 23,21,19......................,5

$a_n=a+(n-1)d$

$5=23+(n-1)(-2)$

$n=10$

Q 47 63, 65, 67........................

$a_n=63+(n-1)(2)=61+2n$

3,10,17............................

$a_n=3+(n-1)7=7n-4$

$61+2n=7n-4$

$65=5n$

$n=13$

Q 48 65^{th} term

Q 49 $S_{14}=1050$

$a=10$

$S_{14}=\frac{14}{2}(2\times 10+13d)$

$\frac{1050}{7}=20+13d$

$\frac{150-20}{13}=d\Rightarrow d=10$

$a_{20}=a+19d=10+190=200$

Q 50 0 और 50 के बीच की विषम संख्याएँ

1,3,5,7................, 49

$a_n=49 \Rightarrow a+(n-1)d=49$

$1+(n-1)2=49 \Rightarrow n=25$

$S_n=\frac{n}{2}(a+l)\Rightarrow S_{25}=\frac{25}{2}(1+49)$

$S_n=625$

Q 51 $S_n=4n-n^2$

$s_1=a_1=4-1=3$

$s_2=a_1+a_2\Rightarrow a_2=1$

$s_3=a_1+a_2+a_3\Rightarrow a_3=-1$

AP 3,1,–1, ...

Q 52 $n=12,\ n\neq\frac{-53}{4}$ (NCERT)

Q 53 $a_3+a_7=6$

$a_3\times a_7=8$

सरल करने पर

$a=1,\ d=1/2, S_n=76$

$a=5,\ d=-1/2,\ S_n=20$

उत्तर 76, 20

Q 54 प्रश्नानुसार

$a_4=18 \quad ...(1) \qquad a_{15}-a_9=30 \quad ...(2)$

(2) से $d=5$ ज्ञात करें

$d=5$, *(1)* में रखने पर $a=3$ प्राप्त करें

AP 3,8,13,....................

Q 55 प्रश्नानुसार $s_9=162$

$\frac{9}{2}(2a+8d)=162 \qquad ...(1)$

प्रश्नानुसार $\frac{a_6}{a_{13}}=\frac{1}{2}$

सरल करने पर $a=2d$

$a=2d$ *...(1)* में रखने पर $d=3$, $a=6$

$a_{15}=a+14d$

$a_{15}=48$

Q 56 $a_{10}=21$

$S_{10}=120$

सरल करके a और d प्राप्त करें

$a_n=2n+1$ प्राप्त करें।

Q 57 प्रश्नानुसार $S_7=63 \qquad ...(1)$

अगले सात पदों का योग $=S_{14}-S_7=161$

$S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$ का प्रयोग करें, (1) और (2)

को हल करके a और d प्राप्त करें।

उत्तर $a_{28}=57$ $(a_n=a+(n-1)d)$

Q 58 प्रश्नानुसार $S_{20}=1(S_{40}-S_{20})$, $a=1$

$S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$ और $a=1$ का

प्रयोग करके d ज्ञात करें।

Ans $S_{30}=900$

Q 59 $S_4=40 \Rightarrow \frac{4}{2}(2a+3d)=40$

$S_{14}=280 \Rightarrow \frac{14}{2}(2a+13d)=280$

सरल करने पर $a=7,\ d=2$

Q 60 $a=100,\ d=20, n=12$

$S_{12}=\frac{12}{2}(200+220) = 6\times420$

$S_{12}=2520 > 2500$

$\therefore$ रामकली अपने बेटी को स्कूल भेज पाएगी।

Q 61 $S_{10}=210$

$\Rightarrow 5(2a+9d)=210$

$\Rightarrow 2a+9d=42$ ....(1)

$S_{50}-S_{35}=2565$

$\frac{50}{2}(2a+49d)-\frac{35}{2}(2a+34d)+2565$

$15(2a)+d(25\times49-35\times17)=2565$

$15a+630d=2565$

अथवा $3a+126d=513$ ....(2)

(1) और (2) को सरल करने पर

$d=4, a=3$

Q 62 $S_n=3n^2+5n$

$S_1=a_1 = 8$

$S_2=a_1+a_2 \Rightarrow 26=8+a_2$

$a_2=18$

$d=18-8=10$

$a_m=168$

$\Rightarrow a+(m-1)d=168$

$8+(m-1)10=168$

$m=17$

$a_{20}=a+19d=8+190=198$

$Q\ 63\ S_7=49,\ S_{17}=289$

(प्र 53 के जैसे सरल करें)

$Q\ 64\quad a_4 = 0 \Rightarrow a+3d=0 \Rightarrow a=-3d$

$a_{25}=a+24d=-3d+24d=21d$

$a_{11}=a+10d=-3d + 10d=7d$

$\Rightarrow a_{25}=3a_{11}$

$Q\ 65\ S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$ का प्रयोग करें

(प्र 53 के जैसे उत्तर निकाले)

$Q\ 66\quad LHS = S_{12}=\frac{12}{2}(2a+11d)=6(2a+11d)$

$RHS = 3[\frac{8}{2}(2a + 7d) - \frac{4}{2}(2a + 3d)]$

$=3(4a+22d)$

$=3\times2(2a+11d)$

$=6(2a+11d)$

$\therefore LHS=RHS$

अभ्यास प्रश्न–प्रत्र

समांतर श्रेढ़ियाँ

समय 1 घंटा **अंक : 20**

खण्ड अ (1 अंक)

प्र. 1 प्रथम 10 प्राकृतिक संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए **1**

प्र. 2 सं श्रेढी $8\frac{1}{8}$, $8\frac{2}{8}$, $8\frac{3}{8}$, ... का सार्व अंतर बताइए। **1**

प्र. 3 यदि k, $2k-1$ तथा $2k+1$ स श्रेढी बनाऐ तो k का.....................होगा। **1**

प्र. 4 स श्रेढी 8,10,12, ...,126 का अंत से 10वां पद.........................होगा। **1**

खण्ड ब (2 अंक)

प्र. 5 संख्या 6 और 102 के बीच में कितनी दों अंकों वाली संख्याएं 6 से विभाजित होंगी? **2**

प्र. 6 यदि किसी स. श्रेढी में n पदों का योग n^2+3n हो तो इसका 20वां पद ज्ञात कीजिए। **2**

प्र. 7 $(-5)+(-8)+(-11)+$..............................$+(-230)$ का योग ज्ञात कीजिए। (NCERT) **2**

खण्ड स (2 अंक)

प्र. 8 एक स. श्रेढी ज्ञात कीजिए जिसके प्रथम 5 पदों का योग $12\frac{1}{2}$ है और प्रथम व अंतिम पदों का अनुपात 2:3 हो। **3**

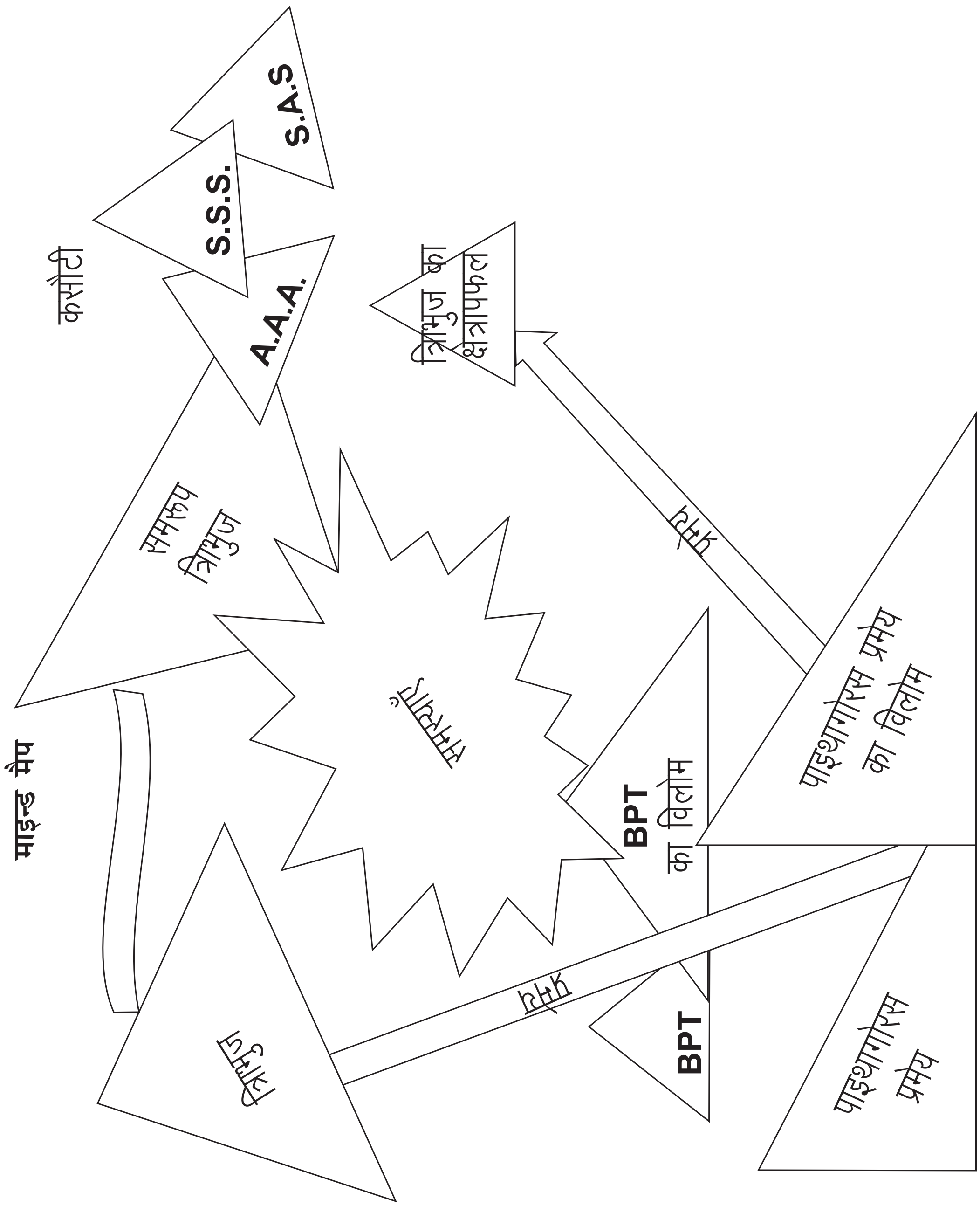
प्र. 9 एक स. श्रेढी 20, 16, 12, ..., 176 का मध्य पद ज्ञात कीजिए। **3**

खण्ड द

प्र. 10 किसी स श्रेढी के तीन पदों का योग 24 है और इन पदों का गुणनफल 440 है, तो यह पद ज्ञात कीजिए। **4**

6
अध्याय

त्रिभुज


माइन्ड मैप
कसौटी
S.A.S
S.S.S.
A.A.A.
समरूप त्रिभुज
त्रिभुज का क्षेत्रफल
समरूपता
प्रमेय
पाइथागोरस प्रमेय का विलोम
BPT का विलोम
BPT
पाइथागोरस प्रमेय
त्रिभुज

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. दो त्रिभुज समरूप कहलाते हैं यदि उनके संगत कोण बराबर हों और उनकी संगत भुजाएं समानुपाती हों।

2. समरूप त्रिभुज के गुणधर्म :

ΔABC तथा ΔDEF

(*i*) **कोण–कोण–कोण समरूपता :** $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ यदि $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ तथा $\angle C = \angle F$

(*ii*) **भुजा–कोण–भुजा समरूपता :**

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ यदि $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ तथा $\angle B = \angle E$

(iii) **भुजा–भुजा–भुजा समरूपता :** $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ यदि $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

3. निम्न प्रमेयों का हल परीक्षा में पूछा जा सकता है।

(i) **आधारभूत आनुपातिकता** : एक त्रिभुज की एक भुजा के समांतर खींची गई रेखा अन्य दो भुजाओं को जिन दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है वे बिन्दु भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करते हैं।

(*ii*) दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात किन्हीं दो संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

(*iii*) **पाइथागोरस प्रमेय** : एक समकोण त्रिभुज के कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

(*iv*) **पाइथागोरस प्रमेय का विलोम** : यदि किसी त्रिभुज की भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

अति लघुत्तरात्मक प्रश्न

1. रिक्त स्थान भरिए:

(i) सभी समबाहु त्रिभुज...............................होते है।

(ii) यदि ABC~FED तो $\frac{AB}{} = \frac{}{ED}$

(iii) बराबर त्रिज्याओं की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को भिन्न–भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो ये अन्य दो भुजाएँ...................अनुपात में विभाजित हो जाती है।

(iv) एक................त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

2. सत्य या असत्य बताइए:

(i) सभी समरूप आकृतियाँ हमेशा सर्वागसम होते हैं।

(ii) आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय, पाइथागोरस ने दिया था।

(iii) मध्यबिंदु प्रमेय को आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा सिद्ध किया जा सकता है।

(iv) पाइथागोरस प्रमेय, समकोण त्रिभुज में मान्य है।

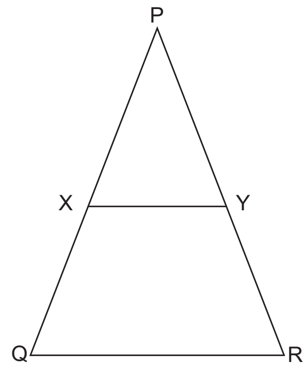
(v) यदि दो समरूप त्रिभुजों की भुजाओं का अनुपात 4:9 है, तो इन त्रिभुजों के क्षेत्रफल की अनुपात 16 : 81 है।

3. मिलान कीजिए:

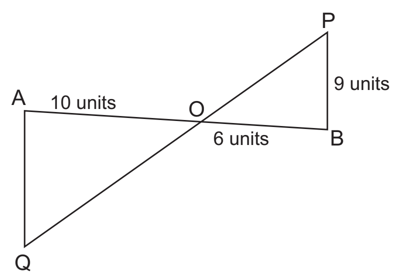
कॉलम 1	कॉलम 2
(a) यदि दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर हों तो दोनों त्रिभुज समरूप होते है।	(I) SAS समरूपता कसौटी
(b) यदि दो त्रिभुजों में संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में हो, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते है।	(ii) ASA समरूपता कसौटी
(c) यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों को अंतर्गत करने वाली भुजाएँ एक ही अनुपात में हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते है।	(iii) AAA समरूपता कसौटी
	(iv) SSS समरूपता कसौटी

बहु विकल्पीय प्रश्न

4. निम्न आकृति में XY II QR और $\frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR} = \frac{1}{2}$ है, तो



A) XY = QR　　B) XY= $\frac{1}{3}$ OR　　C) $XY^2=QR^2$　　(D) XY=$\frac{1}{2}$QR



A) 15 मात्रक　　B) 8 मात्रक　　C) 5 मात्रक　　(D) 9 मात्रक

6. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात बराबर है।

A) उनके संगत भुजाओं के अनुपात के

B) उनके संगत शीर्षलम्बों के अनुपात के

C) उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के

D) उनकी परिमापों के अनुपात के

7. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल 144 वर्ग सेमी और 81 वर्ग सेमी है। यदि पहले त्रिभुज की एक माध्यिका 16 सेमी है, तो दूसरे त्रिभुज की संगत माध्यिका की लम्बाई है

A) 9 सेमी　　B) 27 सेमी　　C) 12 सेमी　　(D) 16 सेमी

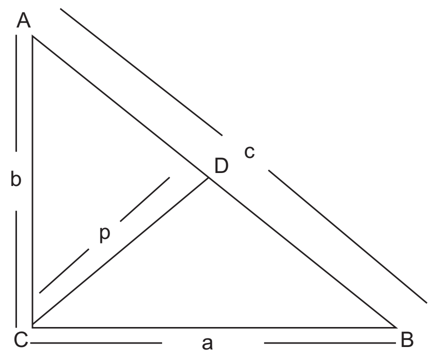
8. एक समकोण त्रिभुज ABC मे, जिसमें <C=90° और CD AB है। यदि BC=a,CA= b,AB=Cऔर है, तो

A) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

B) $\frac{1}{p^2} \# \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

C) $\frac{1}{p^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

D) $\frac{1}{p^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$



9. यदि ABC~DEF,ar(DEF)=100 वर्ग सेमी और $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{2}$ है, तो ar(ABC) है

A) 50 वर्ग सेमी B) 25 वर्ग सेमी C) 4 वर्ग सेमी (D) 200 वर्ग सेमी

10. यदि एक त्रिभुज के तीन भुजाएँ a 3 a 2 a है, तो सबसे बडी भुजा के सम्मुख कोण का माप है।

A) 45^0 B) 30^0 C) 60^0 (D) 90^0

11. लंबाई 3 मी. वाले एक उर्ध्वाधर स्तंभ की छाया की लंबाई 7 मी. है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 28 मी. है। मीनार की उँचाई है।

A) 10 मी. B) 12 मी. C) 14 मी. (D) 16 मी.

12. एक समचतुर्भुज के विकणों की लंबाइयाँ 16 सेमी और 12 सेमी हैं, तो इस समचतुर्भुज की भुजा की लंबाई है

A) 9 सेमी B) 10 सेमी C) 8 सेमी (D) 20 सेमी

13. यदि ABC~EDF और ABC,DEFके समरूप नहीं है, निम्नलिखित में से कौन सत्य नहीं है?

A) BC. EF = AC.FD B) AB. EF = AC.DE C) BC. DE = AB.EF (D) BC. DE = AB.FD

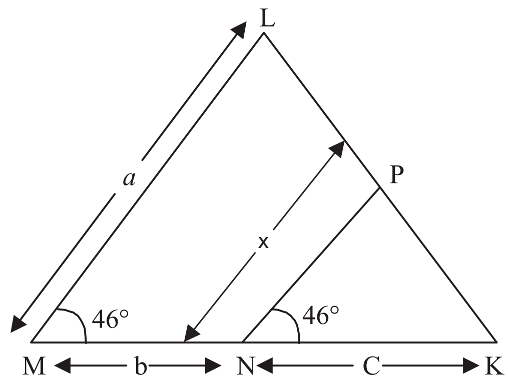
14. पाइथागोरस प्रमेय का कथन लिखिए।

15. आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय का कथन लिखिए।

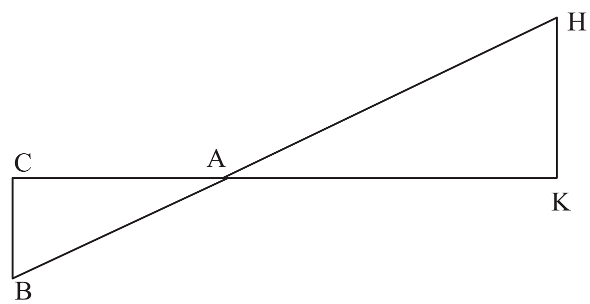
16 क्या त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 12 सेमी., 16 सेमी तथा 18 सेमी. एक समकोण त्रिभुज है?

17 यदि $\Delta ABC \sim \Delta QRP$, $\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \frac{9}{4}$, AB = 18 सेमी, BC = 15 सेमी है, तो PR ज्ञात कीजिए।

18 दी गई आकृति में $\angle M = \angle N = 46°$, है, x को a, b तथा c के रूप में व्यक्त कीजिए।



19 दी गई आकृति में, $\Delta AHK \sim \Delta ABC$.है, यदि AK = 10 सेमी BC = 3.5 सेमी, तथा HK = 7 सेमी हो तो AC ज्ञात कीजिए।



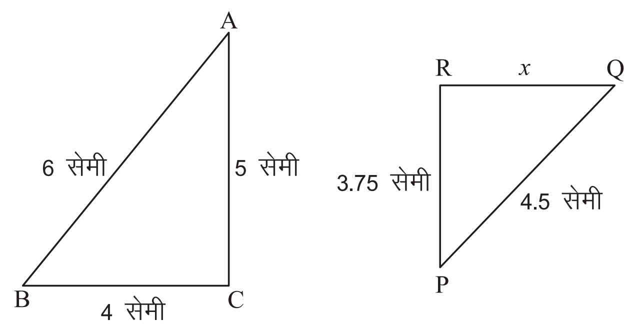
20 यदि $\Delta DEF \sim \Delta RPQ$ है, तो क्या यह कहना सत्य होगा कि $\angle D = \angle R$ और $\angle F = \angle P$ है?

21 यदि दो समरूप त्रिभुजों के संगत माध्यिकों का अनुपात 5 : 7 हो तो इनकी भुजाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

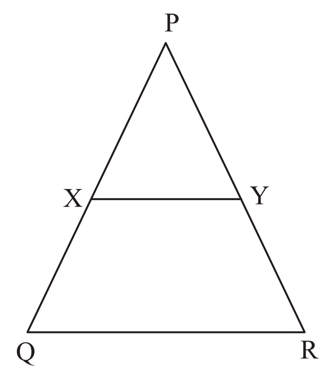
22 एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 2100 km/hr की चाल से उड़ता है। इसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से दक्षिण की ओर 2000 km/hr की चाल से उड़ता है। 1 घंटे बाद दोनों हवाई जहाजों के बीच की दूरी कितनी होगी?

23 दो समरूप त्रिभुजों ΔABC तथा DEF का क्षेत्रफल क्रमशः वर्ग सेमी ^{2} तथा 81 वर्ग सेमी ^{2} है। यदि बड़े त्रिभुज ΔABC की सबसे बड़ी भुजा 30 वर्ग सेमी हो तो छोटे त्रिभुज ΔDEF की सबसे बड़ी भुजा ज्ञात कीजिए।

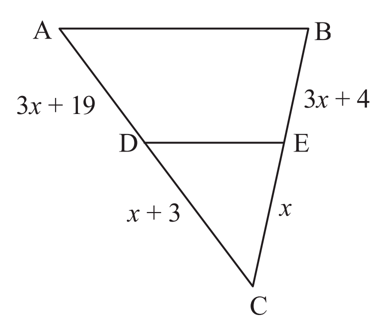
24 दिए गई आकृति में, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, है तो x का मान ज्ञात कीजिए।



25 दिए गई आकृति में, XY || QR तथा $\frac{PX}{XQ}=\frac{PY}{YR}=\frac{1}{2}$ है, तो XY : QR ज्ञात कीजिए।



26 दिए गई आकृति में, यदि DE || AB है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



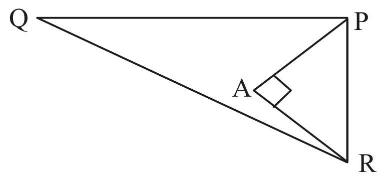
27 यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, BC = 3EF तथा ar (ΔABC) = 117 वर्ग सेमी ^{2} तो ar(ΔDEF) ज्ञात कीजिए।

28 यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ हो और $\angle A = 45°$, $\angle F = 56°$ हो तो $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

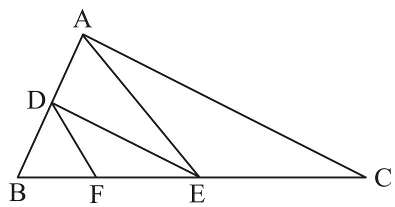
29 यदि दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात 2 : 3 हो, तो उनके संगत ऊँचाईयों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

लघुत्तरात्मक प्रश्न–1

30 दिए गई आकृति में, PQ = 24 सेमी, QR = 26 सेमी, $\angle PAR = 90°$, PA = 6 सेमी, तथा AR = 8 सेमी, तो $\angle QPR$ ज्ञात कीजिए।

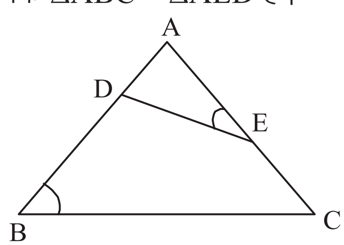


31 दिए गई आकृति में, DE || AC तथा DF || AE है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{FE}{BF} = \frac{EC}{BE}$ है।

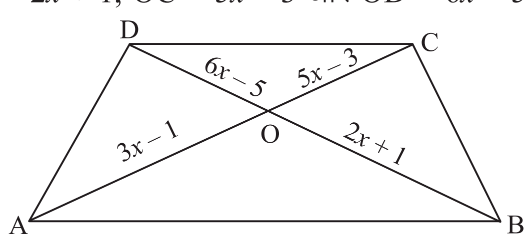


32 त्रिभुज ABC में, $AD \perp BC$ इसी प्रकार है कि $AD^2 = BD \times CD$ है। सिद्ध कीजिए ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

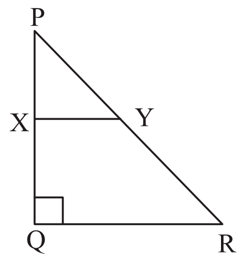
33 दिए गई आकृति में, D तथा E, भुजाओं AB तथा CA पर दो बिंदु इस प्रकार हैं कि $\angle B = \angle AED$ है। सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABC \sim \Delta AED$ हैं।



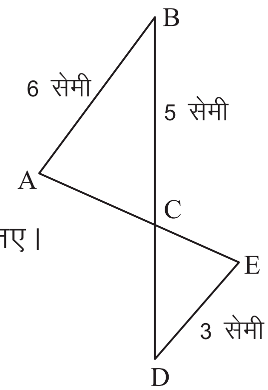
34 दिए गई आकृति में, AB || DC तथा विकर्ण AC और BD, बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि OA = $3x - 1$, OB = $2x + 1$, OC = $5x - 3$ और OD = $6x - 5$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



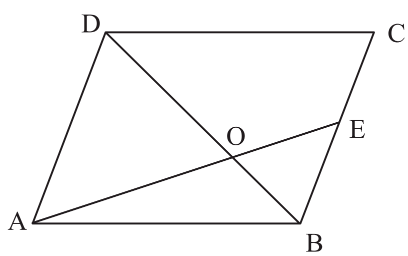
35 दिए गई आकृति में, त्रिभुज PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसमें LQ = 90° है। यदि XY || QR, PQ = 6, सेमी PY = 4 सेमी तथा PX : XQ = 1 : 2 है तो PR और QR की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



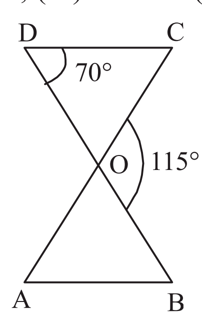
36 दिए गई आकृति में, AB || DE. है। CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



37 दिए गई आकृति में, AB CD समांतर चतुर्भुज है। AE रेखा खण्ड BD को 1 : 2. में विभाजित करता है। यदि BE = 1.5cm हो, तो BC ज्ञात कीजिए।



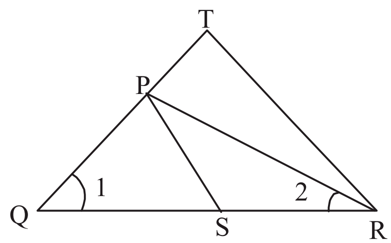
38 दिए गई आकृति में, $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 115°$ तथा $\angle CDO = 70°$ हो तो ज्ञात कीजिए (i) $\angle DOC$, (ii) $\angle DCO$, (iii) $\angle OAB$ (iv) $\angle OBA$.



39 यदि दो समबाहु त्रिभुजों ΔABC तथा ΔPQR का परिमाप क्रमशः 144 मी और 96 मी हो, तो $ar(\Delta ABC) : ar(\Delta PQR)$ ज्ञात कीजिए।

लघुत्तरात्मक प्रश्न–II

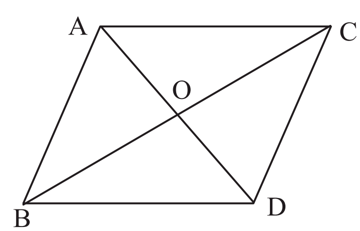
40 दिए गई आकृति में, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ है।



41 एक समबाहु ΔABC में $AD \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए $3BC^2 = 4AD^2$ है।

42 त्रिभुज ABC में, $\angle ACB = 90°$ तथा $CD \perp AB$ हो तो सिद्ध कीजिए: $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$. है।

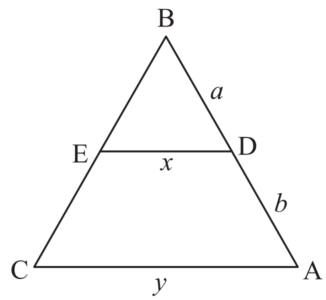
43 निम्न आकृति में, ΔABC और ΔDBC एक ही आधार पर BC पर है। AD और BC एक दूसरे को O पर काटते है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{\textit{क्षेत्रफल}\ (\Delta ABC)}{\textit{क्षेत्रफल}\ (\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO}$ है।



44 यदि AD और PS क्रमश त्रिभुज ABC तथा त्रिभुज PQR की माध्यिकाएँ हैं, जहाँ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ हो, तो सिद्ध कीजिए $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PS}$. है।

45 दिए गई आकृति में, $DE \parallel AC$ है, निम्न में से कौन सा कथन सत्य है?

$x = \frac{a+b}{ay}$ या $x = \frac{ay}{a+y}$

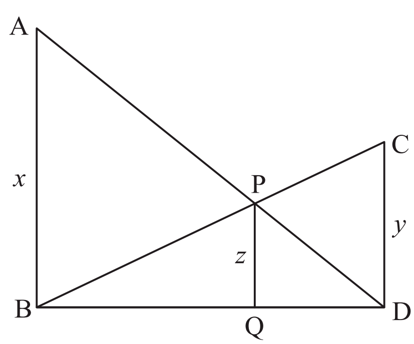


46 सिद्ध कीजिए कि एक सम चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

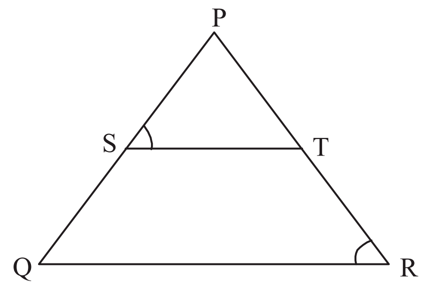
47 एक बिजली के खम्बे पर 6 मी. की ऊँचाई पर एक बल्ब लगाया गया है। अगर 1.5 मी. लम्बी महिला की परछाई 3 मी. हो, तो खम्बे से महिला की दूरी ज्ञात कीजिए।

48 दो खम्बे जिनकी ऊँचाईयाँ क्रमशः a मीटर तथा b मीटर तथा हैं, आपस में p मीटर की दूरी पर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि इन खम्बों के शीर्षों को इनके सम्मुख खम्बों के पादों को दिए गई आकृति में, मिलाने वाली रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु की ऊँचाई $\frac{ab}{a+b}$ मीटर है।

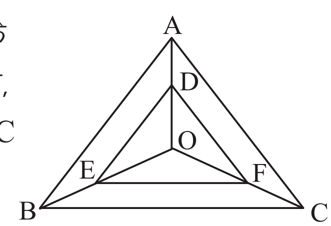
49 दिए गई आकृति में, $AB \parallel PQ \parallel CD$, $AB = x$ $CD = y$ तथा $PQ = z$ है, तो सिद्ध कीजिए, कि $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ है।



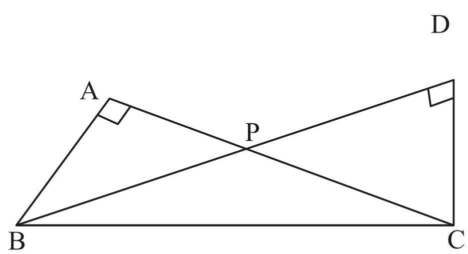
50 दिए गई आकृति में, $\frac{PS}{SQ}=\frac{PT}{TR}$ तथा $\angle PST = <LPQ$ है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज PQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



51 आकृति में, ΔABC के एक आंतरिक बिंदु O को त्रिभुज के शीर्षों से मिलाया गया है। बिंदु D जो AO पर स्थित है, से DE || AB तथा बिंदु E जो OB पर स्थित है, से EF || BC खींची गई है। सिद्ध कीजिए कि DF || AC है।



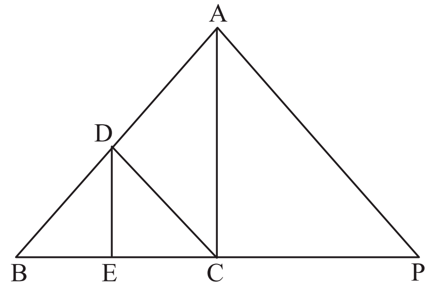
52 समकोण त्रिभुज BAC और BDC क्रमशः A और D पर समकोण बनाती है तथा उभयनिष्ठ भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं। यदि भुजाएँ AC और BD एक दूसरे को P पर काटती हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $AP \times PC = DP \times PB$ है।



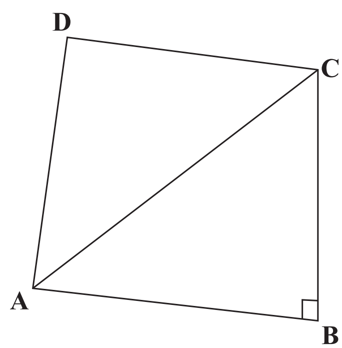
53 एक समकोण त्रिभुज में कर्ण की लम्बाई 25 सेमी है और बाकी दो भुजाओं में से एक भुजा दूसरी भुजा से 5 सेमी लम्बी है, तो बाकी दोनों भुजाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

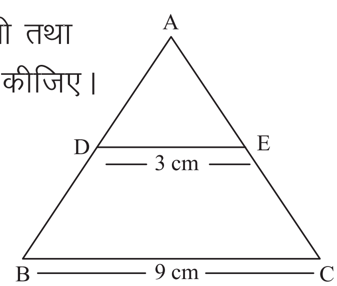
54 दिए गई आकृति में, DE ∥ AC तथा $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{CP}$ हों, तो सिद्ध कीजिए कि DC ∥ AP. है।



55 चतुर्भुज AB CD में $\angle B = 90°$, $AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\angle ACD = 90°$ है।



56 दिए गई आकृति में, DE ∥ BC, DE = 3 सेमी, BC = 9 सेमी तथा ar(ΔADE) = 30 वर्ग सेमी ^{2} ar(BCED) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

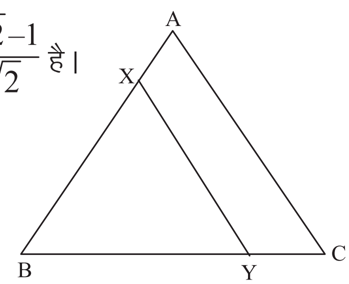


57 एक समबाहु त्रिभुज ABC में, D भुजा BC का समत्रिभाजन बिन्दु है, तो सिद्ध कीजिए कि $9PS^2 = 7PQ^2$. है।

58 त्रिभुज ΔPQR में, $PD \perp QR$, D भुजा QR पर स्थित है। यदि $PQ = a$, $PR = b$, $QD = c$ तथा $DR = d$ और a, b, c, d धनात्मक इकाई हों। सिद्ध कीजिए कि $(a + b)(a - b) = (c + d)(c - d)$. है।

59 सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

60 दिए गई आकृति में, $XY \parallel AC$ इस प्रकार है कि XY त्रिभुज ABC को दो बराबर क्षेत्रफलों में बाँटता है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{AX}{AB}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ है।



61 ABCD एक समांतर चतुर्भुज में शीर्ष D से एक रेखा इस प्रकार खीचीं गई है कि वह रेखा भुजा BA तथा BC को E तथा F पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि

$\frac{DA}{AE}=\frac{FB}{BE}=\frac{FC}{CD}$. है।

62 सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

63 सिद्ध कीजिए कि एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है। (CBSE 2018, 2019)

64 यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं की भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो सिद्ध कीजिए कि ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती है। (CBSE 2019)

उत्तर और संकेत

(i) समरूप

(ii) $\frac{AB}{FE} = \frac{BC}{ED}$

(iii) सवर्गिसम

(iv) एक ही

(v) समकोण

2 (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य

(iv) सत्य (v) सत्य

3 (a) (iii) AAA समरूपता कसौटी

(b) (iv) SSS समरूपता कसौटी

(c) (i) SAS समरूपता कसौटी

4 (B) $xy = \frac{1}{3}$ QR

5 (A) 15 मात्रक

6 (C) उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के

7 (C) 12 सेमी

8 (A) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

9 (b) 25 वर्ग सेमी

10 (D) 90^0

11 (B) 12 मी.

12 (B) 10 सेमी

13 (C) BC.DE=AB.EF

16 नहीं, क्योंकि $(12)^2+(16)^2 \# (18)^2$ है।

17 10 सेमी

18 $\Delta KPN \sim \Delta KLM$

$$\frac{x}{a} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow x = \frac{ac}{b+c}$$

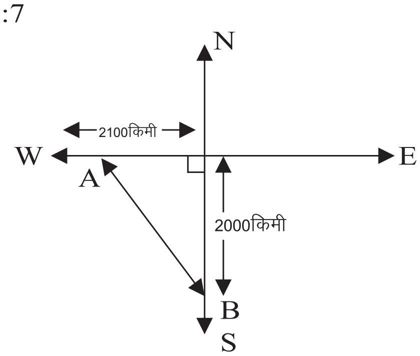
19 $\frac{AK}{AC} = \frac{HK}{BC} \Rightarrow \frac{10}{AC} = \frac{7}{3.5} \Rightarrow AC=5$ सेमी

20 $\angle D = \angle R$ (सत्य)

$\angle F = \angle P$ (असत्य)

21 5:7

22



$AB = \sqrt{(2100)^2+(2000)^2}$

$=2900$ किमी

23 माना ΔDEF की सबसे बड़ी भुजा x सेमी है

$$\frac{225}{81} = \left(\frac{30^2}{x}\right)$$

$x= 18$ सेमी

24 $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{6}{4.5} = \frac{4}{x}$ x=3 सेमी

25 $\Delta PXY \sim \Delta PQR$

$$\frac{PX}{PQ} = \frac{XY}{QR} = \frac{1}{3}$$

$\therefore XY : QR = 1:3$

26 $\frac{x+3}{3x+19} = \frac{x}{3n+4} =$ (:BPT)

x=2

27 $\frac{ar\ (ABC)}{ar\ (DEF)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{3EF}{EF}\right)^2 = \left(\frac{3}{1}\right)^2$

$\frac{117}{ar\ (DEF)} = 9 \Rightarrow ar\ (DEF) = 13$ वर्ग सेमी

28 $\angle F=\angle C=56^o$

29 2:3

30 $PR=\sqrt{(6)^2+(8)^2}=10$ सेमी

$QR^2=PQ^2+PQ^2$, अतः $\angle QPR=90°$ है।

31 DE ||AC, $\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{BE}$ - (1) (:BPT)

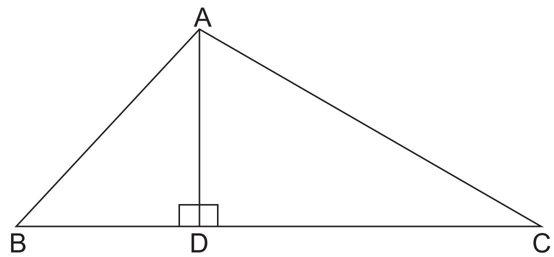
DF||AE, $\frac{AD}{DB} = \frac{FE}{BF}$ - (2) (:BPT

(1) और (2) से, $\frac{FE}{BF} = \frac{EC}{BE}$

32 Δ ADC में, $AD^2=AC^2-DC^2$ ...(1)

Δ ADB में, $AD^2=AB^2-BD^2$ ...(2)

(1) और (2) से, जोड़ने पर



$2AD^2=AC^2+AB^2-BD^2-DC^2$

$2AD^2+BD^2+DC^2=AC^2+AB^2$

$2BD^2\times CD^2+BD^2+DC^2=AC^2+AB^2$

$(BD+DC)^2=AC^2+AB^2$

$BC^2=AC^2+AB^2$

पाइथागोरस विलोमानुसार, ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

33 $\angle B=\angle AED$ (दिया है)

$\angle A=\angle A$ (उभयनिष्ठ)

$\Delta ABC \sim \Delta AED$ (AA समरूपता कसौंटी)

34 $\frac{3x-1}{5x-3} = \frac{2x+1}{6x-5} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ or 2

परन्तु $x= \frac{1}{2}$ पर (5n-3) का एक ऋणात्मक मान आता है, जोकि अंसभव है।

अतः x का अभीष्ट मान 2 हैं।

35 $\frac{PX}{XQ} = \frac{P4}{YR} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{YR} \Rightarrow YR=8$ सेमी

$\therefore$ PR=8+4=12 सेमी

$QR=\sqrt{(12)^2-(6)^2}=6\sqrt{3}$ सेमी

36 $\Delta ABC \sim \Delta EDC$ (AA समरूपता कसौटी)

$\frac{6}{3} = \frac{5}{CD}$

CD=2.5 सेमी

37 $\Delta BOE \sim \Delta DOA$ (AA समरूपता कसौटी)

$\frac{BO}{DO} = \frac{BE}{DA}$

$\frac{1}{2} = \frac{1.5}{DA}$

DA= 3 सेमी

BC=DA=3 सेमी (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

38 (I) 65^0

(ii) 45^0

(iii) 45^0

(iv) 70^0

39 $\frac{ar(ABC)}{ar\,(PQR)} = \left(\frac{144}{96}\right)^2 = \frac{9}{4}$

ar(Δ ABC) : ar (ΔPQR)=9:4

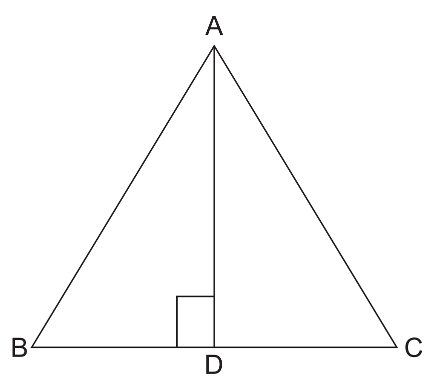
ΔPQR में, : $\angle 1 = \angle 2$

PR=PQ (समान कोणों के सम्मुख भुजाएँ)

$\therefore \frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PQ}$

और $\angle 1 = \angle 1$ (उभयनिष्ठ)

$\Delta PQS \sim \Delta TQR$ (SAS समरूपता कसौटी)



41 $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

BD=DC

$\therefore BD = \frac{1}{2} BC$ ...(1)

समकोण त्रिभुज ΔADB में

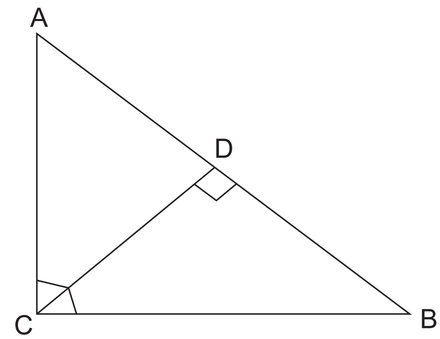
$AB^2=AD^2+BD^2$

$BC^2=AD^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2$ ($\because$ AB=BC=CA और (1) के द्वारा)

$3BC^2=4AD^2$

42 $\Delta ABC \sim \Delta CBD$

$\therefore$ $BC^2 = AB.BD$ ...(1)



$\Delta ABC \sim \Delta ACD$

$\therefore$ $AC^2 = AB.BD$ ...(2)

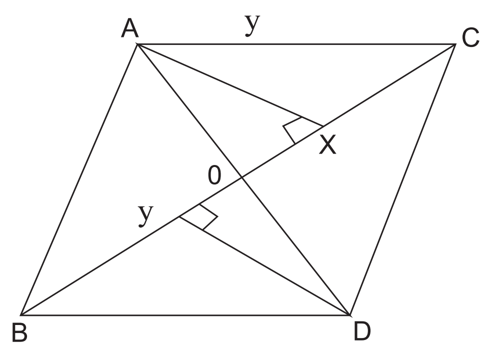
1 को 2 से भाग करने पर,

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$$

43 $AX \perp BC$ और $DY \perp BC$ खीचिए।

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DBC)} = \frac{\frac{1}{2}\times BC \times AX}{\frac{1}{2}\times BC \times DY} = \frac{AX}{DY} \quad ...(1)$$

$\Delta AXO \sim \Delta\ DYO$ (AA समरूपता कसौंटी)

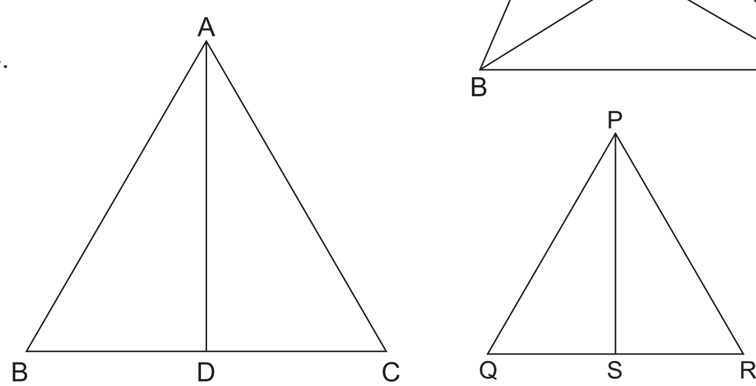


$$\frac{AX}{DY} = \frac{AO}{DO} \text{ - (2) (CPS.T.)}$$

(1) और (2) से,

$$\frac{ar(ABC)}{ar(DBC)} = \frac{AO}{DO}$$

44.



$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (दिया है)

अतः $\angle B = \angle Q$ और $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR} = \frac{BD}{QS}$

ΔABD और $\Delta\ PQS$ में,

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QS}$ और $\angle B = \angle Q$

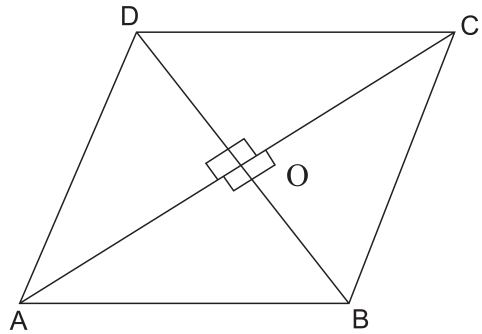
$\Delta ABD \sim \Delta PQS$ (SAS समरूपता कसौंटी)

अतः $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PS}$ (C.P.S.T)

45 $\Delta BED \sim \Delta BCA$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{a+b}$$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{ay}{a+b}$



46 समकोण त्रिभुज ΔAOB में, $AB^2=OA^2+OB^2$ (1)

समकोण त्रिभुज ΔBOC में, $BC^2=OB^2+OC^2$ (2)

समकोण त्रिभुज ΔCOD में, $CD^2=OC^2+OD^2$ (3)

समकोण त्रिभुज ΔDOA में, $DA^2=OD^2+OA^2$ (4)

(1), (2), (3) और (4) को जोडने पर,

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2OA^2+2OB^2+2OC^2+2OD^2$$

$$=2\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+2\left(\frac{1}{2}BD\right)^2+2\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+2\left(\frac{1}{2}BD\right)^2$$

[∵ समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बक्त समद्विभाजित होते हैं।]

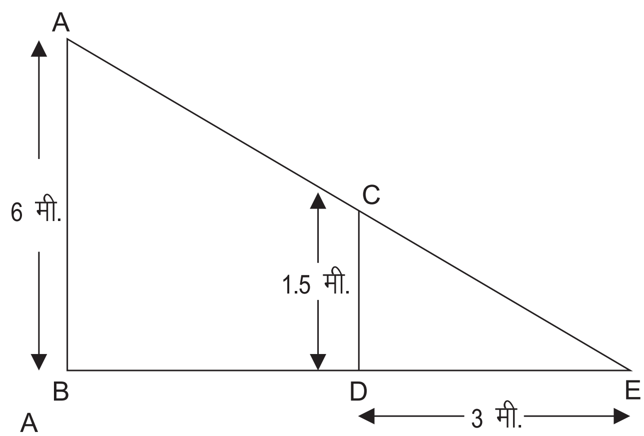
$$= AC^2+BD^2$$

47 $\Delta ABE \sim \Delta CDE$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE}$$

$$\frac{6}{1.5} = \frac{3+BD}{3}$$

BD= 9 मी.



48 सिद्व करना है: $EF=\dfrac{ab}{a+b}$

उत्पतिः $AB||EF||DC$

$\Delta EFC \sim \Delta ABC$

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FC}{BC} \quad ...(1)$$

$\Delta BFE \sim \Delta BCD$

$$\frac{EF}{CD} = \frac{BF}{BC} \quad ...(2)$$

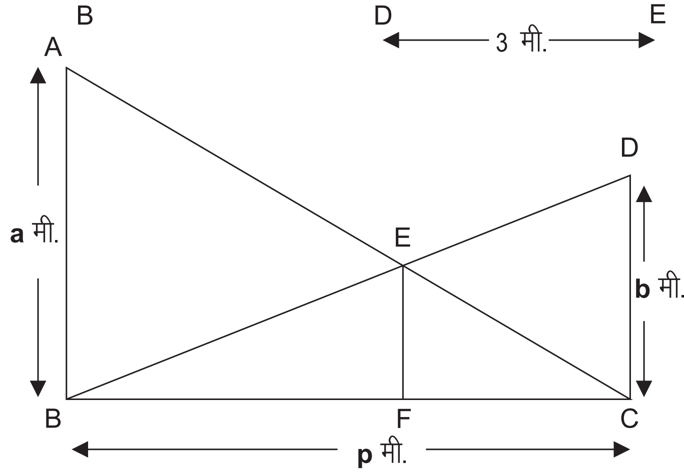
(1) और (2) को जोड़ने पर,

$$\frac{EF}{AB} + \frac{EF}{CD} = \frac{FC+BF}{BC}$$

$$EF\left[\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}\right] = \frac{BC}{BC}$$

$$EF\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right] = 1$$

$$EF = \frac{ab}{a+b}$$



49 प्र. 48 की तरह हल करना है।

50 $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

$\therefore$ BPT के विलोमानुसार, ST||QR है।

$\angle PQR = \angle PST$ (एकांतर अतं कोण)

परंतु $\angle PST = \angle PRQ$

अतः $\angle PQR = \angle PRQ$

: PQ=PR

अतः $\angle PQR$, एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

51 Δ OAB में, $\frac{OD}{DA} = \frac{OE}{EB}$ - (1) ($\because$ BPT)

Δ OBC में, $\frac{OE}{EB} = \frac{OF}{FC}$ - (2) ($\because$ BPT)

(1) और (2) से,

$$\frac{OD}{DA} = \frac{OF}{FC}$$

BPT के विलोमानुसार, DF||AC हैं

52 Δ APB~Δ DPC (AA समरूपता कसौंटी)

$\frac{AP}{DP} = \frac{PB}{PC}$ ($\because$ C.P.S.T.)

AP.PC=DP. PB.

53 माना समकोण त्रिभुज की कर्ण के अलावा अन्य भुजाएँ x सेमी और (x+5) सेमी है

पाइथागोरस प्रमेयानुसार

$(x)^2+(x+5)^2=(25)^2$

$x = 15$ *or* -20

परन्तु भुजा का मान हमेशा धनात्मक होता है। अतः $x = 15$ है। $\therefore$ दो भुजाओं की लम्बाई 15 सेमी तथा 20 सेमी है।

54 प्र. 31 की तरह हल करना है।

55 समकोण Δ ABC में, $AC^2=AB^2+BC^2$ ...(1)

दिया है, $AD^2=(AB^2+BC^2)+CD^2$

$\Rightarrow AD^2=AC^2+CD^2$ [(1) से]

पाइथागोरस प्रमेय के विलोमानुसार, $\angle ACD=90^0$ है।

56 $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

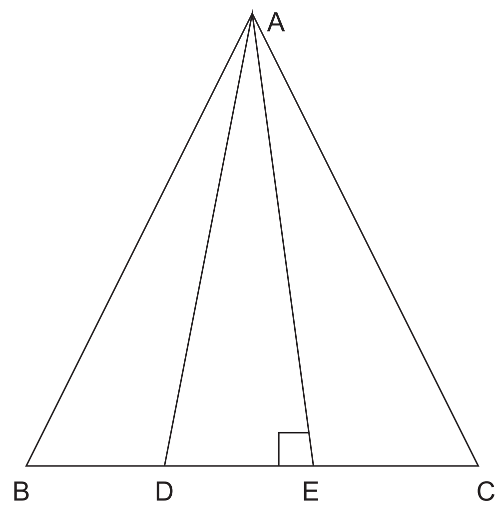
$$\frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta ABC)} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2$$

$$\frac{30}{ar(\Delta ABC)} = \left(\frac{3}{9}\right)^2$$

$\therefore$ $ar(\Delta ABC) = 270$ वर्ग सेमी

$ar(BCED) = ar(\Delta ABC) - ar(\Delta ADE)$

$= 270-30=240$ वर्ग सेमी



57 $AE \perp BC$ खीचिए।

$\Delta ABE \cong \Delta ACE$

$\therefore BE=CE \Rightarrow BE=\frac{1}{2} BC$

समकोण ΔAED में, $AE^2=AD^2-DE^2$ ...(1)

समकोण ΔAEB में, $AE^2=AB^2-BE^2$ ...(2)

(1) और (2) से,

$AD^2-DE^2=AB^2-BE^2$

$AD^2-(BE-BD)^2=BC^2-\left(\frac{1}{2}BC\right)^2$

$AD^2-(\frac{1}{2}BC-\frac{1}{3}BC)^2 = BC^2-\frac{BC^2}{4}$

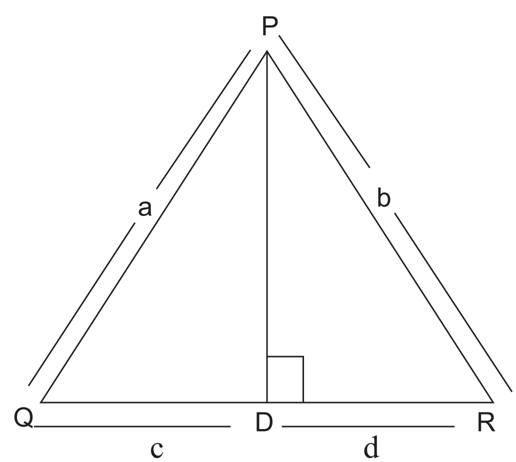
$9AD^2=7AB^2$

58 समकोण Δ PDQ में

$PD^2=a^2-c^2$ ...(1)

समकोण Δ PDR में

$PD^2=b^2-d^2$ ...(2)



(1) और (2) से,

$a^2-c^2=b^2-d^2$

$a^2-b^2=c^2-d^2$

$(a-b)(a+b)=(c+d)(c-d)$

59 NCERT की प्रमेय 6.6

60 दिया है, ar (Δ BXY)=ar(AXYC)

ar (Δ ABC)=ar(ABXY)+ ar (AXYC)

= 2 ar (Δ BXY)

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(BXY)} = \frac{2}{1}$$

$\Delta ABC \sim \Delta XBY$

$$\left(\frac{AB}{XB}\right)^2 = \frac{ar(ABC)}{ar(BXY)}$$

$$\frac{AB}{XB} = \sqrt{2}$$

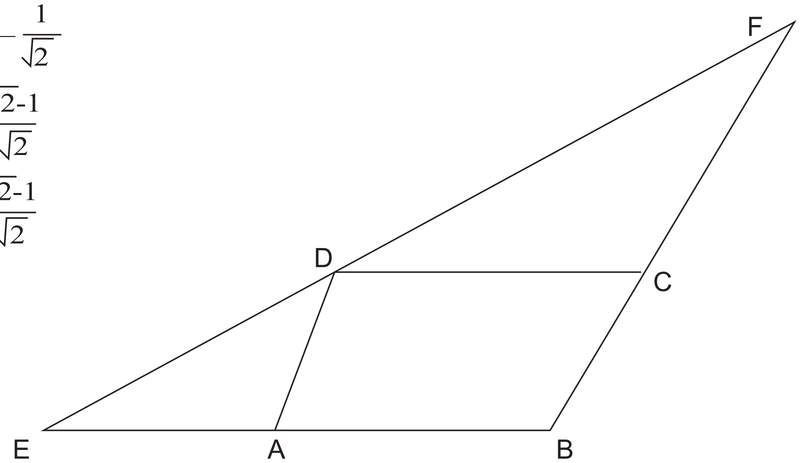
$$\frac{XB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1 - \frac{XB}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{AB-XB}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

61 $\Delta EAD \sim \Delta EBF$



$$\frac{EA}{EB} = \frac{AD}{BF}$$

$$\frac{BF}{BE} = \frac{AD}{AE}$$

$$\frac{BF}{BE} = \frac{AD}{AE} = \frac{BF-AD}{BE-AE} = \frac{BF-BC}{BA} = \frac{CF}{DC}$$

62 NCERT की प्रमेय 6.9

63 NCERT की प्रमेय 6.8

64 NCERT की प्रमेय 6.1

अभ्यास प्रश्न–पत्र

त्रिभुज

समयः 1 घंटा | अधिकतम अंकः 20

खण्ड–अ

1. यदि दो समरूप त्रिभुजों की भुजाओं का अनुपात 8:10 हो, तो इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ______________ है।. ①
2. यदि दो त्रिभुजों ΔABC और ΔPQR में, $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RP} = \frac{CA}{PQ}$ है, तो

   (A) $\Delta PQR \sim \Delta CAB$

   (B) $\Delta PQR \sim \Delta ABC$

   (C) $\Delta CBA \sim \Delta PQR$

   (D) $\Delta BCA \sim \Delta PQR$ ①
3. ΔABC एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है, जिसमें समकोण C पर है, तो AB^2 =......

   (A) AC^2 (B) $2\ AC^2$ (C) $4\ AC^2$ (D) $3\ AC^2$ ①
4. ΔABC के आधार BC के संमातर एक रेखा DE खींची गई, जोकि AB को D पर तथा AC को E पर प्रतिच्छेद करती है। यदि $\frac{AB}{BD} = 4$ और CE = 2 सेमी हो, तो AE की लम्बाई ज्ञात कीजिए। ①

खण्ड–ब

5. एक समचतुर्भुजाकार क्षेत्र के विकर्ण 32 मी. और 24 मी. है। क्षेत्र की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए। ②
6. एक व्यक्ति 24 मी. पश्चिम दिशा की तरफ जाता है, उसके बाद वह 10 मी. उत्तर दिशा की तरफ जाता है। वह आरंभिक बिंदु से कितनी दूरी पर होगा? ②
7. आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के विलामानुसार, सिद्व कीजिए कि एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य–बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है। ②

खण्ड–स

8. समांतर चतुर्भुज ABCD की बढ़ाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि $\Delta ABE \sim \Delta CFB$ है। ③
9. किसी समबाहु त्रिभुज में, सिद्व कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलम्ब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है। ③

खण्ड–द

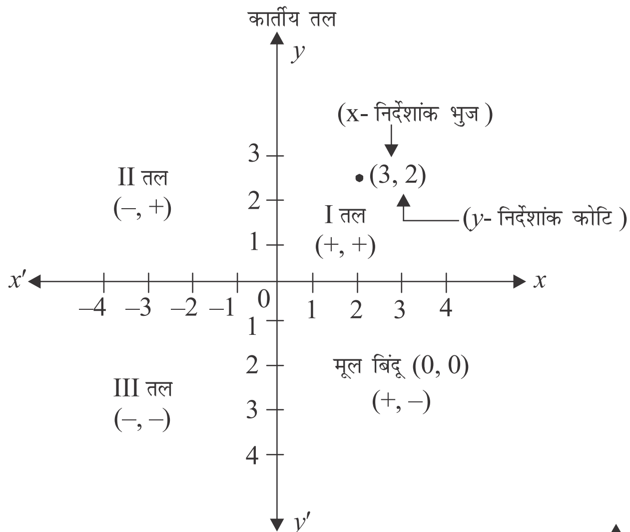
10. आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय का कथन लिखकर सिद्व कीजिए। ④

7
अध्याय

निर्देशांक ज्यामिति

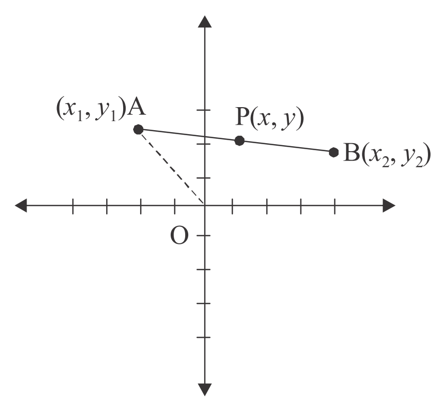
महत्त्वपूर्ण बिंदुः

- ज्यामितीय प्रणाली जिसमें बिंदुओं की स्थिति को संख्याओं की क्रमबद्ध जोड़ी के प्रयोग द्वारा वर्णित किया जाता है।



- **दूरी सूत्र**

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी मापना



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(A व B) के मध्य दूरी

एक बिंदु की मूल बिंदु से दूरी

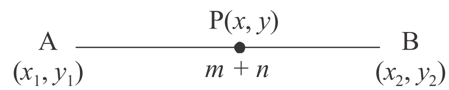
$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

मध्य बिंदु सूत्र (दो बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक)

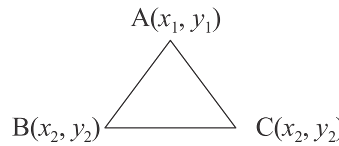
$$P(x, y) = \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right]$$

- एक बिंदु जो अन्य बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ व $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड AB को $m : n$ में आंतरिक रूप से विभाजित करता है।

$$P(x, y) = P\left(\frac{mx_1 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$



- Δ ABC का क्षेत्रफल



$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_1) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

वर्ग इकाई

- यदि ΔABC का क्षेत्रफल = 0 तो A, B, C संरेखी होंगे।
- ΔABC के केन्द्रक के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

रिक्त स्थान भरें–

1. किसी बिंदु की y-अक्ष से दूरी .... कहलाती है।
2. किसी बिन्दु की x-अक्ष से दूरी .... निर्देशांक या कोटि कहलाती है।
3. एक बिंदु (5, 0) .... अक्ष पर स्थित होगा।
4. एक बिंदु जो y-अक्ष पर स्थित है .... के रूप का होगा।
5. $ax + by + c = 0$ के रूप की रैखिक समीकरण को ग्राफीय प्रदर्शित करने पर .... प्राप्त होगी।
6. एक बिंदु $P(x, y)$ की मूल बिंदु से दूरी .... है।
7. बिंदु P की y-अक्ष से दूरी 3 इकाई है व यह x-अक्ष पर y-अक्ष के बाएँ में स्थित है। P के निर्देशांक हैं–

   (i) (3, 0) (ii) (0, 3)

   (iii) (– 3, 0) (iv) (0, – 3)
8. y-अक्ष से बिंदु P(3, – 2) के दूरी है–

   (i) 3 इकाई (ii) 2 इकाई

   (iii) – 2 इकाई (iv) $\sqrt{13}$ इकाई

9. दो बिंदुओं के निर्देशांक (6, 0) व (0, – 8) हैं। इन्हें मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्यबिंदु के निर्देशांक हैं–

(i) (3, 4) (ii) (3, –4)

(iii) (0, 0) (iv) (– 4, 3)

10. यदि बिंदुओं P(4, 0) व Q(0, x) के बीच की दूरी 5 इकाई है तो x का मान है–

(i) 2 (ii) 3

(iii) 4 (iv) 5

11. उस बिंदु के निर्देशांक, जहाँ रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=7$, y-अक्ष को प्रतिच्छेद करती है, हैं–

(i) (a, 0) (ii) (0, b)

(iii) (0, 7b) (iv) (2a, 0)

12. एक त्रिभुज ABC जिसका निर्देशांक A(4, 0), B(0, – 7) व 0(0, 0) हैं, का क्षेत्रफल होगा–

(i) 11 वर्ग इकाई (ii) 18 वर्ग इकाई

(iii) 28 वर्ग इकाई (iv) 14 वर्ग इकाई

13. दो बिंदुओं $P\left(-\frac{11}{3},5\right)$ व $Q\left(-\frac{2}{3},5\right)$ के बीच की दूरी है–

(i) 6 इकाई (ii) 4 इकाई

(iii) 3 इकाई (iv) 2 ईकाई

14. दो बिंदुओं, जिनके निर्देशांक (5 cos 35°, 0) व (0, 5 cos 55°) है, के बीच की दूरी है–

(i) 10 इकाई (ii) 5 इकाई

(iii) 1 इकाई (iv) 2 इकाई

15. त्रिभुज ABC में शीर्ष A के निर्देशांक (– 4, 2) हैं व एक बिंदु D, जो BC का मध्यबिंदु है, के निर्देशांक (2, 5) हैं। ΔABC के केन्द्रक के निर्देशांक होंगे–

(i) (0, 4) (ii) $\left(-1,\frac{7}{2}\right)$

(iii) $\left(-2,\frac{7}{3}\right)$ (iv) (0, 2)

16. दो रेखाओं $2x + 4 = 0$ व $x - 5 = 0$ के बीच की दूरी है–

(i) 9 इकाई (ii) 1 इकाई

(iii) 5 इकाई (iv) 7 इकाई

17. एक त्रिभुज, जिसके शीर्षों के निर्देशांक (0, 0), (2, 0) व (0, 2) हैं, का परिमाप है–

(i) 4 इकाई (ii) 6 इकाई

(iii) $6\sqrt{2}$ इकाई (iv) $4+2\sqrt{2}$ इकाई

18. यदि $(9, a), (b, -4)$ व (7, 8) से बनने वाले त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक (6, 8) हैं तो a व b के मान हैं–

(i) $a = 4, b = 5$ (ii) $a = 5, b = 4$

(iii) $a = 5, b = 2$ (iv) $a = 3, b = 2$

सही व गलत के चिन्ह लगाएँ–

19. बिंदु P(– 4, 2), बिंदु A(– 4, 6) व B(– 4, – 6) को मिलाने वाले रेखाखण्ड पर स्थित है।

20. बिंदु (0, 5), (0, – 9) व (3, 6) संरेखी हैं।

लघु उत्तरीय प्रश्न–I

21. P के किस मान के लिए (2, 1), $(p, -1)$ व (– 1, 3) संरेखी होंगे?

22. त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसके निर्देशांक P(– 5, 7), Q(– 4, – 5) व R(4, 5) हैं।

23. बिन्दुओं (1, – 2) और (– 3, 4) को मिलाने वाले रेखाखंड को समात्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक बताइये।

24. एक Δ की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक (3, 4), (4, 1) और (2, 0) है Δ के शीर्ष ज्ञात कीजिए।

25. यदि बिंदु A(4, 3) तथा $B(x, 5)$ एक वृत्त जिसका केन्द्र O(2, 3) है, पर स्थित हों, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

26. बिन्दुओं (6, 4) तथा (– 1, 7) को मिलाने वाले रेखाखंड को x-अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है।

27. दर्शाइए कि बिन्दु (– 2, 3) (8, 3) और (6, 7) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष है।

28. y-अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो कि बिन्दुओं A(5, – 6) तथा B(– 1. – 4) को मिलाने वाले रेखाखंड को बांटता है।

29. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें y अक्ष बिन्दुओं $A(5-6)$ तथा $B(-1,-4)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को बांटता हैं।

30. उस त्रिभुज के केन्द्र के निर्देशांक बताइये जिसके शीर्ष $(3-5)$ $(-7, 4)$ $(10-2)$ है।

31. x व y के बीच संबंध बताएँ यदि बिंदु (x, y) बिन्दुओं $(7, 1)$ व $(3, 5)$ से समदूरस्थ है।

32. वह अनुपात ज्ञात करें जिसमें x-अक्ष बिन्दुओं $(1,-3)$ व $(4, 5)$ को विभाजित करता है। x-अक्ष पर स्थित उस बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात करें।

33. a का मान ज्ञात करें यदि बिंदु $(3, 5)$ व $(7, 1)$ बिंदु $(a, 0)$ से समान दूरनी पर स्थित हैं।

34. x व y के मध्य संबंध ज्ञात करें यदि बिंदु $A(x, y)$, $B(-4, 6)$ व $C(-2, 3)$ संरेखी हैं।

35. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जिसके शीर्षों के निर्देशांक $(1,-1)$, $(-4, 6)$ व $(-3, -5)$ हैं।

36. निर्देशांक $A(-5, 6)$, $B(-4,-2)$ व $C(7, 5)$ से बनने वाले त्रिभुज का प्रकार बताएँ। (NCERT Exempler)

37. x-अक्ष पर उस बिंदु को निर्देशांक ज्ञात करें जो बिंदु $(7,-4)$ से $2\sqrt{5}$ इकाई की दूरी पर स्थित है। इस प्रकार के कितने बिंदु होंगे? (NCERT Exempler)

38. बिंदुओं $A(2,-2)$, $B(7, 3)$, $C(11,-1)$ व $D(6,-6)$ को क्रमानुसार लेकर बनने वाले चतुर्भुज का प्रकार बताएँ।

39. x-अक्ष पर बिंदु Q के निर्देशांक ज्ञात करें जो बिंदुओं $A(-5,-2)$ व $B(4,-2)$ को मिलाने वाले रेखाखंड के लंब समद्विभाजक पर स्थित है। बिंदुओं Q, A व B से बनने वाले त्रिभुज का प्रकार बताएँ। (NCERT Exempler)

40. यदि बिंदु P व Q बिन्दुओं $A(2,-2)$ व $B(-7, 4)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को समत्रिभाजित करते हैं व P, A के निकट है तो P व Q के निर्देशांक ज्ञात करें।

लघुउत्तरीय प्रश्न-II

41. बिन्दुओं $A(2, 1)$ तथा $B(5, -8)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को P तथा Q इस प्रकार विभाजित करते है कि यदि बिन्दु P, रेखा $2x-y+K=0$ पर भी स्थित है तो K का मान ज्ञात कीजिए।

42. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें रेखा $x-3y=0$ बिन्दुओं $(-2,-5)$ व $(6, 3)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को विभाजित करती है। प्रतिच्छेदित बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

43. बिन्दु A बिन्दुओं $X(6,-6)$ व $Y(-4,-1)$ को मिलाने वाले रेखाखंड पर इस प्रकार स्थित है कि $\frac{XA}{XY}=\frac{2}{5}$ यदि बिंदु A रेखा $3x+K(y+1)=0$ पर भी स्थित है तो K का मान ज्ञात कीजिए।

44. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $A(0,-1)$, $B(2, 1)$ व $C(0, 3)$ से बनने वाले त्रिभुज के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से प्राप्त हुआ है।

45. K का मान ज्ञात कीजिए यदि ΔABC जिसके शीर्ष A(K + 1, 1), B(4, – 3) व C(7, – K) हैं, का क्षेत्रफल 6 वर्ग इकाई है।

46. बिंदु P, बिदुंओं A(2, 1) व B(5, –8) को मिलाने वाले रेखाखंड को इस प्रकार विभाजित करता है कि $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{3}$ है।

47. x-अक्ष पर स्थित एक बिंदु P, बिन्दुओं (4, 5) व (1, – 3) को मिलाने वाले रेखाखंड को किसी अनुपात में विभाजित करता है। बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

48. एक समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90°$ तथा AB = $\sqrt{34}$ इकाई है। बिंदुओं B व C के निर्देशांक क्रमशः (4, 2) व (– 1, y) हैं। यदि ar ΔABC = 17 वर्ग इकाई है, तो y का मान ज्ञात कीजिए।

49. यदि A(– 3, 2), B(x, y) तथा C(1, 4) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं व AB = BC है तो $(2x + y)$ का मान ज्ञात कीजिए।

50. यदि बिन्दु P(3, 4), बिन्दुओं A($a + b$, $b – a$) तथा B($a – b$, $a + b$) से समदूरस्थ है तो सिद्ध कीजिए कि $3b – 4a = 0$ है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

51. A (– 5, 7), B(– 4, – 5), C(– 1, – 6) तथा D(4, 5) एक चतुर्भुज ABCD के शीर्ष हैं। ABCD के शीर्ष हैं। ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

52. यदि P(x, y), A(a, 0) तथा B(0, b) को मिलाने वाले रेखाखंड पर स्थित एक बिन्दु है तो सिद्ध कीजिए $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ है।

53. यदि बिन्दु (x, y), (– 5, – 2) व (3, – 5) संरेखी हैं तो सिद्ध कीजिए कि $3x + 8y + 31 = 0$ है।

54. x व y के बीच संबंध स्थापित कीजिए यदि A(x, y), B(– 2, 3) व C(2, 1) एक समद्विभाजित त्रिभुज बना रहे हैं व AB = AC है।

55. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (x, $\sqrt{1 - x^2}$) मूलबिन्दु से 1 इकाई की दूरी पर स्थित है।

56. यदि R(x, y) बिन्दुओं A(a, b) व B(b, a) को मिलाने वाले रेखाखंड पर स्थित एक बिन्दु है तो दर्शाइए कि $x + y = a + b$ है।

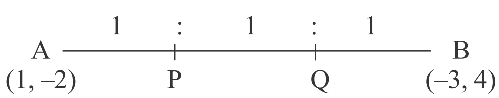
57. यदि बिंदु (a, b), (c, d) व ($a – c$, $b – d$) संरेखी है तो दर्शाइए कि $bc = ad$ है।

58. उस त्रिभुज के परिकेन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निदेशांक (3, 7), (0, 6) व (–1, 5) हैं। परिवृत्त की त्रिज्या भी ज्ञात कीजिए।

59. एक त्रिभुज PQR में P, Q व R के निर्देशांक क्रमशः (3, 2), (5, 4) व (9, 3) हैं। केन्द्रक G के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। ΔPQG व ΔPRG का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

60. यदि बिन्दु (5, 4) व (x, y) बिन्दु (4, 5) से समदूरस्थ हैं तो सिद्ध कीजिए कि $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 39 = 0$ है।

उत्तर तथा संकेत

1. भुज
2. y-निर्देशांक
3. x-अक्ष
4. $(0, y)$
5. सरल रेखा
6. $\sqrt{x^2 + y^2}$
7. (iii) $(-3, 0)$
8. (i) 3 इकाई
9. (ii) $(3, -4)$
10. (ii) 3
11. (iii) $(0, 7b)$
12. (iv) 14 वर्ग इकाई
13. (iii) 3 इकाई
14. (ii) 5 इकाई
15. (i) (0, 4)
16. (iv) 7 इकाई
17. (iv) $\left(4+2\sqrt{2}\right)$ इकाई
18. (iv) $a = 20, b = 2$
19. सत्य
20. असत्य
21. P = 5
22. 25 वर्ग इकाई
23. 

AP : PB = 1 : 2

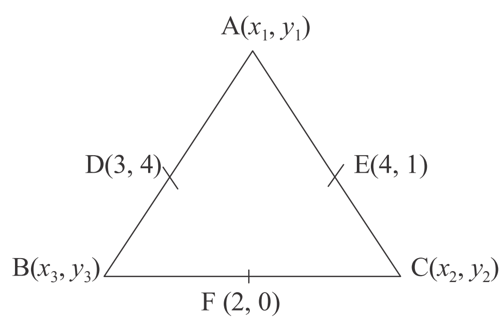
AQ : QB = 2 : 1

$$P = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$Q = \left(-\frac{5}{3}, 2\right)$$

24. $\frac{x_1 + x_3}{2} = 3$

$$\frac{y_1 + y_3}{2} = 4$$



$x_1 + x_3 = 6$
$y_1 + y_3 = 8$
$y_2 + y_3 = 0$
$y_2 + y_1 = 2$
$x_1 + x_2 = 8$
$x_2 + x_3 = 4$
A(1, 3), B(5, 5), C(3, – 3)

25. $x = 0$
26. 4 : 7
27. पाइथागोरस व दूरी सूत्र का प्रयोग करें
28. $y = 4$
29. 5 : 1
30. (2, – 1)
31. $x - y = 2$
32. 3 : 5; $\left(\frac{17}{8}, 0\right)$
33. $a = 2$
34. $3x = -2y$
35. 28 वर्ग इकाई
36. दूरी सूत्र के प्रयोग द्वारा, विषमबाहु त्रिभुज
37. $x = 1, -15$ दो बिंदु
38. समचतुर्भुज
39. दूरी सूत्र व मध्यबिंदु सूत्र

    $Q\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; समद्विबाहु त्रिभुज
40. P(– 1, 0); Q(– 4, 2)
41. P(3, – 2) समीकरण में $x = 3, y = -2$;
    K = – 8
42. माना P(x, y) बिंदु व $m : n$ अनुपात

$$x = \frac{6n - 2m}{m + n}, \quad y = \frac{3n - 5m}{m + n} \qquad ....(1)$$

रेखा के समीकरण में $x = 3y$ डालने पर

$m : n = 3 : 13$

$P(x, y) = \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$

43. $\frac{XA}{AY} = \frac{2}{3}$

माना A(x, y) बिंदु है

$x = 2, y = -4$

A$(2, -4)$ का मान समीकरण में डालें

$\therefore \quad K = 2$

44. 1 वर्ग इकाई

45. $K = 3$

46. $K = \frac{-17}{4}$

47. $m : n = 5 : 3$

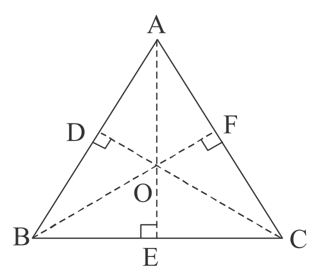
48. $y = -1, y = 5$

49. $2x + y = 1$

50. $3b - 4a = 0$ दूरी सूत्र का प्रयोग करें

51. चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = क्षे० ΔABC + क्षे० ΔADC = 72 वर्ग इकाई

58. AB, BC व CA के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात करें।



DO = OE = OF

परिकेन्द्र $\quad O(x, y) = 1, \left(\frac{13}{2}\right)$

परित्रिज्या $AO = \frac{\sqrt{17}}{2}$ इकाई

59. $G(x, y) = (6, 3)$

$\Delta PQG = \frac{3}{2}$ वर्ग इकाई

$\Delta PRG = \frac{3}{2}$ वर्ग इकाई

अभ्यास प्रश्न–प्रत्र

निर्देशांक ज्यामिति

समय : 1 घंटा *अंक : 20*

खण्ड–अ

1. m का वह मान ज्ञात करिए जिसमें बिंदु (3, 5) (m, 6) तथा $\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{2}\right)$ संरेख है। **1**

2. बिन्दुओं A(c, 0) तथा B(0, c) के बीच की दूरी क्या है? **1**

3. मूल बिन्दु से बिन्दु P(–6, 8) की दूरी .... है। **1**

4. यदि बिन्दु (3, a), $2x - 3y = 5$ द्वारा निरूपित रेखा पर स्थित है, तो a का मान ज्ञात कीजिए। **1**

खण्ड–ब

5. P के किस मान के लिए बिंदु (–3, 9), (2, p) तथा (4, –5) संरेख है? **2**

6. यदि बिन्दु (8, 6) तथा B(x, 10) एक वृत्त जिसका केन्द्र (4, 6) है पर स्थित हों तो x का मान ज्ञात कीजिए। **2**

खण्ड–स

7. एक त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक (0, 4) (0, 0) व (3, 0) हैं। **2**

8. दर्शाइए कि बिन्दु A(–3, 2), B(–5, –5), C(2, –3) तथा D(4, 4) एक समचतुर्भुज के शीर्ष है। **3**

9. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिंदु (2, y) बिंदुओं A(–2, 2) तथा B(3, 7) को मिलाने वाले रेखाखंड को विभाजित करता है। y का मान भी ज्ञात कीजिए। **3**

खण्ड–द

10. यदि P बिन्दुओं A(–2, –2) तथा B(2, –4) को मिलाने वाले रेखाखंड को इस प्रकार विभाजित करता है कि $\frac{AP}{AB} = \frac{3}{7}$ तो P के निर्देशांक बताइए। **4**

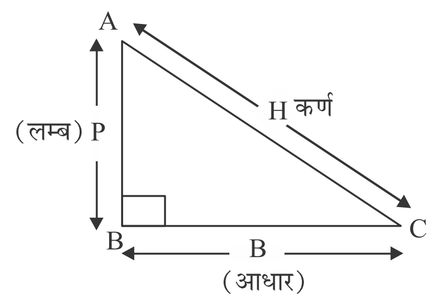
❑❑❑

8
अध्याय

त्रिकोणमिति का परिचय

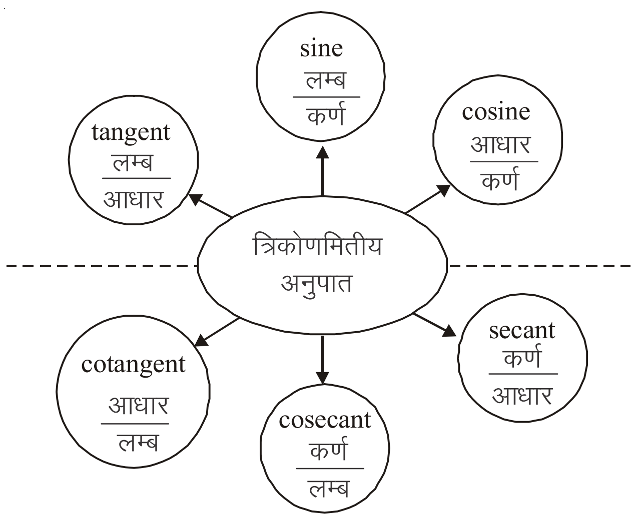
त्रिकोणमिति का परिचय

गणित की वह शाखा जो कि समकोण त्रिभुजों के अध्याय से संबंधित है। त्रिकोणमिति मुख्यतः समकोण त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों के मध्य सहसंबंध के अध्ययन से संबंधित है।



नोट–$\angle A$ के लिए, लम्ब BC तथा आधार AB होगा।
$\angle C$ के लिए, लम्ब AB तथा आधार BC होगा।

त्रिकोणमितीय अनुपात–किसी समकोण त्रिभुज के एक न्यून कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात त्रिभुज के कोण और उसकी भुजाओं की लंबाई के बीच के संबंध को व्यक्त करते हैं।

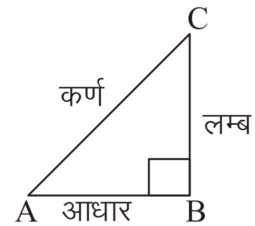


Mind Trick : Sine, Cosine और Tangent का त्रिभुज की भुजाओं से संबंध याद करने के लिए निम्न वाक्य याद करें–

Some People Have curly Brown Hair Through Proper Brushing

$\sin A = \frac{P}{H}$ $\quad \cos A = \frac{B}{H}$ $\quad \tan A = \frac{P}{B}$

1. त्रिकोणमितिय अनुपात : ΔABC में $\angle B = 90°$ कोण A के लिए–



$$\text{Sin A} = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

$$\text{Cos A} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{संलगन भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

$$\text{Tan A} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{संल्गन भुजा}}$$

$$\text{Cot A} = \frac{\text{आधार}}{\text{लंब}} = \frac{\text{संलगन भुजा}}{\text{सम्मुख भुजा}}$$

$$\text{Sec A} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{संलगन भुजा}}$$

$$\text{Cosec A} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}}$$

2. व्युत्क्रम

$$\text{Sin}\,\theta = \frac{1}{\text{Cosec}\,\theta},\ \text{Cosec}\,\theta = \frac{1}{\text{Sin}\,\theta}$$

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{1}{\text{Sec}\,\theta},\ \text{Sec}\,\theta = \frac{1}{\text{Cos}\,\theta}$$

$$\text{Tan}\,\theta = \frac{1}{\text{Cot}\,\theta},\ \text{Cot}\,\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

3. आनुपातिक संबंध

$$\text{Tan}\,\theta = \frac{\text{Sin}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta},\ \text{Cot}\,\theta = \frac{\text{Cos}\,\theta}{\text{Sin}\,\theta}$$

4. सर्वसामिकाएं

$\text{Sin}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1 \Rightarrow \text{Sin}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta$ और $\text{Cos}^2\theta = 1 - \text{Sin}^2\theta$

$1 + \tan^2\theta = \text{Sec}^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta = \text{Sec}^2\theta - 1$ और $\text{Sec}^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$1 + \text{Cot}^2\theta = \text{Cosec}^2\theta \Rightarrow \text{Cot}^2\theta = \text{Cosec}^2\theta - 1$ और $\text{Cosec}^2\theta - \text{Cot}^2\theta = 1$

5. कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमिति अनुपातः

$\angle A$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित
Cot A	अपरिभाषित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाषित
Cosec A	अपरिभाषित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

6. पूरक कोणों के त्रिकोणमितिय अनुपात

$\text{Sin}(90° - \theta) = \text{Cos}\,\theta$

$\text{Cos}(90° - \theta) = \text{Sin}\,\theta$

$\text{Tan}(90° - \theta) = \text{Cot}\,\theta$

$\text{Cot}(90° - \theta) = \text{Tan}\,\theta$

$\text{Sec}(90° - \theta) = \text{Cosec}\,\theta$

$\text{Cosec}(90° - \theta) = \text{Sec}\,\theta$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. यदि $\text{Sin}\,\theta = \text{Cos}\,\theta$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।
2. यदि $\tan\theta = \text{Cot}(30° + \theta)$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।
3. यदि $\text{Sin}\,\theta = \text{Cos}(\theta - 6°)$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।
4. यदि $\text{Cos}\,A = \frac{7}{25}$ तो $\tan A + \text{Cot}\,A$ का मान होगा।

   (a) $\frac{625}{168}$ (b) $\frac{168}{625}$ (c) 1 (d) 0

5. यदि $\tan\theta = \frac{4}{3}$ तो $\frac{\text{Sin}\,\theta + \cos\theta}{\text{Sin}\,\theta - \text{Cos}\,\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $3x = \text{Cosec}\,\theta$ और $\frac{3}{x} = \text{Cot}\,\theta$ तो $3\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ का मान बताइए।

7. यदि $x = a\,\text{Sin}\,\theta$ तथा $y = a\,\text{Cos}\,\theta$ तो $x^2 + y^2$ का मान ज्ञात कीजिए

8. Cosec 70° – Sec 20° का मान बताइए।

9. यदि $5x = \text{Sec}\,\theta$ और $\frac{5}{x} = \tan\theta$ है, तो $5\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$ का मान बताइए।

11. Sec θ को Cot θ में व्यक्त कीजिए।

12. Cos θ Cos (90° – θ) – Sin θ Sin (90° – θ) का मान ज्ञात कीजिए।

13. यदि Sin (20° + θ) = Cos 30° तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

14. $\frac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta}$ का मान बताइए।

15. $\frac{\text{Sin}\,\theta}{\sqrt{1-\text{Sin}^2\theta}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो $\frac{\text{cosec}^2\theta - \sec^2\theta}{\text{cosec}^2\theta + \sec^2\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए। [CBSE 2010]

17. यदि $\theta = 45°$, तो $\text{cosec}^2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए। [CBSE 2010]

18. यदि $\cos\theta = \frac{2}{3}$ तो, $2\sec^2\theta + 2\tan^2\theta - 7$ का मान ज्ञात कीजिए। [CBSE 2013]

19. $6\tan^2\theta - 6\sec^2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए। [CBSE 2013]

20. cosec 48° + tan 88° को 0° व 45° के बीच के त्रिकोणमितीय अनुपातों के रूप में दर्शाइए। [CBSE 2014]

21. यदि $5\tan\theta - 4 = 0$, तो $\frac{5\sin\theta - 4\cos\theta}{5\sin\theta + 4\cos\theta}$ का मान है।

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{5}{6}$

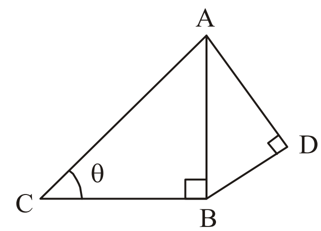
(c) 0 (d) $\frac{1}{6}$

22. यदि A व B पूरक कोण है तो

(a) $\sin A = \sin B$ (b) $\cos A = \cos B$

(c) $\tan A = \tan B$ (d) $\sec A = \text{cosec } B$

23. आकृति में यदि AD = 4 सेमी., BD = 3 सेमी. तथा CB = 12 सेमी है तो $\cot \theta =$



(a) $\frac{12}{5}$ (b) $\frac{5}{12}$

(c) $\frac{13}{12}$ (d) $\frac{12}{13}$

24. $\tan 1° \tan 2° \tan 3° \ldots\ldots\ldots \tan 89°$ का मान है–

(a) 1 (b) – 1

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

25. यदि θ और 2θ – 45° न्यूनकोण हैं कि व $\sin \theta = \cos (2\theta - 45°)$ है, तो $\tan \theta$ का मान होगा–

(a) 1 (b) – 1

(c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

लघु उत्तरीय प्रश्न 1

सिद्ध कीजिए

26. $\text{Sec}^4 \theta - \text{Sec}^2 \theta = \tan^4 \theta + \tan^2 \theta$

27. $\sqrt{\frac{1 + \text{Sin } \theta}{1 - \text{Sin } \theta}} = \tan \theta + \text{Sec } \theta$

28. यदि $x = p \text{ Sec } \theta + q \tan \theta$ और $y = p \tan \theta + q \text{ Sec } \theta$ तो सिद्ध कीजिए $x^2 - y^2 = p^2 - q^2$

29. यदि $7 \text{ Sin}^2 \theta + 3 \text{ Cos}^2 \theta = 4$ तो दिखाइए $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

30. यदि $\text{Sin } (A - B) = \frac{1}{2}, \text{Cos } (A + B) = \frac{1}{2}$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

31. $\dfrac{\text{Cos}^2 20° + \text{Cos}^2 70°}{\text{Sin}^2 59° + \text{Sin}^2 31°}$ का मान ज्ञात कीजिए

32. **सिद्ध कीजिए:** $\tan 1° \tan 11° \tan 21° \tan 69° \tan 79° \tan 89° = 1$

33. यदि Sec 4 A = Cosec (A – 20°) तो A का मान ज्ञात कीजिए।

34. यदि 3 Cot A = 4, $\dfrac{\text{Cosec}^2 A + 1}{\text{Cosec}^2 A - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

35. यदि $\tan (3x - 15°) = 1$ तो x का मान बताइए।

36. यदि A, B, C ΔABC के आंतरिक कोण हैं तो सिद्ध कीजिए कि

$\text{cosec}\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = \sec\left(\dfrac{C}{2}\right)$ है। [CBSE 2011]

37. ΔABC में ∠B = 90°, AB = 5 सेमी. व ∠ACB = 30° है तो BC व AC का मान ज्ञात कीजिए।

[CBSE 2011]

38. यदि $\tan \theta = \cot (30° + \theta)$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए। [CBSE 2014]

39. दर्शाइए कि $\dfrac{1 - \sin 60°}{\cos 60°} = 2 - \sqrt{3}$ है। [CBSE 2014]

40. θ का मान ज्ञात कीजिए यदि $\dfrac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = 4, \theta \le 90°$ है। [CBSE 2014]

लघु उत्तरीय प्रश्न 2

सिद्ध कीजिए:

41. $\dfrac{\tan A + \text{Sec} A - 1}{\tan A - \text{Sec} A + 1} = \dfrac{1 + \text{Sin} A}{\text{Cos} A}$

42. $\dfrac{1}{\text{Sec}\, x - \tan x} - \dfrac{1}{\text{Cos}\, x} = \dfrac{1}{\text{Cos}\, x} - \dfrac{1}{\text{Sec}\, x + \tan x}$

43. $\dfrac{\tan\theta}{1 - \text{Cot}\theta} + \dfrac{\text{Cot}\theta}{1 - \tan\theta} = 1 + \tan\theta + \text{Cot}\theta = \text{Sec}\theta\, \text{Cosec}\theta + 1$

44. $(\text{Sin}\,\theta + \text{Cosec}\,\theta)^2 + (\text{Cos}\,\theta + \text{Sec}\,\theta)^2 = 7 + \tan^2\theta + \text{Cot}^2\theta$

45. Sec A (1 – Sin A) (Sec A + tan A) = 1

46. यदि $\tan\theta + \sin\theta = m$, $\tan\theta - \sin\theta = n$ तो दिखाइए कि $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ है।

47. यदि $\sec\theta = x + \frac{1}{4x}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\sec\theta + \tan\theta = 2x$ या $\frac{1}{2x}$

48. यदि $\sin\theta + \sin^2\theta = 1$ तो सिद्ध कीजिए कि $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$

49. त्रिकोणमितिय सारणी को प्रयोग किये बिना

$\cot\theta \tan(90° - \theta) - \sec(90° - \theta)\operatorname{cosec}\theta + \sin^2 65° + \sin^2 25° + \sqrt{3}\tan 5° \tan 85°$ का मान ज्ञात कीजिए।

50. सिद्ध कीजिए $\frac{\cot(90° - \theta)}{\tan\theta} + \frac{\operatorname{cosec}(90° - \theta)\sin\theta}{\tan(90° - \theta)} = \sec^2\theta$

51. $\frac{\cos^2 20° + \cos^2 70°}{\sec^2 50° - \cot^2 40} + 2\operatorname{cosec}^2 58° - 2\cot 58° \tan 32° - 4\tan 13° \tan 37° \tan 77° \tan 45° \tan 53°$. का मान ज्ञात कीजिए।

52. यदि A, B, C त्रिभुज ABC के अंत कोण है तो सिद्ध कीजिए Cosec² = $\operatorname{cosec}^2\left(\frac{B+C}{2}\right) - \tan^2\frac{A}{2} = 1$

53. $\sec^2 10° - \cot^2 80° + \frac{\sin 15° \cos 75° + \cos 15° \sin 75°}{\cos\theta \sin(90° - \theta) + \sin\theta \cos(90° - \theta)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

54. सिद्ध कीजिए $\frac{\tan\theta - \cot\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan^2\theta - \cot^2\theta$

55. यदि $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$, तो दर्शाइए कि $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ [CBSE 2015]

56. मान ज्ञात कीजिए– $4 - \frac{\sin 30° + \tan 45° - \operatorname{cosec} 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$ [CBSE 2012]

57. सिद्ध कीजिए $1 - \frac{\sin A \sin(90° - A)}{\cot(90° - A)} = \sin^2 A$ [CBSE 2012]

58. यदि $a\cos\theta + b\sin\theta = m$ और $a\sin\theta - b\cos\theta = n$ है तो सिद्ध कीजिए कि $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$ [CBSE 2001 C]

59. यदि $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ है तो सिद्ध कीजिए कि $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ [CBSE 2001C]

60. त्रिकोणमितीय सारणी का प्रयोग किए बिना मान ज्ञात कीजिए–

$$\frac{\sec^2 54° - \cot^2 36°}{\operatorname{cosec}^2 57° - \tan^2 33°} + 2\sin^2 38° \sec^2 52° - \sin^2 45°$$ [CBSE 2005]

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

सिद्ध कीजिएः

61. $\dfrac{\text{Sec}\,\theta + \tan\theta - 1}{\tan\theta - \text{Sec}\,\theta + 1} = \dfrac{\text{Cos}\,\theta}{1 - \text{Sin}\,\theta}$

62. $\left(1 + \dfrac{1}{\tan^2 A}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\text{Cot}^2 A}\right) = \dfrac{1}{\text{Sin}^2 A - \text{Sin}^4 A}$

63. $2(\sin^6\theta + \text{Cos}^6\theta) - 3(\text{Sin}^4\theta + \text{Cos}^4\theta) + 1 = 0$

64. $(1 + \text{Cot}\,A + \tan A)(\text{Sin}\,A - \text{Cos}\,A) = \text{Sin}\,A \tan A - \text{Cot}\,A \cos A$

65. यदि $\text{Sin}\,\theta + \text{Cos}\,\theta = m$ और $\text{Sec}\,\theta + \text{Cosec}\,\theta = n$ तो दिखाइए $n(m^2 - 1) = 2m$

66. $\dfrac{\text{Cot}(90° - \theta)\tan\theta - \text{Cosec}(90° - \theta)\text{Sec}\,\theta}{\text{Sin}\,12° \,\text{Cos}\,15° \,\text{Sec}\,78° \,\text{Cosec}75°} + \dfrac{\text{Cos}^2(50° + \theta)\tan^2(40° - \theta)}{\tan 15° \tan 37° \tan 53° \tan 75°}$

का मान ज्ञात कीजिए।

67. सर्वसमिका सिद्ध कीजिए:

$$\frac{1}{\text{Cosec}\,\theta + \text{Cot}\,\theta} - \frac{1}{\text{Sin}\,\theta} = \frac{1}{\text{Sin}\,\theta} - \frac{1}{\text{Cosec}\,\theta - \text{Cot}\,\theta}$$

68. यदि $\dfrac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Cos}\,\beta} = m$ और $\dfrac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Sin}\,\beta} = n$ है तो सिद्ध कीजिए $(m^2 + n^2)\,\text{Cos}^2\beta = n^2$

69. यदि $\tan\theta + \text{Sin}\,\theta = m$. $\tan\theta - \sin\theta = n$, है, तो सिद्ध कीजिए $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

70. सिद्ध कीजिए:

$$\text{Sec}^2\theta - \frac{\text{Sin}^2\theta - 2\text{Sin}^4\theta}{2\text{Cos}^4\theta - \text{Cos}^2\theta} = 1$$

71. $\text{Cot}\,\theta\,\tan(90° - \theta) - \text{Sec}(90° - \theta)\,\text{Cosec}\,\theta + \sqrt{3}\,\tan 12°\,\tan 60°\,\tan 78°$ का मान ज्ञात कीजिए।

72. मान ज्ञात कीजिए:

$$\frac{\text{Sec}(90° - \theta)\,\text{Cosec}\,\theta - \tan(90° - \theta)\,\text{Cot}\,\theta + \text{Cos}^2 25° + \text{Cos}^2 65°}{3\tan 27°\,\tan 63°}$$

उत्तर एवं संकेत

1. 45°	2. 30°
3. 24	4. $\frac{625}{168}$
5. 7	6. $\frac{1}{3}$
7. a	8. 0
9. $\frac{1}{5}$	10. 9
11. $\sqrt{\frac{1+\cos^2\theta}{\cot\theta}}$	12. 0°
13. 50°	14. $\tan^2\theta$
15. $\tan\theta$	16. $\frac{1}{2}$
17. 2	18. 0
19. – 6	20. sec 42° + cot 2°
21. (c)	22. (d)
23. (a)	24. (a)
25. (a)	26. Hint : $\sec^2\theta(\sec^2\theta - 1)$
30. A = 45°, B = 15°	31. 1

33. $22°$

34. $\frac{17}{8}$

35. 20

36. Hint : $A + B + C = 180°$

$A + B = 180° - C$

$\frac{A+B}{2} = \frac{180° - C}{2} = 90° - \frac{C}{2}$

37. AC = 10 cm, BC = $5\sqrt{3}$ cm

38. $30°$

40. $60°$

49. $\sqrt{3}$

51. – 1

52. 2

56. $\frac{20+9\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}$

60. $\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

71. –2

72. $-\frac{2}{3}$

अभ्यास प्रश्न–प्रत्र

त्रिकोणमिति का परिचय

समय : 1 घंटा *अंक : 20*

खण्ड–अ

1. यदि $\text{Sin}\,\theta = \dfrac{4}{5}$ तो $\text{Cos}\,\theta$ का मान ज्ञात कीजिए। **1**

2. $\text{Sin}\,(45° + \theta) - \text{Cos}\,(45° - \theta)$ का मान बताइए। **1**

3. यदि $\cos 9\alpha = \sin \alpha$ व $9\alpha < 90°$, तो $\tan 5\alpha$ का मान होगा– **1**

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) 1 (d) 0

4. यदि $\sin A + \sin^2 A = 1$, तो $(\cos^2 A + \cos^4 A)$ का मान है– **1**

(a) 1 (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) 2 (d) 3

खण्ड–ब

5. यदि $5 \tan \theta = 4$ तो $\dfrac{5\,\text{Sin}\,\theta - 3\text{Cos}\,\theta}{5\,\text{Sin}\,\theta + 2\text{Cos}\,\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

6. $\tan 35° \tan 40° \tan 45° \tan 50° \tan 55°$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

7. सिद्ध कीजिए $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\tan \alpha + \cot \alpha) = \sec \alpha + \text{cosec}\,\alpha$. **2**

खण्ड–स

8. सिद्ध कीजिए : $\dfrac{\text{Sin}\,\theta}{1 + \text{Cos}\,\theta} + \dfrac{1 + \text{Cos}\,\theta}{\text{Sin}\,\theta} = 2\,\text{Cosec}\,\theta$ **3**

9. सिद्ध कीजिए : $\dfrac{\text{Cos A}}{1 - \tan A} - \dfrac{\text{Sin}^2 A}{\text{Cos A} - \text{Sin A}} = \text{Sin A} + \text{Cos A}$ **3**

खण्ड–द

10. सिद्ध कीजिए : $\dfrac{\tan \theta + \text{Sec}\,\theta - 1}{\tan \theta - \text{Sec}\,\theta + 1} = \dfrac{\text{Cos}\,\theta}{1 - \text{Sin}\,\theta}$ **4**

❑❑❑

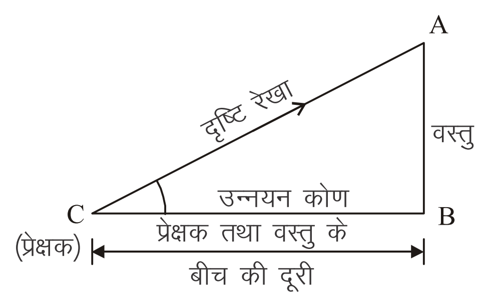
9

अध्याय

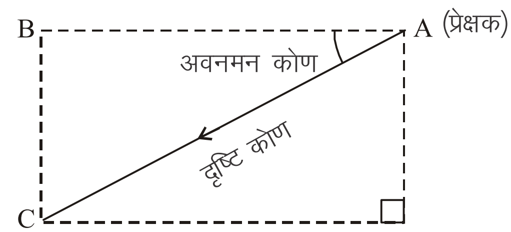
त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

महत्त्वपूर्ण बिंदुः

- त्रिकोणमिति का प्रयोग वास्तव में मापन किए बिना विभिन्न वस्तुओं की ऊँचाइयाँ और दूरियाँ ज्ञात करने में किया जाता है।



- **उन्नयन कोण**– माना AB एक ऊर्ध्वाधर खड़ी वस्तु है जो तल CB पर स्थित है। C एक प्रेक्षक है जो कि वस्तु AB के शिखर A की ओर देख रहा है। रेखा AC को दृष्टि रेखा कहा जाता है तथा $\angle ACB$ को उन्नयन कोण कहा जाता है।



- **अवनमन कोण**– माना A एक प्रेक्षक है जो कि ऊँचाई BC से वस्तु C की ओर देख रहा है। रेखा AC को दृष्टि रेखा कहा जाता है तथा $\angle BAC$ को अवनमन कोण कहा जाता है।
- यदि प्रेक्षक वस्तु की ओर जाता है तो उन्नयन कोण का माप बढ़ता है तथा यदि प्रेक्षक वस्तु से विपरीत दिशा की ओर जाता है तथा उन्नयन कोण का माप कम हो जाता है।
- उन्नयन कोण का मान सदैव अवनमन कोण के मान के समान होगा (क्योंकि दोनों कोणों का माप समान क्षैतिज समान्तर तल से प्राप्त किया जाता है।)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. एक समतल पर खड़ी एक मीनार की छाया की लंबाई, मीनार की ऊँचाई की $\sqrt{3}$ गुणा है। सूर्य का उन्नयन कोण होगा– (CBSE 2012)

(a) 45° (b) 30°

(c) 60° (d) 90°

2. दो खम्भों, जिनकी ऊँचाई 16 मी व 10 मी. है, के शिखर एक तार द्वारा जुड़े है जिसकी लंबाई l मीटर है। यदि तार समतल/क्षैतिज से 30° पर झुकी है तो $l =$

(a) 26 मीटर (b) 16 मीटर

(c) 12 मीटर (d) 10 मीटर

3. एक 6 मीटर ऊँचा खम्भा भूमि पर $2\sqrt{3}$ मीटर लंबी छाया बना रहा है। सूर्य का उन्नयन कोण होगा– (CBSE 2017)

(a) 30° (b) 60°

(c) 45° (d) 90°

4. एक सीढ़ी दीवार के साथ 60° के उन्नयन कोण पर झुकी हुई है। यदि सीढ़ी का पैर दीवार से 2.5 मीटर की दूरी पर स्थित है तो सीढ़ी की लम्बाई है– (CBSE 2016)

(a) 3 मीटर (b) 4 मीटर

(c) 5 मीटर (d) 6 मीटर

5. यदि एक मीनार जो 30 मीटर ऊँची है, भूमि पर $10\sqrt{3}$ मीटर लंबी छाया बनाती है तो सूर्य का उन्नयन कोण होगा– (CBSE 2017)

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

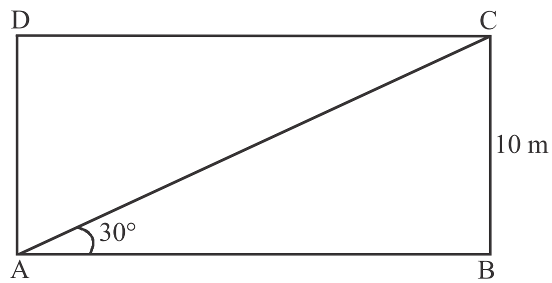
6. एक मीनार 50 मीटर उँचा है। जब सूर्य का उन्नयन कोण 45° है, तो मीनार की छाया क्या होगी?

7. एक 50 मीटर लंबे बॉस की छाया $\frac{50}{\sqrt{3}}$ मीटर है। सूर्य का उन्नतांश ज्ञात कीजिए।

8. $10\sqrt{3}$ मी0 ऊंचाई वाली एक मीनार के शिखर का भूमि पर उस मीनार के पाद से 30 मी0 की दूरी पर स्थित बिन्दु से उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए।

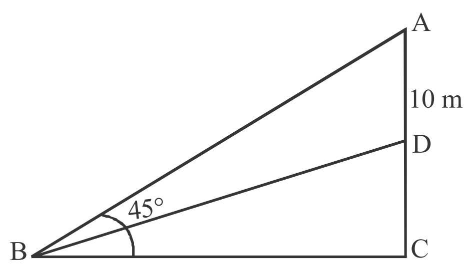
9. एक पतंग समतल भूमि से $50\sqrt{3}$ मी0 ऊंचाई पर उड़ रही है, एक डोर से बंधी है, जो क्षैतिज से 60° कोण पर झुकी है। डोर की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

10. दी गई आकृति में आयत ABCD का परिमाप ज्ञात कीजिए।



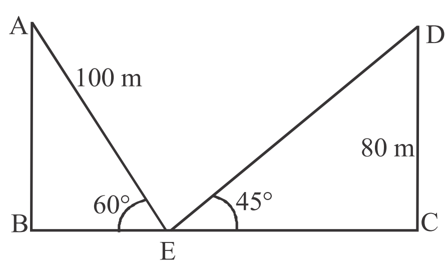
11. एक स्तंभ की छाया की लम्बाई उसकी ऊँचाई का $\sqrt{3}$ गुणी है प्रकाश के स्रोत का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए।

12. आकृति में DC का मान कीरिए।

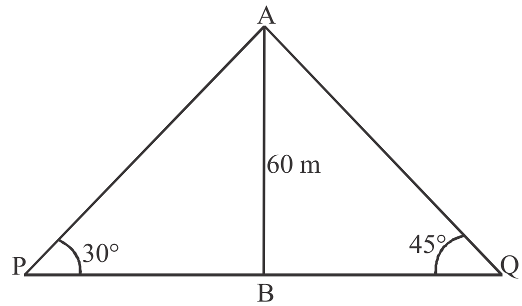


लघु उत्तरीय प्रश्न

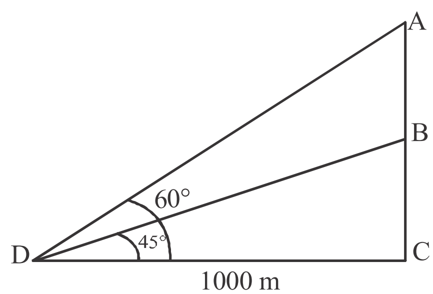
13. आकृति में BC का मान कीरिए।



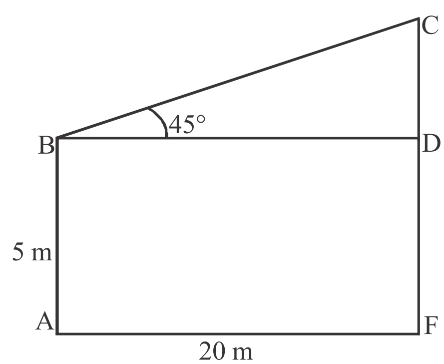
14. आकृति में दो व्यक्ति एक मीनार के विपरीत दिशा में P तथा Q पर खड़े हैं यदि मीनार AB की ऊंचाई 60मी0 है तो दोनों व्यक्तियों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।



15. आकृति में AB का मान ज्ञात कीजिए।



16. आकृति में CF का मान ज्ञात कीजिए।



17. यदि नाव की पुल से क्षैतिज दूरी 25 मी0 हो और पुल की ऊँचाई 25मी0 हो तो नाव का पुल से अवनमन कोण बताइए।

18. यदि किसी मीनार की छाया की लंबाई बढ़ रही है तो इसका अर्थ है कि सूर्य का उन्नयन कोण भी बढ़ रहा है। (सत्य/असत्य)

19. एक व्यक्ति जहाज के डेक पर समुद्र तल से 3 मीटर की ऊँचाई पर खड़ा होकर एक बादल व समुद्र में उसकी छाया को देखता है। ऐसी स्थिति में बादल का उन्नयन कोण व छाया का अवनमन कोण बराबर होगा। (सत्य/असत्य)

20. एक मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण 30° है। यदि मीनार की ऊँचाई दुगुनी कर दी जाए तो उन्नयन कोण भी दुगुना हो जाएगा। (सत्य/असत्य)

लघु उत्तरीय प्रश्न

21. एक पहाड़ी के शिखर से पूर्व की ओर दो क्रमागत के पत्थरों के अवनमन कोण 30° और 45° के है। पहाड़ी की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

22. एक पतंग के धागे की लम्बाई 150 मी0 है तथा यह भूमितल के साथ 60° का कोण बनाती हैं। पतंग की भूमितल से ऊंचाई ज्ञात कीजिए। (मान लीजिए धागे में कोई ढील नहीं है।)

23. सूर्य का उन्तांश 45° के स्थान पर 30° होने पर एक मीनार की छाया 10 मी0 अधिक हो जाती है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

24. एक वायुयान 200 मी की ऊंचाई पर है। इससे एक नदी के दो किनारों के अवनमन कोण 45° और 60° के हैं। नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

25. एक मीनार की चोटी का एक बिन्दु पर उन्नयन कोण 45° का है। मीनार की ओर 40 मी0 चलने पर यह कोण 60° का हो जाता है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

26. एक वृक्ष का उपरी भाग टूटकर अपने पाद से 25 मी0 की दूरी पर भूमि को स्पर्श करता है तथा मूमि के साथ 30° का कोण बनाता है। वृक्ष की कुल ऊंचाई क्या थी?

27. एक ऊर्ध्वाधर ध्वजदंड एक समतल में लगा है। इसके शिखर का 100 मी0 की दूरी पर एक बिदुं से उन्नयन कोण 45° का है। ध्वजंदड की ऊंचाई ज्ञात करिए।

28. एक पतंग के धागे की लम्बाई 200 मी0 है यदि धागा भूमितल के साथ a कोण बनाता है और $\sin a = \frac{3}{5}$ हो तो पतंग की ऊंचाई ज्ञात कीजिए जबकि धागे में कोई ढील नहीं हैं।

29. एक वायुयान 3000 मी0 की ऊंचाई पर उड़ रहा है। वह एक दूसरे वायुयान के उपर से गुजरता है। ठीक उसी समय दोनों वायुयानों के भूमि तल पर एक बिन्दु पर उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 45° के होते हैं। दोनों वायुयानों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

30. एक मीनार के शिखर पर 7 मीटर ऊंचा एक ध्वजदंड लगा है। भूमि तल पर स्थिति एक बिंदु A पर दंड के शिखर उन्नयन कोण क्रमशः 45° व 30° के है। मीनार की ऊंचाई व पाद ज्ञात कीजिए।

31. एक 7 मी0 ऊंचे भवन के शिखर से एक मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण 60° तथा मीनार के पाद का अवनमन कोण 30° है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

32. आनन्द एक सर्कस खिलाड़ी को रस्सी पद चढ़ते देख रहा है जोकि 20 मी लम्बी है और एक ऊर्ध्वाधर खंबे से बंधी है। यदि रस्सी जमीन के साथ 30° का कोण बनाती है तो खंभे की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

33. एक झील से 60 मी0 ऊंचाई पर स्थित एक बिन्दु पर बादल का उन्नयन कोण 30° का है और बादल के झील में प्रतिबम्ब का उसी बिन्दु पर अवनमन कोण 60° का है। बादल की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

34. एक व्यक्ति पानी के जहाज पर पानी से 10 मी0 की ऊंचाई के तल पर खड़ा है। वह देखता है कि सामने की पहाड़ी के शिखर का उन्नयन कोण 60° का है तथा पहाड़ी के आधार पर अवनमन कोण 30° का हैं। जहाज से पहाड़ी की दूरी और पहाड़ी की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

35. गली के एक मकान की खिड़की जिसकी ऊंचाई भूमि तल से 60 मी0 है से गली की विपरित दिशा में सामने बने मकान के शीर्ष के उन्नयन कोण तथा अवनमन कोण क्रमशः 60° व 45° के हैं। दर्शाइए कि विपरीत दिशा में बने मकान की ऊंचाई $60(1+\sqrt{3})$ मी0 है।

36. एक वायुयान का भूमि के केन्द्र A से उन्नयन कोण 60° है। 30° सेकण्ड की उड़ान के पश्चात यह उन्नयन कोण 30° हो जाता है। यदि वायुयान $3600\sqrt{3}$ मी0 की अचर ऊंचाई पर उड़ रहा हो तो वायुयान की गति किमी/ घंटा में ज्ञात कीजिए।

37. 80 मीटर ऊंचे पेड़ के शिखर पर एक पक्षी बैठा है। पृथ्वी के किसी बिंदु से पक्षी का उन्नयन कोण 45° है। पक्षी क्षैतिज दिशा में प्रेक्षण बिन्दु के विपरीत इस प्रकार उड़ता है कि वह सदा समान ऊंचाई पर रहता है। 2 सेकण्ड बाद प्रेक्षण बिन्दु से पक्षी का उन्नयन कोण 30° हो जाता है। पक्षी की उड़ने की गति ज्ञात कीजिए।

38. किसी मीनार के आधार से 9 मी0 तथा 4 मी0 की दूरियों पर एक ही रेखा में स्थित दो बिंदुओं से देखने पर मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण पाए जाते हैं। मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

39. क्षैतिज तल पर खड़ा एक लड़का 100 मी0 की दूरी पर एक पक्षी को 30° के उन्नयन कोण पर देखता है। एक लड़की जो कि 20 मी0 उँचे भवन पर खड़ी है उसी पक्षी को 45° के कोण पर देखती है। यदि लड़का और लड़की पक्षी की विपरीत दिशा में है तो पक्षी की लड़की से दूरी ज्ञात कीजिए।

40. 100 मीटर उँचे प्रकाश–स्तंभ की चोटी से एक प्रेक्षक समुद्र में एक जहाज को ठीक अपनी ओर आते हुए देखता है। यदि जहाज का अवनमन कोण 30° से बदलकर 60° हो जाता है तो प्रेक्षण की अवधि में जहाज द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

41. 60 मी0 ऊंचे एक भवन के शिखर से एक प्रकाश–स्तंभ के शिखर तथा पाद के उन्नयन तथा अवनमन कोण क्रमशः 30° व 60° के है। ज्ञात कीजिए

(i) प्रकाश–स्तंभ तथा भवन की ऊंचाई में अंतर

(ii) प्रकाश–स्तंभ तथा भवन के बीच की दूरी।

42. एक सीधी सड़क पर दो दमकल केन्द्र P तथा Q हैं। उनके बीच की दूरी 20 किमी है। केन्द्रों को फोन द्वारा सूचना प्राप्त होती है कि बिल्डिंग B में आग लग गई है। बिल्डिंग B केन्द्र P से 60° तथा केन्द्र Q से 45° पर स्थित है। ज्ञात कीजिए : किस केन्द्र को अपनी बचाव टीम भेजनी चाहिए? ताकि जल्दी से जल्दी आग बुझाने का काम शुरू हो सके। उस टीम को बिल्डिंग तक पहुंचने कितनी दूरी तय करनी पडेगी?

43. गणंतत्र दिवस के उपलक्ष में 1.2 मी0 लम्बी लड़की भूमि से 8.2 मी0 की ऊंचाई पर एक क्षैतिज रेखा में हवा में उड़ रहे गुब्बारे को देखती है। किसी क्षण लड़की की आँख से गुब्बारे का उन्यमन कोण 60° है कुछ समय बाद उन्नयन कोण घटकर 30° हो जाता है। इस अंतराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

44. एक झील के तल से 60 मीटर की ऊँचाई से एक बादल का उन्नयन कोण 30° है व उसी स्थान से झील में बादल की छाया का अवनमन कोण 60° है। झील के तल से बादल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। [CBSE 2016]

45. दो समान ऊँचाई के खंभे एक 50 मीटर चौड़ी सड़क के दोनों ओर खड़े हैं। सड़क के बीच किसी बिंदु से, जो कि दोनों खम्भों के मध्य है, दोनों खम्भों के शीर्षो का उन्नयन कोण 60° व 30° है। खम्भों की ऊँचाई व बिंदु की स्थिति ज्ञात कीजिए। [CBSE 2011]

46. एक मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण 30° है। यदि प्रेक्षक मीनार की ओर 20 मीटर चलता है तो उन्नयन कोण 15° बढ़ जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

47. एक 150 मीटर ऊँची पहाड़ी से, पहाड़ी से दूर जाती एक नाव को देखा जाता है। तो नाव का अवनमन कोण 2 मिनट में 60° से 45° हो जाता है। नाव की चाल मीटर/घण्टा में ज्ञात कीजिए। [CBSE 2017]

48. एक 120 मीटर ऊँची मीनार के शीर्ष से एक व्यक्ति मीनार के विपरीत दिशा में दो कारों को देखता है जो कि मीनार के तल से एक क्षैतिज रेखा पर हैं, 60° व 45° के अवनमन कोण बना रही हैं। दोनों कारों के बीच की दूरी ज्ञात करें। ($\sqrt{3} = 1.732$)

[CBSE 2017]

49. h मीटर ऊँचाई वाले एक मीनार के शीर्ष से दो वस्तुओं, जो मीनार के तल से एक क्षैतिज रेखा है, के अवनमन कोण α व β हैं। ($\beta > \alpha$) दोनों वस्तुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। [NCERT Exemplar]

50. एक घर की खिड़की भूमि से h मीटर की ऊँचाई पर स्थित है खिड़की से देखने पर गली के दूसरी ओर स्थित एक अन्य इमारत के शीर्ष व तल के उन्नयन व अवनमन कोण क्रमशः α एवं β हैं। सिद्ध कीजिए कि इमारत की ऊँचाई $h(1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta)$ मीटर है।

[NCERT Exemplar]

उत्तर एवं संकेत

1. (b)
2. (c)
3. (b)
4. (c)
5. (c)
6. 50 मीटर
7. 60°
8. 30°
9. 100 मीटर
10. $20\left(\sqrt{3}+1\right)$ मीटर
11. 30°
12. 60 मीटर
13. 130 मीटर
14. $60\left(\sqrt{3}+1\right)$ मीटर
15. $1000\left(\sqrt{3}-1\right)$ मीटर
16. 25 मीटर
17. 45
18. असत्य
19. असत्य
20. असत्य

21. 1.37 km

22. $75\sqrt{3}$ मीटर

23. 13.65 मीटर

24. 315.8 मीटर

25. 94.8 मीटर

26. 43.3 मीटर

27. 100 मीटर

28. 120 मीटर

29. 1268 मीटर

30. 9.6 मीटर

31. 28 मीटर

32. 10 मीटर

33. 120 मीटर

34. 40 मीटर, 17.32 मीटर

36. 864 किमी / घण्टा

37. 29.28 मीटर

38. 6 मीटर

39. $30\sqrt{2}$ मीटर

40. 115.5 मीटर

41. 20 मीटर, 34.64 मीटर

42. स्टेशन P, 14.64 किमी

43. $58\sqrt{3}$ मीटर

44. 120 मीटर

45. ऊँचाई = 64.95 मीटर, स्थिति = 112.5 मीटर

46. $10(\sqrt{3}+1)\ m$

47. 1902 मीटर / घण्टा

48. 189.28 मीटर

49. $h(\cot\alpha - \cot\beta)$ मीटर

अभ्यास प्रश्न–प्रत्र

त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

समय : 1 घंटा *अंक : 20*

खण्ड–अ

1. 6 मी0 ऊंचे जमीन पर खड़े एक खंबे की छाया की लम्बाई $2\sqrt{3}$ मी0 है तो सूर्य का उन्नताशं ज्ञात कीजिए। **1**

2. एक मीनार की ऊंचाई 100 मीटर है, जब सूर्य का उन्नयन कोण 30° है तो मीनार की छाया की लम्बाई ज्ञात कीजिए। **1**

3. h मीटर ऊँचे खम्भे की छाया $\sqrt{3}h$ मीटर लंबी है तो सूर्य का उन्नयन कोण है– **1**

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

4. एक 1.5 मीटर ऊँचाई वाला प्रेक्षक 22 मीटर ऊँची मीनार से 20.5 मीटर की दूरी पर खड़ा है। मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण होगा– **1**

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 0°

खण्ड–ब

5. समतल पर स्थित एक बिन्दु की मीनार के पाद से दूरी 20 मी0 है तथा उन्नयन कोण 60° हो तो मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए। **2**

6. एक मीनार की ऊंचाई तथा इसकी छाया का अनुपात $1:\frac{1}{\sqrt{3}}$ है। उस क्षण सूर्य का उन्नयन कोण बताइये। **2**

7. एक मीनार के शीर्ष का उननयन कोण 30° है। यदि मीनार की ऊँचाई तीन गुणा कर दी जाए तो सिद्ध कीजिए कि उन्नयन कोण की माप दोगुनी हो जाएगी। **2**

खण्ड–स

8. दो मीनारों के शीर्ष, जिनकी ऊँचाई क्रमशः x व y हैं, उनके पदों को मिलाने वाली रेखा के मध्य 30° व 60° का अवनमन कोण बनाते हैं। $x : y$ ज्ञात कीजिए।

9. एक चट्टान के शिखर के 100 मी0 ऊंची मीनार के शिखर व पाद से उन्ययन कोण क्रमशः 30° तथा 45° है। चट्टान की ऊंचाई ज्ञात कीजिए। **3**

खण्ड–द

10. एक व्यक्ति पानी के जहाज पर पानी से 10 मीटर ऊंचाई के तल पर खड़ा है वह देखता है कि सामने की पहाड़ी के शिखर का उन्नयन कोण 60° का है तथा पहाड़ी के आधार का अवनमन कोण 30° का है। जहाज से पहाड़ी की दूरी और पहाड़ी की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

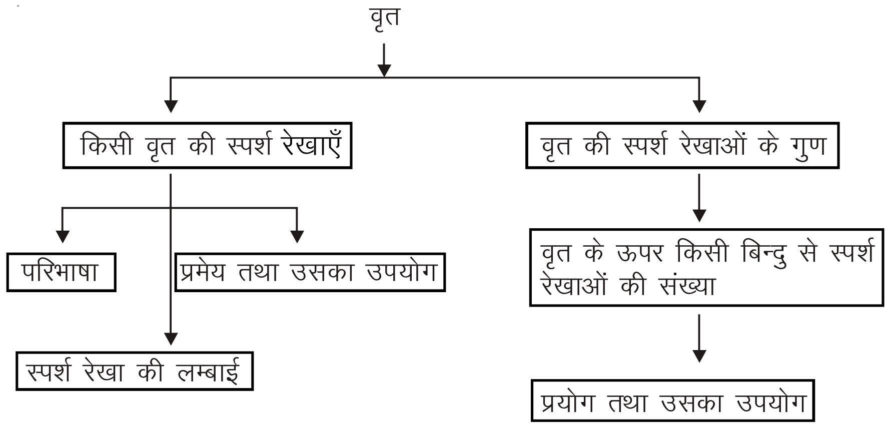
10

अध्याय

वृत्त

विषयः किसी वृत की स्पर्श रेखाएँ तथा वृत के किसी बिन्दु से स्पर्श रेखाओं की संख्या।

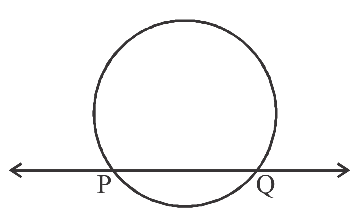
माइंड मैंपिंग



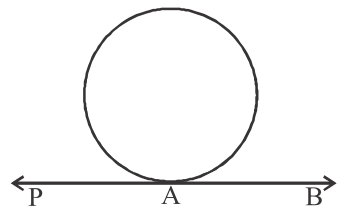
महत्त्वपूर्ण बिंदुः

1. वृत्त उन बिन्दुओं के समूह से बनता है जो एक निश्चित बिन्दु से अचर दूरी पर होते हैं। निश्चित बिन्दु वृत्त का केन्द्र कहलाता है और अचर दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।

2. **छेदक रेखा**—यदि कोई रेखा किसी वृत्त को दो अभिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हो तो वह छेदक रेखा कहलाती है।



3. **वृत की स्पर्श रेखा**—वृत की स्पर्श रेखा वह रेखा होती है जो वृत्त को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। जिस बिन्दु पर स्पर्श रेखा वृत्त को स्पर्श करती है उसे स्पर्श बिन्दु कहते हैं।



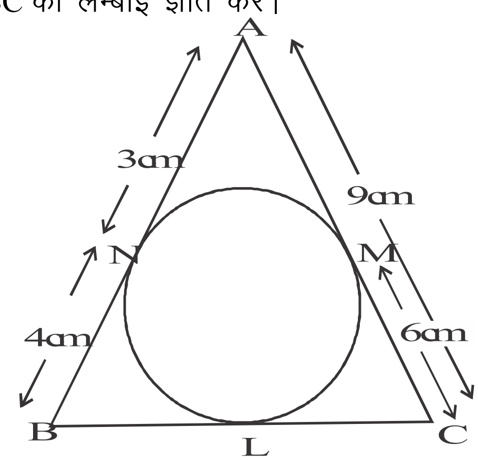
4. **स्पर्श रेखा की संख्याएं**—किसी वृत पर अंसख्य स्पर्श रेखाएं बनाई जा सकती हैं।
5. **छेदक रेखा की संख्याएं**—किसी वृत्त पर असंख्य छेदक रेखाएं बनाई जा सकती हैं।
6. निम्न प्रमेय सिद्ध करने के लिए पूछी जा सकती है—

   (i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

   (ii) किसी बाहय बिन्दु से वृत्त पर बनी स्पर्श रेखाओं की लंबाई बराबर होती है।
7. किसी वृत्त पर किसी बिन्दु से केवल एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।
8. स्पर्श रेखा, छेदक रेखा का एक विशेष प्रकार है।
9. वृत्त के अंतः भाग के किसी बिन्दु से कोई भी स्पर्श रेखा नहीं खींची जा सकती है।
10. वृत्त के उपर किसी बिन्दु से गुजरती हुई केवल एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।
11. वृत्त के किसी बाहरी बिन्दु से वृत्त पर केवल दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

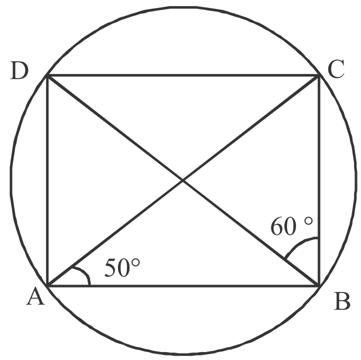
अतिलघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिए गए चित्र में BC की लम्बाई ज्ञात करें।

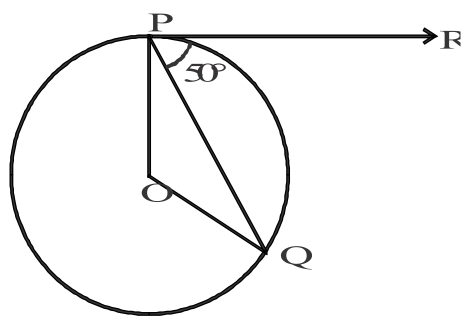


2. यदि बाह्य बिन्दु P से स्पर्श रेखा की लम्बाई 24 cm है। यदि इस स्पर्श रेखा की केन्द्र से दूरी 25 cm है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करें।

3. दिए गए चित्र में ABCD एक चतुर्भुज है। यदि $\angle BAC = 50°$, $\angle DBC = 60°$ तो $\angle BCD$ का मान ज्ञात करें।



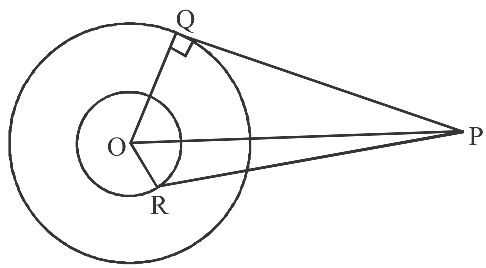
4. दिए गए चित्र में O वृत्त का केन्द्र है, PQ एक जीवा है और स्पर्श रेखा PR बिन्दु P पर 50° का कोण PQ के साथ बनाती है। $\angle POQ$ ज्ञात करें।



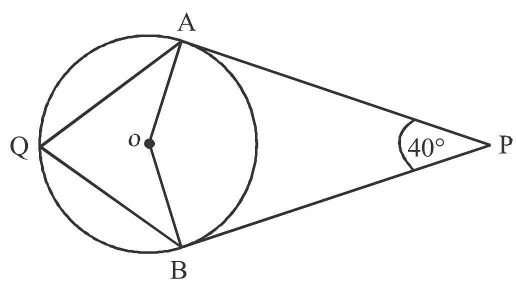
5. यदि दो स्पर्श रेखाऐं, 3 cm त्रिज्या वाले वृत्त पर इस प्रकार बनाई गई कि उनके बीच का कोण 60° हो तो स्पर्श रेखाओं की लंबाई ज्ञात करें।

6. दो संकेन्द्री वृत्तों की त्रिज्याएं 4 cm और 5 cm है। एक वृत्त की जीवा की लम्बाई ज्ञात करें जो दूसरे वृत्त पर स्पर्श रेखा हो।

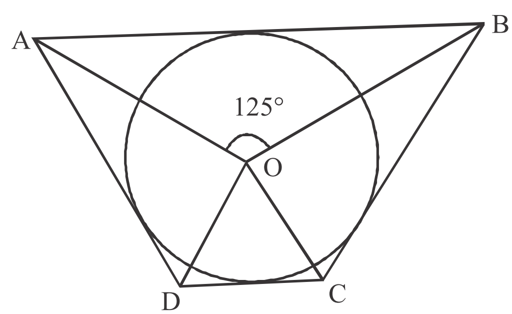
7. दिए गए चित्र में PQ बाह्य वृत्त का और PR अंतः वृत्त की स्पर्श रेखाएं हैं। यदि PQ = 4 cm, OQ = 3 cm और, OR = 2 cm हो तो PR की लम्बाई ज्ञात करें।



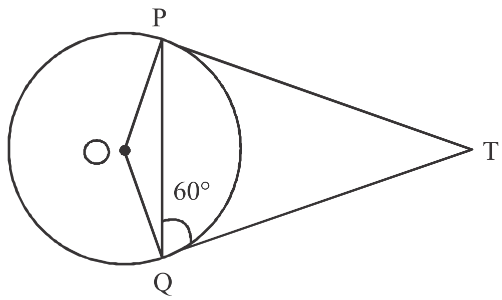
8. दिए गए चित्र में ∠AQB ज्ञात करें। **(CBSE 2016 Foreign)**



9. दिए गए चित्र में ∠ABQ = 125° है तो ∠COD ज्ञात करें।



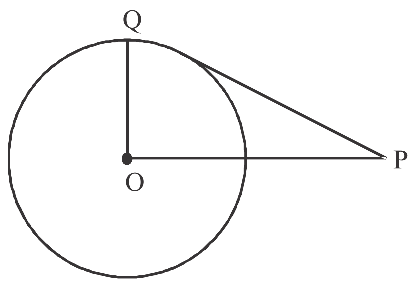
10. यदि TP और TQ बाह्य बिन्दु T से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएं हैं और $\angle TQP = 60°$ है तो $\angle OPQ$ ज्ञात करें।



11. एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं? **[NCERT]**

12. किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे .... बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है। **[NCERT]**

13.



यदि PQ एक स्पर्श रेखा है तो $\angle POQ + \angle QPO$ का मान बताइए।

14. सही विकल्प चुनिए:

5 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि OQ = 12 सेमी. है। PQ की लम्बाई है–

(a) 12 सेमी.

(b) 13 सेमी.

(c) 8.5 सेमी.

(d) $\sqrt{119}$ सेमी. [NCERT]

15. एक वृत्त की .... समांतर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं। [NCERT]

16. वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को .... कहते हैं। [NCERT]

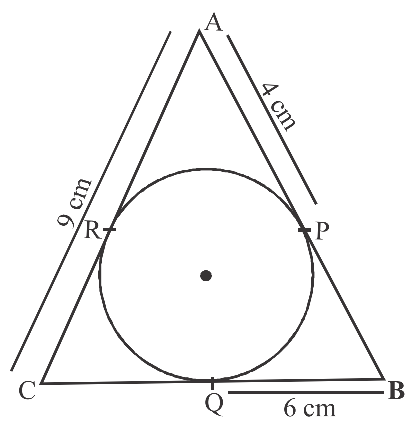
लघु उत्तरीय प्रश्न–I

17. यदि दो संकेन्द्री वृत्तों का व्यास d_1 तथा d_2 हो $(d_1 > d_2)$ तथा c वृत्त की जीवा की लम्बाई हो जो दूसरे वृत्त पर स्पर्श रेखा है। सिद्ध करो कि $d_2^2 = c^2 + d_1^2$

18. 2.5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर बाह्य बिन्दु P से स्पर्श रेखा की लम्बाई 6 सेमी है। बिन्दु P की वृत्त के निकटतम बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।

19. केन्द्र O वाले वृत्त की बाह्य बिन्दु T से स्पर्श रेखाएं TP और TQ हैं। यदि $\angle OPQ = 30°$ हो तो $\angle TQP$ का मान ज्ञात करें।

20. आकृति में AP = 4 cm BQ = 6 cm और AC = 9 cm है। ΔABC का अर्द्ध परिमाप ज्ञात करें।



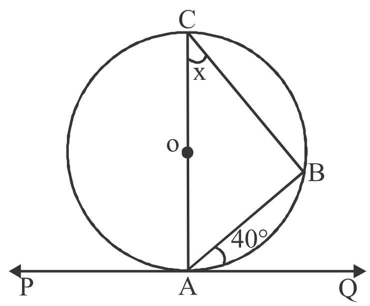
21. एक समकोण त्रिभुज जिसकी भुजाएं a, b तथा c हैं जहां c कर्ण है के अंतर्गत एक वृत्त बना है जो त्रिभुज की सभी भुजाओं को स्पर्श करता है। यदि वृत्त की त्रिज्या r हो तो सिद्ध कीजिए।

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

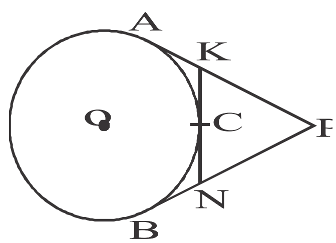
22. सिद्ध करो कि वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से त्रिज्या पर लम्ब होता है।

23. सिद्ध करो कि दो संकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त पर स्पर्श रेखा होती है स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होती है।

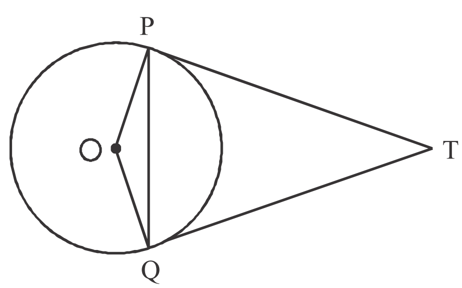
24. आकृति में, AC केन्द्र O वाले वृत्त का व्यास है और A स्पर्श बिन्दु है तो x का मान ज्ञात कीजिए।



25. आकृति में, KN, PA और PB, वृत्त पर स्पर्श रेखाएं हैं। सिद्ध कीजिए KN = AK + BN

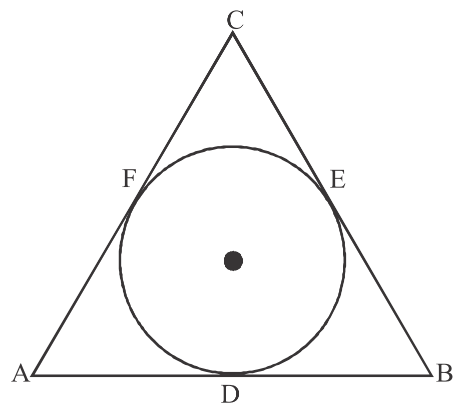


26. आकृति में, जीवा PQ की लम्बाई 6 सेमी तथा वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी है TP और TQ वृत्त की स्पर्श रेखाएं है। ∠PTQ का मान ज्ञात कीजिए।

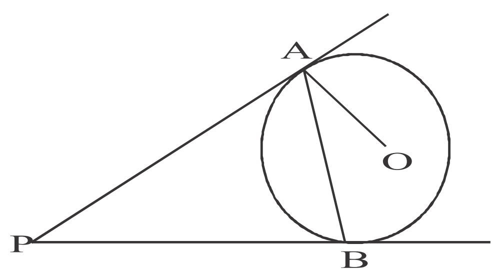


लघु उत्तरीय प्रश्न-II

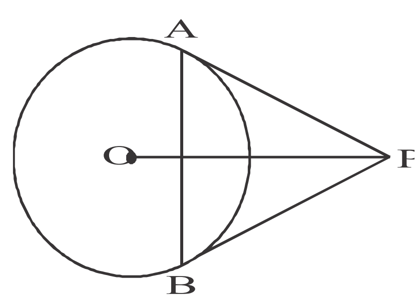
27. दी गई आकृति में, AB = 12 सेमी, BC = 8 सेमी और AC = 10 सेमी है, तो AD, BE और CF का मान ज्ञात कीजिए।



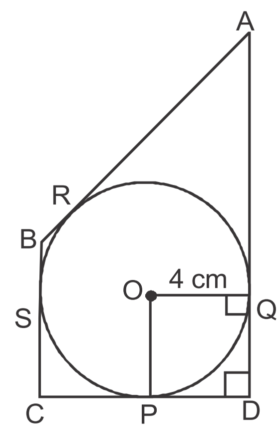
28. बाह्य बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएं PA तथा PB, O केन्द्र वाले वृत्त पर खींची गई। सिद्ध कीजिए $\angle APB = 2\angle OAB$



29. आकृति में OP वृत्त के व्यास के बराबर है, जहां O वृत्त का केन्द्र है। सिद्ध कीजिए $\angle ABP$ एक समबाहु त्रिभुज है।

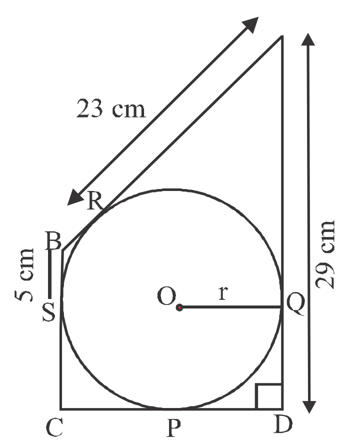


30. आकृति में AB = 13 सेमी, BC = 7 सेमी, AD = 15 सेमी। PC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

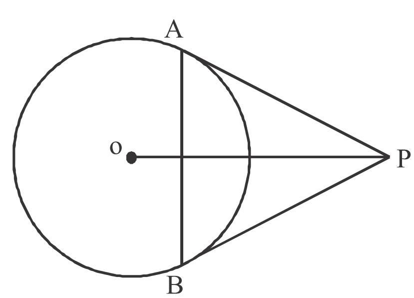


दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

31. आकृति में वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



32. आकृति में PQ वृत्त की स्पर्श रेखा तथा PB व्यास है। x और y के मान ज्ञात कीजिए।

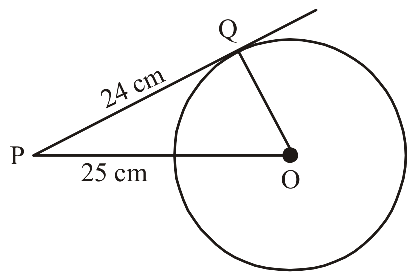


उत्तर तथा संकेत

1. बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती है इसलिए–

$$BN = BL, CM = OL$$
$$BL + CL = BC = 10 \text{ cm}$$

2. पाइथागोरस नियम के द्वारा



पायथागोरस नियम के द्वारा
OQ = 7 cm

3. एक ही वृत्त खण्ड में बने सभी कोणों की माप बराबर होती है।

DC एक जीवा है इसलिए $\angle DAC = 60°$

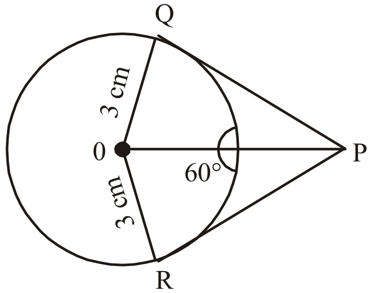
चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है इसलिए $\angle BCD = 70°$।

4. वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

इसलिए $\angle RPO = 90°$

$$\angle OPQ = \angle OQP = 40°$$
$$\angle POQ = 100°$$

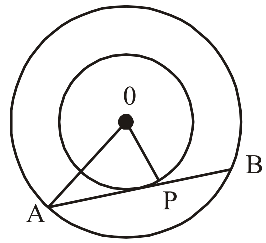
5.



$$\Delta QPO \cong \Delta RPO$$
$$\Rightarrow \angle QPO = \angle RPO = 30°$$

In ΔQPO, $\underline{|OQP} = 90°$ (स्पर्श रेखा और त्रिज्या के बीच का कोण 90° का होता है)

6. $\tan 30° = \dfrac{OQ}{QP} \Rightarrow QP = 3\sqrt{3}$ cm



ΔAOP में P पर समकोण है

$$OA^2 = AP^2 + OP^2$$
$$\Rightarrow \quad (5)^2 = AP^2 + 4^2$$
$$\Rightarrow \quad AP^2 = 9$$
$$\Rightarrow \quad AP = 3$$
$$AB = 6 \text{ cm}$$

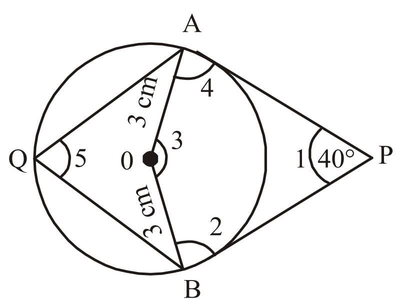
7. ΔPQO में

$$(4)^2 + (3)^2 = (OP)^2$$
$$5 = OP$$

ΔPRO में

$$(5)^2 = (2)^2 + (PR)^2$$
$$PR = \sqrt{21} \text{ cm}$$

8.



चतुर्भुज PROQ में

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360°$

$\angle 1 + \angle 3 = 180°$

$\angle 3 = 140°$

तो $\angle 3 = 2\angle 5$

$\angle 5 = 70°$

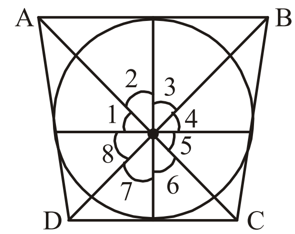
or $\angle AQB = 70°$

9. $\angle 1 = \angle 2$

$\angle 3 = \angle 4$

$\angle 5 = \angle 6$

$\angle 7 = \angle 8$



संगत त्रिभुजों के संगत भाग

$2(\angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7) = 360°$

$\angle AOB + \angle COD = 180°$

$\angle COD = 55°$

10. $\angle OQT = 90°$ स्पर्श रेखा तथा त्रिज्या के बीच
11. अपरिमित रूप से अनेक
12. एक
13. 90° क्योंकि $\angle OQP = 90°$ (स्पर्श रेखा तथा त्रिज्या के बीच का कोण
14. D($\sqrt{119}$ cm)
15. दो
16. स्पर्श बिन्दु
17.

$$AO^2 = OP^2 + AP^2$$

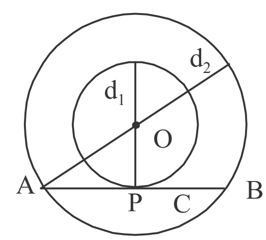
$$\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + AP^2$$

$$\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = AP^2$$

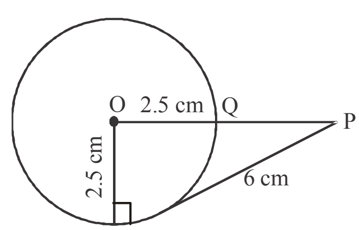
$$\sqrt{\frac{1}{4}\left[(d_2)^2 - (d_1)^2\right]} = AP$$

$$2\sqrt{\frac{1}{4}\left[(d_2)^2 - (d_1)^2\right]} = AB$$

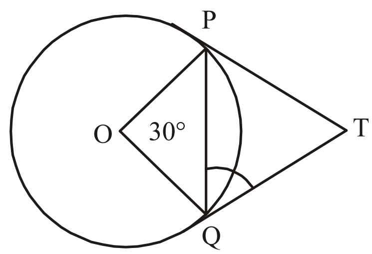
$$d_2^{\,2} = c^2 - d_1^{\,2}$$



18. $(OP)^2 = (OT)^2 + (PT)^2$



$$(OP)^2 = (2.5)^2 + (6)^2$$
$$= 42.25$$
$$= (6.5)^2$$
$$QP = 4 \text{ cm}$$

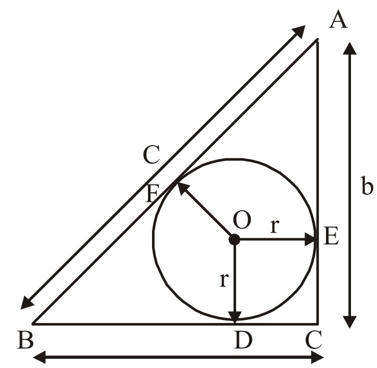
19. 

$$\angle OQP = \angle OPQ = 30°$$
$$\angle OQT = 90°$$

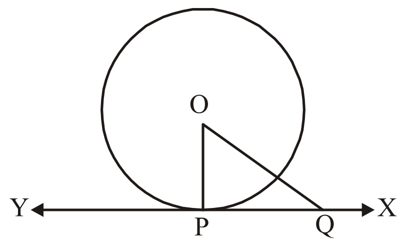
(स्पर्श रेखा तथा त्रिज्या के बीच का कोण)

$$\angle TQP = \angle OQT - \angle OQP$$
$$= 90° - 30° = 60°$$

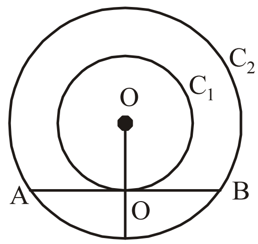
20.
$$AP = AR = 4 \text{ cm}$$
$$CR = CQ = 5 \text{ unor } (9-4) \text{ cm}$$
$$QB = BP = 6 \text{ cm}$$
$$= \frac{1}{2}[AC + AB + BC]$$
$$= \frac{1}{2}[9 + 10 + 11]$$
$$= 15 \text{ cm}$$

21.


$$b - r = AF,$$
$$a - r = BF$$
or $$AB = C = AF + BF$$
$$= b - r + a - r$$
$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

22. 

(प्रमेय 10.1 NCERT)

23. 

OP को मिलाइए–

AB C_1 की P पर स्पर्श रेखा है तथा OP त्रिज्या है।

$OP \perp AB$

AB वृत्त C_2 की जीवा है और $OP \perp AB$ इसलिए OP जीवा AB का लम्ब समद्विभाजक है। वृत्त के केन्द्र से गिराया गया लम्बा जीवा को दो बराबर भागों में बाँटता है।

i.e., $AP = BP$

24. $\angle OAB = 50°$

$x + \angle B + \angle OAB = 180°$

$x + 90° + 50° = 180°$

$x = 40°$

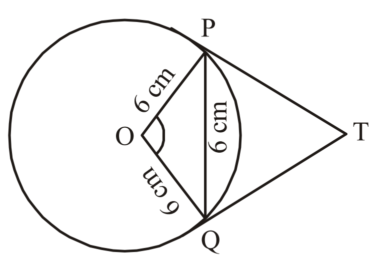
25. $AK = KC$ ...(1)

$BN = NC$ ...(2)

$KN = KC + NC$

$= AK + BN$

(1) और (2) से

26. 

$\angle POQ + \angle PTQ = 180°$

$60° + \angle PTQ = 180°$

$\angle PTQ = 120°$

27. $AC = AF + FC = 10$ cm ...(1)

$AB = AD + DB = 12$ cm ...(2)

$BC = BE + CE = 8$ cm ...(3)

$$\begin{bmatrix} \therefore & BD & = & BE \\ & AD & = & AF \\ & CF & = & CE \end{bmatrix} \quad ....4$$

(4) से मान (1, 2, 3) में रखने पर ताकि (5) + (6) + (7) में 2AD, 2FC, 2BC का मान प्राप्त हो सके।

$AC = AD + FC = 10$ cm ...(5)

$AB = AD + DB = 12$ cm ...(6)

$BC = BD + CF = 8$ cm ...(7)

(5) + (6) + (7) करने पर

$2(AD + FC + DB) = 30$

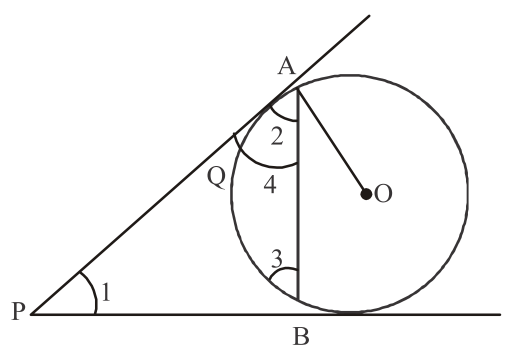
$AD + FC + DB = 15$

(1), (2) (3) से मान रखने पर

$AD = 7$ cm,

$BE = 5$ cm

$CF = 3$ cm



PA = PB है इसलिए

$$\angle 2 = \angle 3 = \frac{1}{2}(180° - \angle 1)$$

$$\angle 2 = \angle 3 = 90° - \frac{1}{2}\angle 1$$

$\angle 4 = 90°$

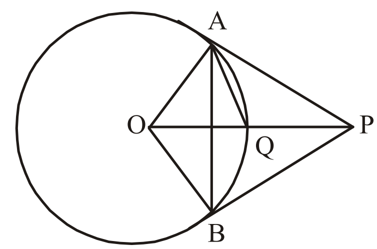
स्पर्श रेखा तथा त्रिज्या के बीच का कोण

$\angle OAB = \angle 4 - \angle 2$

$= 90° - (90° - \frac{1}{2}\angle 1)$

$= 90° - 90° + \frac{1}{2}\angle 1$

$\angle OAB = \frac{1}{2}\angle APB$



$2\angle OAB = \angle APB$

$OP = 2r$

$\Rightarrow \quad OQ = QP = r$

ΔAOP में $OA \perp AP$

तथा OP कर्ण है।

$OQ = AQ = OA$

क्योंकि कर्ण का मध्य बिन्दु शीर्षों से समान दूरी पर होता है,

$\Rightarrow$ OAQ एक समबाहु त्रिभुज है।

$\Rightarrow \quad \angle AOQ = 60°$

$\angle OAP = 90°$

$\Rightarrow \quad \angle APO = 30°$

$\angle APB = 2\angle APO = 60°$

$PA = PB$

स्पर्श रेखाएँ

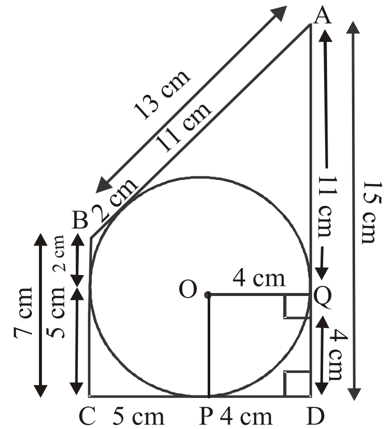
$\Rightarrow \quad \angle PAB = \angle PBA$

Δ में $\angle APB = 60°$ है।

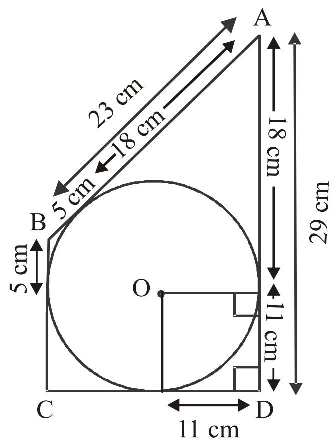
$\angle PAB = \angle PBA = 60°$

Δ PAB में प्रत्येक कोण 60° का है।

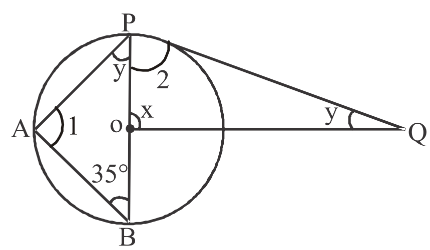
30. PC and CP = 5 cm



31. $r = 11$ cm



32. ΔABC में $\angle 1 = 90°$ (अर्धवृत्त में बना कोण)



$\angle 1 + 35° + y = 180°$

$90° + 35° + y = 180°$

$y = 55°$

ΔOBQ में

$\angle 2 = 90°$

स्पर्श रेखा तथा त्रिज्या के बीच का कोण

$\angle 2 + \angle x + \angle y = 180°$

$90° + \angle x + 55° = 180°$

$x = 35°$ अभ्यास प्रश्न–प्रत्र

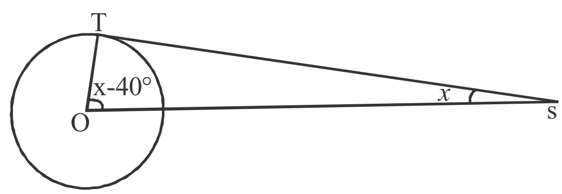
अभ्यास प्रश्न–पत्र

वृत्त

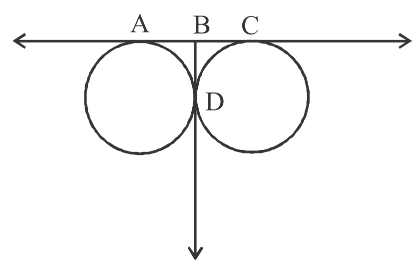
समय : 50 मिनट | *अंक : 20*

खण्ड–अ

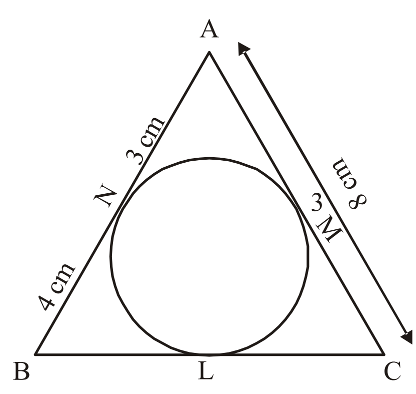
1. दिए गए चित्र में x का मान ज्ञात करें। **1**



2. दिए गए चित्र में AC = 9 है। BD ज्ञात करें। **1**



3. दी गई आकृति में, ΔABC में एक वृत्त बना है। भुजा BC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

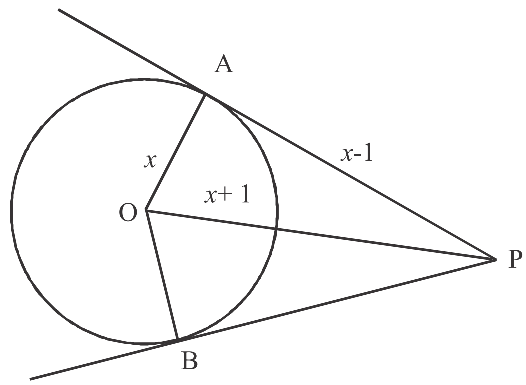


4. एक वृत्त के किसी बाह्य बिन्दु P से, PA तथा PB स्पर्श रेखाएँ खींची गई हैं। यदि O वृत्त का केन्द्र और $\angle PAB = 50°$ हो तो $\angle AOB$ की माप बताइए। **1**
[Delhi CBSE 2016]

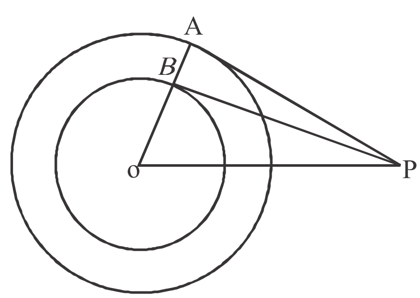
खण्ड – ब

5. यदि किसी वृत्त जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या a है, के किसी बाह्य बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएँ खींची गई हैं। यदि दोनों स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण 60° है तो OP की लम्बाई ज्ञात कीजिए। [All India 2017] **2**

6. x का मान ज्ञात करें। **2**

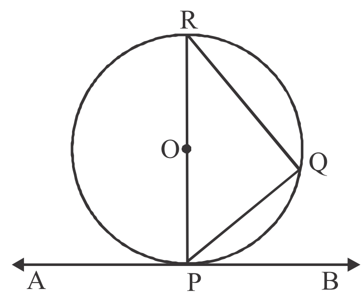


7. दो संकेन्द्री वृत्तों की त्रिज्या 6 cm और 3 cm है। बाह्य बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएं PA और PB बनाई गई। यदि AP = 10 cm है तो BP ज्ञात करें। **2**

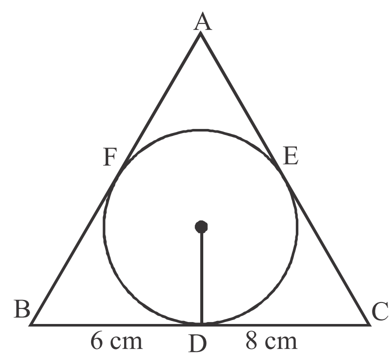


खण्ड–स

8. दिए गए चित्र में सिद्ध करें $\angle BPQ = \angle PRQ$ जहां AB वृत्त की स्पर्श रेखा है। **3**

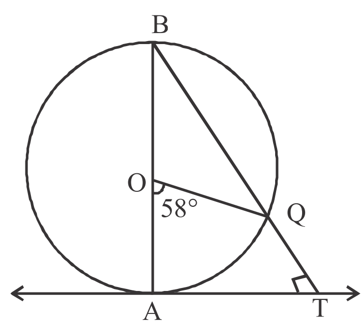


9. एक त्रिभुज ABC के अन्तर्गत बने वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी है। BD = 6 सेमी DC = 8 सेमी है। यदि ΔABC का क्षेत्रफल 63 वर्ग सेमी हो तो भूजा AB ज्ञात करें। **3**



खण्ड–द

10. AB वृत्त का व्यास है। AT उसकी स्पर्श रेखा है। यदि $\angle AOQ = 58°$ है तो $\angle ATQ$ ज्ञात करें **4**



11

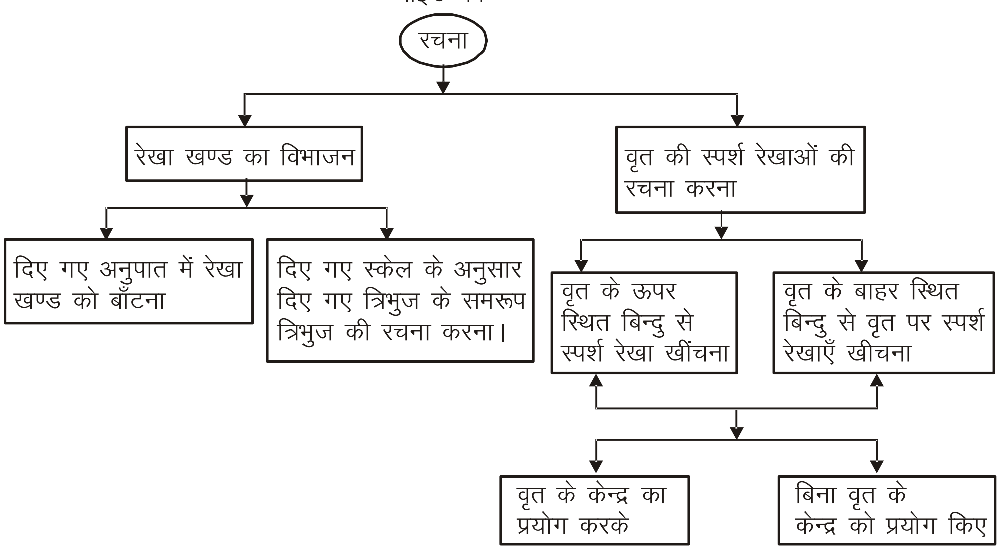
अध्याय

रचनाएं

विषय

- **रेखा खण्ड का विभाजन**
- **त्रिभुज की रचना करना।**
- **किसी वृत्त की स्पर्श रेखाओं की रचना करना।**

माइंड मैप



<u>महत्वपूर्ण बिन्दुः</u>

1. रचना साफ और स्वच्छ बनाएं।
2. समरूप त्रिभुज बनाते समय हमें अपना स्केल का ध्यान रखना चाहिए।
3. रचना के पद तभी लिखें जब आप से कहा जाए।
4. रचना बनाते समय परकार और मापक का प्रयोग ही करें व्यापक कोण बनाते समय प्रोट्रैक्टर का प्रयोग किया जा सकता है।
5. किसी रेखा खण्ड का विभाजन, दिए हुए अनुपात में करने का मतलब है हमें दिए हुए रेखाखण्ड का वह बिन्दु ज्ञात करना है जो रेखा खण्ड को दिए हुए अनुपात में बांटता है।
6. वृत्त की एक स्पर्श रेखा वह सरल रेखा है जो वृत्त को किसी बिन्दु पर छूती है। यह बिन्दु

स्पर्श बिन्दु कहलाता है तथा इस स्पर्श बिन्दु से त्रिज्या स्पर्श रेखा के साथ समलम्ब बनाती है।

7. किसी वृत्त के बाह्य बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाएँ लम्बाई में बराबर होती हैं।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. त्रिभुज ABC के समरूप त्रिभुज बनाने के लिए जिसकी भुजाएं त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं का $\frac{5}{3}$ है। एक किरण BX इस प्रकार खींचते हैं कि $\angle CBX$ न्यून कोण हो और X, A के विपरित दिशा में BC के सापेक्ष हो। BX पर कितने बिन्दु बराबर दूरी पर लगायेंगे।
2. वृत पर स्पर्श रेखाओं का युग्म इस प्रकार खींचा जाता है कि दोनों रेखाओं के बीच का कोण 30^0 हो तो दोनों त्रिज्याओं के बीच का कोण बताइये।
3. त्रिभुज ABC के समरूप त्रिभुज बनाने के लिए जिस की भुजाएं त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं का 2/5 हैं। पहले एक किरण BX इस प्रकार खींची जाती है $\angle CBX$ न्यून कोण हो और X, A के विपरित दिशा में BC के सापेक्ष हो तब बिन्दु $B_1, B_2, B_3......B_x$ पर पद बराबर बराबर दर्शाये जाते हैं तो कौन से दो बिन्दु अगले चरण में मिलाये जाएंगे?
4. एक रेखाखंड AB को 3:7 के अनुपात में विभाजित करने के लिए किए किरण AX बराबर बराबर दूरी पर कितने बिन्दु चिन्हित करने पडेंगे?
5. वृत के अन्दर स्थित बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखाएं खींची जा सकती हैं?
6. एक रेखाखंड AB को 4:5 के अनुपात में विभाजित करने के लिए AX किरन इस प्रकार खींची जाती है कि $\angle BAX$ न्यूनकोण 01 हो और तब बिन्दु A_1, A_2, A_3 .... किरण AX पर बराबर बराबर दूरी पर दर्शाये जाते है। किरण AX के किस बिन्दु को B से मिलाया जाएगा।
7. एक रेखाखंड AB को 4:5 के अनुपात में विभाजित करने के लिए बिन्दु A_1, A_2, A_3 ..... और $B_1B_2B_3$.... किरण AX तथा BX पर बराबर–बराबर दूरी पर चिन्हित हैं तो कौन से दो बिन्दुओं को रेखाखंड को विभाजित करने के लिए मिलाना चाहिए?
8. 6 cm लम्बा एक रेखाखण्ड खीचिंए। इस पर कोई बिन्दु P ज्ञात कीजिए जो इसे 3 : 4 से बाँटता हो।
9. AB = 8 cm एक रेखाखण्ड खींचिए तथा इसे आन्तरिक रूप से 3 : 2 में बाँटिए।
10. 6.5 cm का एक रेखाखण्ड AB खींचिए। इस पर एक बिन्दु P इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि $\frac{AP}{AB}=\frac{3}{5}$ हो। (Foreign 2011)
11. ज्यामितीय विधि से 8.4 cm लम्बे रेखाखण्ड को 5 : 2 में बाँटिए। (CBSE 2015)
12. क्या यह संभव है कि एक रेखा खण्ड को $\sqrt{5}:\frac{1}{\sqrt{5}}$ में ज्यामीतिय विधि से बाँटा जा सकता है।

13. 7.6 cm का एक रेखा खण्ड खीचिए तथा उसे 3 : 2 में बाँटिए। (Foreign 2011)

14. सत्य या असत्य लिखिए

यह संभव है कि किसी रेखाखण्ड को ज्यामितीय विधि से $\sqrt{3} : \frac{1}{\sqrt{3}}$ के अनुपात में बाँटा जा सकता है? (NCERT Exemplar)

15. क्या यह संभव है कि 5 cm त्रिज्या वाले एक वृत के केन्द्र से 4.9 cm की दूरी पर स्थित बिन्दु P से एक स्पर्श रेखा युग्म खींचा जा सकता है।

16. क्या यह संभव है कि 4 cm त्रिज्या तथा केन्द्र O वाले किसी वृत के ऊपर बिन्दु A से एक स्पर्श रेखा युग्म खींचा जा सकता है?

17. किसी वृत के एक बाह्य बिन्दु से खीचीं गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाईयों की तुलना कीजिए।

18. रेखाखंड AB = 8 सेमी. खींचिए। AB पर एक बिन्दु C इस प्रकार लीजिए कि $AC = \frac{1}{3}CB$

19. एक ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 6.5 सेमी., $\angle B = 60^0$ तथा BC = 5.5 सेमी. हो। एक अन्य त्रिभुज AB'C' की रचना कीजिए जो ABC के समरूप हो तथा जिसकी प्रत्येक भुजा ΔABC की संगत भुजा का 3 / 2 हो।

20. एक त्रिभुज ΔABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 5 सेमी., CA = 6 सेमी. और AB = 7 सेमी.। एक अन्य ΔA^1BC^1 की रचना कीजिए जो ΔABC के समरूप हो तथा जिसकी प्रत्येक भुजा ΔABC की संगत का 7 / 5 हो।

21. एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएं 4 सेमी., 5 सेमी. तथा 7 सेमी. की हो। इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा दिये गये त्रिभुज की संगत भुजा का 2 / 3 गुने के बराबर हो।

22. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएं (कर्ण को छोड़कर) 8 सेमी. तथा 6 सेमी. लम्बाई हो। इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा दिये गये त्रिभुज की संगत भुजा के 3 / 4 गुने के बराबर हों।

23. ΔABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 8 सेमी., $\angle B = 45^0$ और $\angle C = 30°$ है। इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएं ΔABC की संगत भुजाओं के 3 / 4 गुने के बराबर हो।

24. ΔABC की रचना कीजिए AB = 14 सेमी., BC = 7 सेमी. और $\angle BAC = 50^0$ । एक अन्य $A'BC', \Delta ABC$ के समरूप बनाइये जिसमें BA' = 6 सेमी. और BC' = 10.5 सेमी. मापन स्केल भी बताइए।

25. ΔABC की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी. $\angle B = 60^0$ और शीर्षलंब CD=3 सेमी. हो, $\Delta AQR \sim \Delta ABC$ की रचना कीजिए ताकि ΔAQR के प्रत्येक ΔABC की संगत भुजाओं के 1.5 गुने के बराबर हो।

26. 6 सेमी. त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए वृत्त पर स्पर्श रेखओं का एक युग्म इस प्रकार खींचिए कि दोनों स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण 60^0 हो।

27. एक समद्विबाहु ΔABC की रचना कीजिए जिसमें AB=AC और आधार BC = 7 सेमी., उर्ध्वाधर कोण = 120^0 हो $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा, ΔABC की संगत भुजाओं के $1\frac{1}{3}$ गुने के बराबर हो।

28. 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए केन्द्र से 5 सेमी. की दूरी पर बाहय बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखाएं खींचिए तथा उनकी लम्बाई भी माप कर लिखिए।

29. केन्द्र 0 तथा 4 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिए उसका व्यास POQ खींचिए। P या Q से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए।

30. 5 सेमी. व 3 सेमी. त्रिज्या वाले दो वृत्त जिनके केन्द्र एक दूसरे से 9 सेमी. दूर है। प्रत्येक वृत्त के केन्द्र से दूसरे वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।

31. 6 सेमी. तथा 4 सेमी. त्रिज्या के दो संकेन्द्रीय वृत्त खींचिए। बाहय वृत्त के किसी बिन्दु से अंतः वृत्त पर स्पर्श रेखा की रचना करिए और उसकी लम्बाई माप कर लिखिए।

32. 3 सेमी. त्रिज्या का वृत्त खींचिए। इसके बढ़े हुए व्यास पर दो बिन्दु P तथा Q जो केन्द्र से प्रत्येक 7 सेमी. की दूरी पर है इस बिन्दुओं से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना करिए।

33. PQ=10 सेमी. का एक रेखाखंड खींचिए। PQ पर एक बिन्दु A इस प्रकार लीजिए कि $\frac{PA}{PQ} = \frac{2}{5}$ हो PA तथा PQ की लम्बाई माप कर लिखिए।

34. एक समबाहु ΔPQR खींचिए जिसकी प्रत्येक भुजा 5 सेमी. है $\Delta PQ'R'$ समरूप ΔPQR बनाइये ताकि $\frac{PQ}{PQ^1} = \frac{1}{2}$

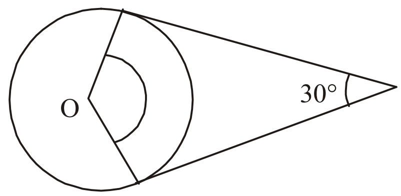
35. 8 सेमी. लम्बाई की एक रेखाखंड खींचिए और इसे 5:8 में विभाजित कीजिए तथा दोनों हिस्सों की माप भी बताइए।

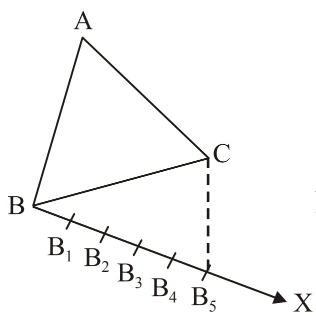
36. ΔABC की रचना कीजिए, जहाँ AB = 7 सेमी. BC = 7.5 सेमी. CA = 6.5 सेमी.। ΔABC के समरूप Δ की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा ΔABC की संगत भुजाओं का 3 / 2 गुना हो।

उत्तर तथा संकेत

1. क्योंकि दिया गया अनुपात $\frac{5}{3}$ है तथा 5 दोनों में बड़ी संख्या है इसलिए उत्तर 5 है।

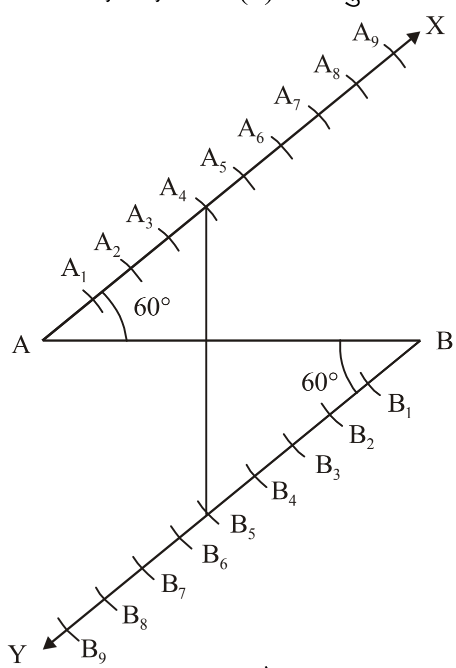
2. दी गई आकृति में दिखाए गए दोनों कोणों का योग 180° होता है यदि एक कोण 30° दिया गया है तो दूसरा (180° – 30°) = 150° होगा।



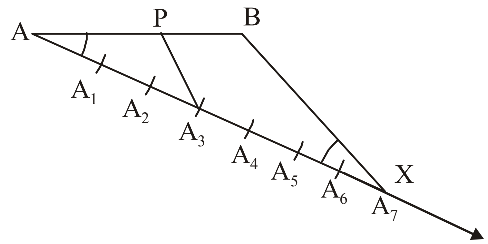
3. 

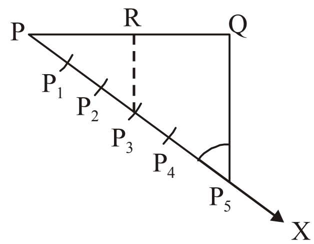
B_5 to C

4. 3 + 7 = 10
5. 0
6. उपर दिए गए प्रश्न (3) के अनुसार यह A_9 होगा।

7. 

A_4 और B_5

8. 

9. 

10. NCERT के उदाहरण–1 की सहायता से बनाइए।
11. प्रश्न संख्या (9) की सहायता से बनाइए।
12. हाँ क्योंकि $\sqrt{5}:\frac{1}{\sqrt{5}}$ को 5 : 1 भी लिखा जा सकता है।
13. प्रश्न संख्या 9 की सहायता से बनाइए।
14. सत्य, $\sqrt{3}:\frac{1}{\sqrt{3}}$ को सरलतम रूप में 3 : 1 भी लिखा जा सकता है।
15. नहीं।
16. नहीं।
17. बराबर है।

प्रश्न संख्या 18 से 36 तक प्रश्नों को NCERT के उदाहरण तथा प्रश्नावली के प्रश्नों की सहायता लेकर हल किए जा सकते हैं?

अभ्यास प्रश्न–पत्र

रचनाएँ

समय :– 1 घंटा	अधिकतम अंक – 20

खंड–अ

1. रेखाखंड AB = 8 सेमी. का लंब समद्विभाजिक खींचिए। 1
2. एक दी हुई रेखा के समान्तर रेखा की रचना कीजिए। 1
3. 4 cm व्यास वाले एक वृत्त पर किसी बिन्दु P से वृत्त पर स्पर्श रेखा खींचिए। 1
4. 4 cm त्रिज्या वाले किसी वृत्त के केन्द्र से 6 cm की दूरी पर स्थित बिन्दु T से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ बनाइए। 1

खंड–ब

5. 5 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त पर एक स्पर्श रेखा युग्म बनाइए जोकि आपस में 60° के कोण पर झुके हो। 2
6. 75^0 को कोण बनाइए तथा उसका समद्विभाजक खींचिए। 2
7. 5.6 सेमी. लम्बाई का रेखाखंड खींचिए। उसे 2:3 के अनुपात में विभाजित कीजिए। 2

खंड–स

8. 3.5 सेमी. त्रिज्या का वृत्त खींचिए। इसके केन्द्र से 5.5 सेमी की दूरी पर स्थित बाहय बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखाएं खींचिए। 3

9. 3.5 सेमी. त्रिज्या के वृत्त की रचना करिए तथा इस पर दो स्पर्श रेखाएं इस प्रकार खींचिए जो परस्पर 120^0 के कोण पर अंतरित हो। 3

खंड–द

10. त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें AB = 4 सेमी. BC = 5 सेमी. और AC = 7 सेमी.। ΔABC के समरूप एक दूसरा त्रिभुज बनाइये जिसकी संगत भुजाएं दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं का 5/7 गुना हो। 4

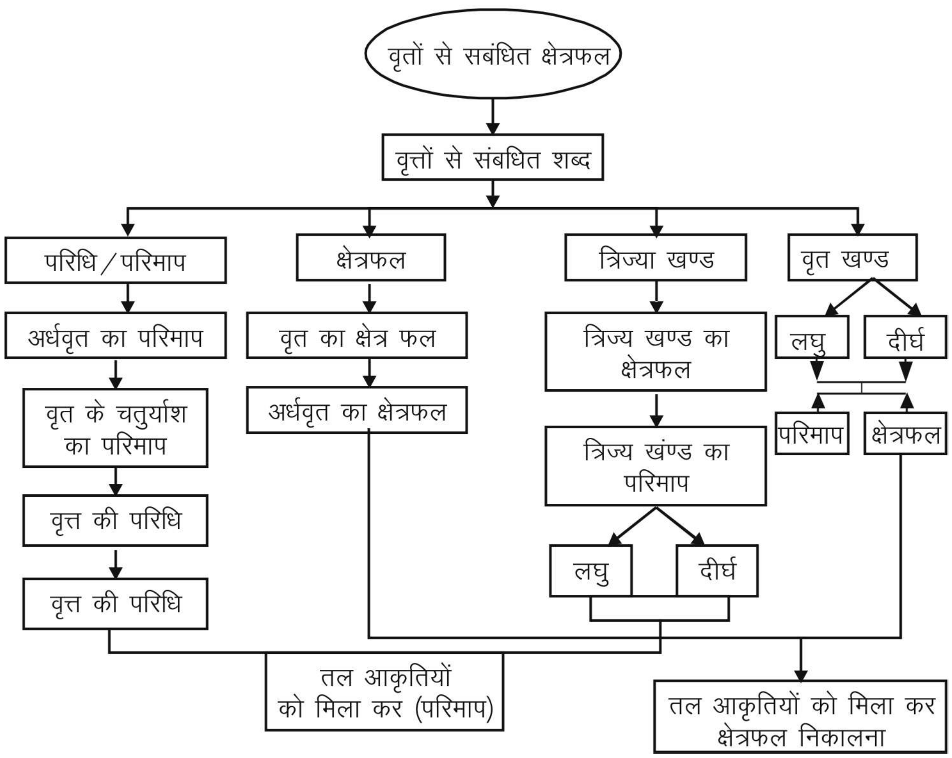
12
अध्याय

वृत्तों से सम्बंधित क्षेत्रफल

विषय

- **वृत्त का परिमाप तथा क्षेत्रफल**
- **त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल, वृत्तखंड का क्षेत्रफल**

माइंड मैपिगं



महत्वपूर्ण बिन्दु:

1. **यदि एक वृत्त की त्रिज्या 'r' हो तो:**

(i) परिधि = $2\pi r$ या πd, $d = 2r$ है।

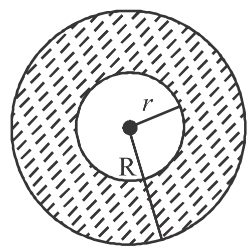
(ii) क्षेत्रफल = πr^2

(iii) अर्धवृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2}{2}$

(iv) चर्तुथांश का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2}{4}$

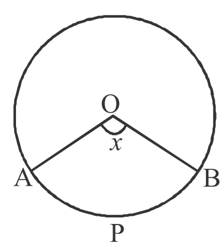
2. **दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा आन्तरित क्षेत्रफल**

यदि दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्या में R तथा r है तो दोनों वृत्तों द्वारा आन्तरित क्षेत्रफल $= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R+r)(R-r)$



3. **त्रिज्याखंड और उसका क्षेत्रफल**

किसी वृतीय क्षेत्र के उस भाग को जो वृत्त की दो त्रिज्याओं और उनके संगत चाप द्वारा घिरा हो, उस वृत्त का एक त्रिज्याखण्ड कहते है। दिए गए चित्र में APB लघु त्रिज्याखण्ड तथा AQB दीर्घ त्रिज्याखण्ड है।



त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल जिसका त्रिज्याखण्ड कोण θ है $= \frac{\theta}{360^0} \times \pi r^2$

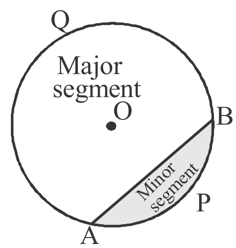
$= \frac{1}{2} \times$ चाप की लम्बाई $\times$ त्रिज्या $= \frac{1}{2} lr$

कोण θ वाले त्रिज्याखण्ड के संगत चाप की लम्बाई $= \frac{\theta}{360^0} \times 2\pi r$

$$= \frac{\theta}{360^0} \times \pi d$$

4. वृत्तखण्ड और उसका क्षेत्रफल :

वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो एक जीवा और संगत चाप के बीच में परिबद्ध हो, एक वृत्तखण्ड कहलाता है। दिए गए चित्र में APB लघु वृत्तखण्ड तथा AQB दीर्घ वृत्तखण्ड है।



वृत्तखण्ड APB का क्षेत्रफल = त्रिज्याखण्ड OAPB का क्षेत्रफल − ΔOAB का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360^0}\pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta \quad \text{या} \quad = \frac{\theta}{360^0}\pi r^2 - r^2 \sin\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\theta}{2}$$

5. कुछ महत्वपूर्ण परिणाम :

(i) यदि दो वृत्त अन्तः स्पर्श करते हैं, तो उनके केन्दों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के अन्तर के बराबर होती है।

(ii) यदि दो वृत्त बाहयतः स्पर्श करते हैं, तो उनके केन्द्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के योगफल के बराबर होती है।

(iii) किसी घूमते हुए पहिये द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी उस पहिये की परिधि के बराबर होती है।

(iv) किसी घूमते हुए पहिये द्वारा मिनट में लगाये गये चक्करों की संख्या

$$= \frac{\text{एक मिनट में चली गयी दूरी}}{\text{पहिये की परिधि}}$$

(v) लघु त्रिज्यखण्ड वृत्त के केन्द्र पर लघु कोण (मान लीजिए θ) आन्तरित करता है जबकि दीर्घ त्रिज्याखण्ड केन्द्र पर अधिककोण (360° – θ) आन्तरित करता है।

(vi) वृत्त के लघु तथा दीर्घ त्रिज्याखण्डों के क्षेत्रफलों का योगफल वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

(vii) किसी त्रिज्याखण्ड का परिमाप उसकी संगत चाप तथा संगत त्रिज्याओं के योगफल के बराबर होता है।

(viii) घंटे की सुई द्वारा 1 मिनट में बना कोण $=\left(\frac{1}{2}\right)^o$

(ix) मिनट की सुई द्वारा 60 मिनटों में बनाया कोण $= 360^0$

(x) मिनट की सुई द्वारा 1 मिनटों में बनाया गया कोण $= 6^0$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. यदि एक अर्धवृत्ताकार चॉदे का व्यास 14 सेमी है, तो इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।
2. एक वृत्त की परिधि तथा क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से समान हो तो वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।
3. 'a' सेमी भुजा वाले वर्ग के अन्तनिहित एक वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. एक वृत्त के त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिल्या r तथा संगत चाप की लम्बाई l है।
5. एक पहिए की त्रिज्या 0.25 मी. है। पहिए द्वारा 11 किमी दूरी तय करने में लगाए गए चक्करों की संख्या ज्ञात कीजिए।
6. यदि एक वृत्त का क्षेत्रफल 616 वर्ग सेमी हो तो इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।
7. एक 6 सेमी वाले वर्ग के अन्तनिहिर्त वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. एक वृत्त का क्षेत्रफल दो वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है। दोनों वृत्तों की त्रिज्याएं 24 सेमी तथा 7 सेमी है तो बड़े वृत का व्यास ज्ञात कीजिए।
9. एक तार को मोड़कर 35 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाया जा सकता है। यदि इसी तार को एक वर्ग के आकार में मोड़ा जाए तो वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
10. एक वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी0 है तथा एक चाप की लम्बाई 3π सेमी0 है। इस चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर आन्तरिक कोण का मान ज्ञात कीजिए।
11. एक वृत्त के त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र लिखिए जिसका केन्द्र पर कोण θ तथा त्रिज्या **r** है।
12. यदि दो वृत्तों की परिधियों 2:3 के अनुपात में हो, तो इनके क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।

13. एक वृत्त की परिधि तथा त्रिज्या का अन्तर 37 सेमी0 हो तो वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।

$\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ लें

14. यदि एक वृत्त का व्यास 40% बढ़ा दिया जाए तो कितने प्रतिशत से इसका क्षेत्रफल बढ़ेगा।

15. एक घड़ी की घण्टे की सुई की लम्बाई 6 सेमी है। प्रातः 11:20 बजे से 11:55 बजे तक घण्टे की सूई द्वारा अंकित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

16. उस वृत्त का व्यास क्या होगा जिसका क्षेत्रफल, दो त्रिभुजों जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः 24 cm तथा 7 cm है, के क्षेत्रफल के योग के बराबर है।

[NCERT Exemplar]

17. 6 cm भुजा वाले वर्ग के अंदर एक वृत्त बनाया गया है। वृत्त का क्षेत्रफल क्या होगा? (अन्तः वृत्त) [NCERT Exemplar]

18. एक घड़ी में मिनट की सुई की लम्बाई 14 cm है। मिनट की सुई के द्वारा 1 मिनट में कितना क्षेत्रफल तय किया जाएगा?

19. सही उत्तर पर (✓) का चिन्ह लगाइए–

यदि किसी वृत्त का परिमाप तथा क्षेत्रफल बराबर है तो वृत्त की त्रिज्या होगी–

(a) 2 इकाई

(b) π इकाई

(c) 4 इकाई

(d) 7 इकाई [NCERT]

20. r त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि होगी ....

21. S त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल होगा ....

22. त्रिज्या r वाले वृत्त के एक त्रिज्यखण्ड, जिसका कोण अंशों में θ है, के संगत चाप की लंबाई .... होती है।

23. त्रिज्या r वाले वृत्त के एक त्रिज्यखण्ड, जिसका कोण अंशों में θ है, का क्षेत्रफल .... होता है।

24. एक वृत्त का क्षेत्रफल = संगत त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ....

लघुत्तरात्मक प्रश्न 1

25. एक वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 22 सेमी0 है।

26. 10 सेमी0 त्रिज्या वाले वृत्त की किसी चाप की लम्बाई 5π सेमी. हो तो उस चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर आन्तरिक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

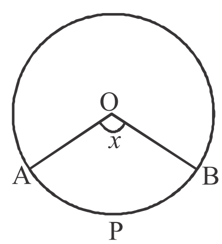
27. यदि एक वर्ग का वृत्त के अन्तर्निहित हो, तो वृत्त तथा वर्ग के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

28. यदि किसी अर्धवृत्त की परिधि 18 सेमी. हो तो उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

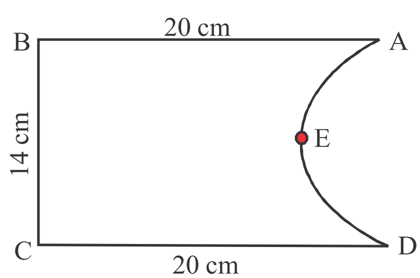
29. यदि एक वृत्त की परिधि एक वर्ग के परिमाप के बराबर हो जबकि वर्ग की भुजा की लम्बाई 1 इकाई है। तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?

30. एक वृत्त का व्यास तथा एक समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई समान हो तो इनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?

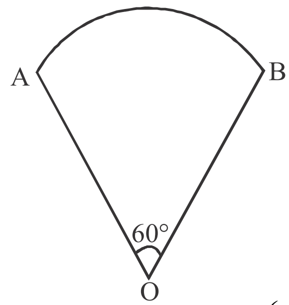
31. संलग्न चित्र में, O एक वृत्त का केन्द्र है। यदि त्रिज्याखण्ड OAB का क्षेत्रफल, वृत्त के क्षेत्रफल का $\frac{5}{18}$ हो तो x ज्ञात कीजिए।



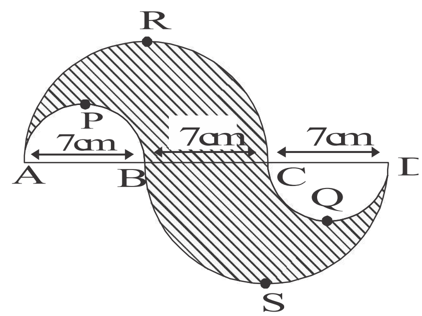
32. दिए गए चित्र में जहां AED एक अर्धवृत्त तथा ABCD एक आयत है तो चित्र का परिमाप ज्ञात कीजिए। (CBSE 2015)



33. दिया गया चित्र एक वृत्त जिसकी त्रिल्या 10.5 सेमी. है, का त्रिज्याखण्ड है। इस त्रिज्याखण्ड का परिमाप ज्ञात कीजिए।



34. छायांकित भाग का परिमाप ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ (Delhi 2011)

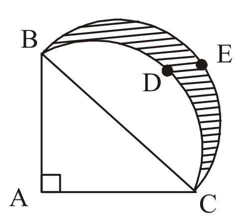


लघु उत्तरीय प्रश्न 2

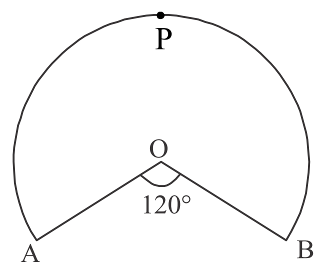
35. 36 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त का त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल 54π वर्ग सेमी. हो तो संगत चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

36. एक घड़ी की मिनट की सुई 5 सेमी. लम्बी है। मिनट की सुई द्वारा प्रात : 6:05 बजे से 6:40 बजे तक बुहार किया गया क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

37. आकृति में ABCD एक वृत का चतुर्थांश है जिसकी त्रिज्या 28 cm है। BC को व्यास मान कर BEC एक अर्धवृत खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$



38. दिए गए चित्र में OAPB, एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 3.5 सेमी तथा कोण AOB = 120^0 का त्रिज्याखण्ड है। OAPBO का परिमाप ज्ञात कीजिए।



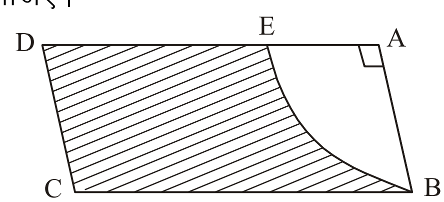
39. एक वृत्ताकार पदपथ (फुटपाथ) जिसकी चौड़ाई 2 मी0 को रू20 प्रतिवर्ग मी0 की दर से एक वृत्ताकार, पार्क जिसकी त्रिज्या 1500 मी0. के चारों ओर बनाया गया है। पदपथ (फुटपाथ) को बनाने में कुल कितना खर्च आएगा? (π =3.14 लीजिए)

40. एक लड़का इस प्रकार साईकिल चला रहा है कि साईकिल के पहिए प्रति मिनट 140 चक्कर लगाते हैं यदि पहिए का व्यास 60 सेमी0 हो तो साईकिल की चाल ज्ञात कीजिए।

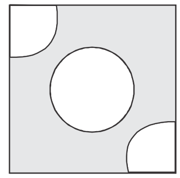
41. 4 सेमी0 त्रिज्या और 30° कोण वाले लघु त्रिज्याखण्ड AOB तथा दीर्घ त्रिज्यखण्ड AOB का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π = 3.14)

42. r त्रिज्या वाले वृत के अर्धवृत में अन्तरित बड़ी से बड़ी त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (NCERT Exemplar)

43. आकृति में समलब ABCD का क्षेत्रफल 24.5 वर्ग सेमी है। AD || BC, ∠DAB = 90°, AD = 10 cm और BC = 4 cm है। यदि ABC एक वृत का चतुर्भुज है तो छायाकिंत भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

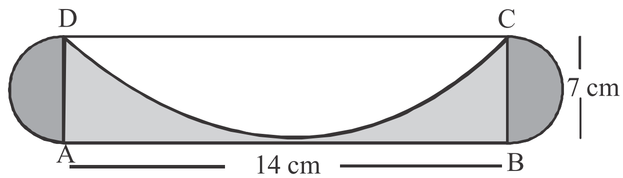


44. एक 6 सेमी0 भुजा वाले वर्ग के दो सम्मुख कोणों से 1.4 सेमी0 त्रिज्या के दो चतुर्थांश काटे गए हैं। वर्ग के बीच में 4.2 सेमी0 व्यास का एक अन्य वृत्त भी काटा गया है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



45. एक 100^0 का त्रिज्याखण्ड एक वृत्त से काटा गया है जिसका क्षेत्रफल 70.65 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$).

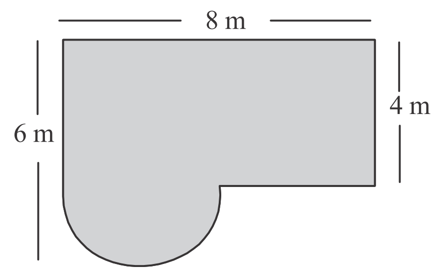
46. दिए गए चित्र में, ABCD एक आयत है जिसमें AB = 14 सेमी और BC=7 सेमी है। DC, BC तथा AD को व्यास मानकर, तीन अर्धवृत्त खींचे गए है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



47. एक वर्गाकार पानी के टैंक के आधार की प्रत्येक भुजा 40 मी0 है। इसके चारों ओर चार अर्धवृत्ताकार घास के मैदान है। रू 1.25 प्रति वर्ग मी0 की दर से मैदान को समतल कराने का व्यय कीजिए ($\pi = 3.14$ लें)

48. छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

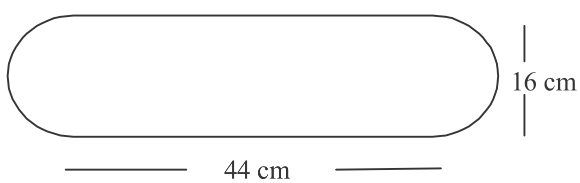
(NCERT Exemplar)



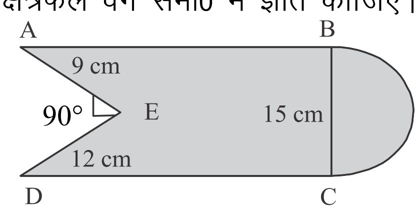
49. 21 सेमी0. त्रिज्या वाले वृत्त की कोई जीवा वृत्त के केन्द्र पर 120^0 का कोण बनाती है। जीवा द्वारा काटे गये लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

50. एक तार को मोड़कर, वृत्त के केन्द्र पर 45^0 का कोण आन्तरित करने वाली चाप के रूप में बनाया जा सकता है। यदि तार की लम्बाई 11 सेमी0 हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

51. दिए गए चित्र में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (NCERT Exemplar)

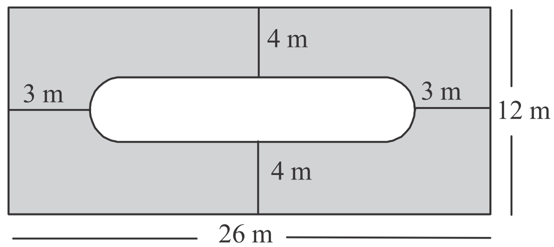


52. दिए गए चित्र का क्षेत्रफल वर्ग सेमी0 में ज्ञात कीजिए।



53. यदि एक वृत्त की परिधि इसके व्यास से 16.8 सेमी0 अधिक हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

54. छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (NCERT Exempler)



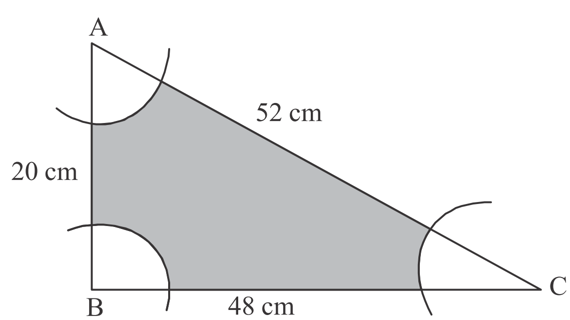
55. दो वृत्त बाहयतः स्पर्श करते हैं। यदि इनके क्षेत्रफलों का योग 130π वर्ग सेमी0 है तथा इनके केन्द्रों के बीच की दूरी 14 सेमी0 है, तो इन वृत्तों की त्रिज्यायें ज्ञात कीजिए।

56. तीन वृत्त जिनकी त्रिज्याऐं 7 सेमी0 हैं, इस प्रकार खींचे गए हैं कि हर वृत्त बाकी दो वृत्तों को स्पर्श करता है। तीनों वृत्तों के बीच वाले भाग को क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (All India 2018)

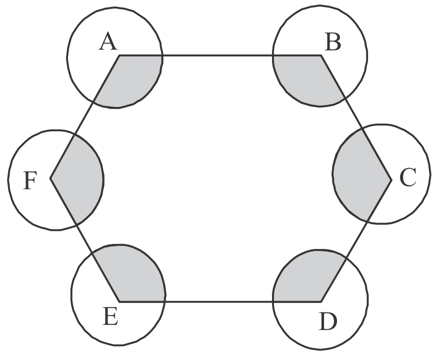
57. एक पहिए का क्षेत्रफल 6.16 वर्ग मी0 है। पहिए को 572 मी0 की दूरी तय करनें के लिए कुल कितने चक्कर लगाने पड़ेंगे।

58. एक समचतुर्भुज के सभी शीर्ष एक वृत्त पर है, यदि वृत्त का क्षेत्रफल 2464 वर्ग सेमी0 हो तो समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

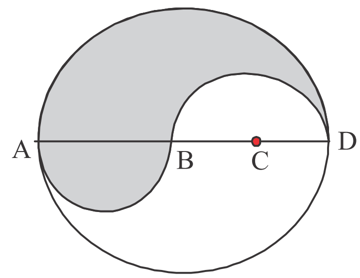
59. त्रिभुज ABC के शीर्षें A, B तथा C को केन्द्र लेकर तीन त्रिज्याखण्ड बनाए गए हैं जिनकी त्रिज्या 6 सेमी0 है। यदि AB=20 सेमी0 BC =48 सेमी0 और CA=52 सेमी0 हो, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



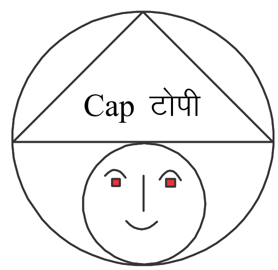
60. दी गई आकृति में, ABCDEF एक समषट्भुज है जिसके शीर्षों को केन्द्र मानकर समान त्रिज्या r के वृत्त खींचे गए हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



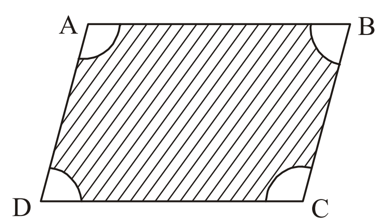
61. एक 6 सेमी0 त्रिज्या के वृत्त का व्यास ABCD इस प्रकार है कि AB, BC तथा CD बराबर है। चित्र के अनुसार AB और BD को व्यास मानकर अर्धवृत्त खींचे गए हैं। छायांकित भाग का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



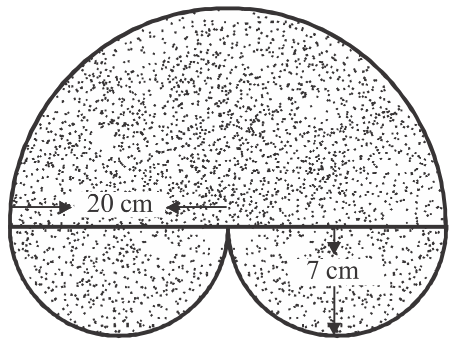
62. सड़क पर एक गरीब कलाकार बच्चों के लिए मजाकिया कार्टून बनाता है तथा अपनी जीविका अर्जित करता है। एक बार उसने आकृति में दर्शाए अनुसार एक हास्यकर मुख बनाया, जिसके लिए उसने एक वृत्त के अन्दर वृत्त खींचा, जहां बड़े वृत्त की त्रिज्या 30 सेमी0 और छोटे वृत्त की त्रिज्या 20 सेमी0 है। इस आकृति में टोपी के लिए कितना क्षेत्रफल दिया गया है?



63. दिए गए चित्र में, ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है AB||DC, AB = 18 cm, DC = 32 cm तथा AB बीच की दूरी 14 cm है। यदि 7 cm की चाप A, B, C तथा D को केन्द्र मानकर खीचीं जाएं तो छायाकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



64. दिए गए चित्र में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर तथा संकेत

1. $\pi r + d = \frac{22}{7} \times 7 + 14 = 36$ cm

2. $2\pi r = \pi r^2 = 4$ unit

3. वर्ग की भुजा = वृत्त का व्यास

   $\pi r^2 = \pi \frac{a^2}{4}$ (भुजा a, त्रिज्या $= \frac{a}{2}$)

4. $$l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

   $$\text{क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

   $$\Rightarrow \quad \frac{l \times \pi r^2}{2\pi r} = \frac{lr}{2} \text{ sq. units.}$$

5. $$\text{दूरी / परिधि} = \frac{11 \times 1000 \times 7 \times 100}{2 \times 22 \times 25}$$

   $$= 7000$$

6. $\pi r^2 = 616$

   $\Rightarrow \quad r = 14$ cm

   or $\quad 2\pi r = 88$ cm

7. वर्ग की भुजा = वृत्त का व्यास

   $\Rightarrow \quad r = 3$ cm

   or $\quad \pi r^2 = \pi(3)^2 = 9\pi$ cm^2

8. $$\pi r^2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$\Rightarrow$ $R = 25$

और व्यास $= 50$ cm

9. $$2\pi r = 2\times\frac{22}{7}\times 35 = 220 \text{ cm}$$

वर्ग की भुजा $= \frac{220}{4} = 55$ cm

वर्ग का क्षेत्रफल $= 55 \times 55 = 3025$ cm^2

10. $$l = \frac{\theta}{360°}\times 2\pi r$$

$$\Rightarrow \quad 3\pi = \frac{\theta}{360°}\times 2\pi \times 6$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 90°$$

11. $\frac{\theta}{360°}\times 2\pi r$

12. $\frac{2\pi r_1}{2\pi r_2} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \quad r_1 = \frac{3}{2} r_2$$

or $$\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{\left(\frac{2}{3} r_1\right)^2}{r_2^2}$$

$$= \frac{\frac{4}{9} r_2^2}{r_2^2} = 4:9$$

13. $(2\pi r - r) = 37$

or $r = 7$,

$$2\pi r = 2\times\frac{22}{7}\times 7 = 44 \text{ सेमी}$$

14. $\frac{\pi d_1}{\pi d_2} = \frac{100}{140}$

$\Rightarrow \quad \frac{2\pi r_1}{2\pi r_2} = \frac{5}{7}$

$\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = 25 : 49$

$\% = \frac{24}{25}\times 10 = 96\%$

15. $\frac{210\times 22\times 6\times 6}{360\times 7} = 66\ \text{cm}^2$

$\begin{pmatrix} 11 : 20 \text{ to } 11 : 55 = 35 \text{ minutes} \\ \theta = 210° \end{pmatrix}$

16. $\pi r^2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$\Rightarrow \quad R = 25$

17. वृत्त का व्यास = वर्ग की भुजा 3 cm (त्रिज्या)

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = 9\pi\ \text{cm}^2$

18. $10.27\ \text{cm}^2$
19. 2 इकाई
20. $2\pi r$
21. πs^2
22. $\frac{\theta}{360°}\times 2\pi r$
23. $\frac{\theta}{360°}\times \pi r^2$
24. संगत त्रिभुज का क्षेत्रफल
25. $2\pi r = 22$

$r = \frac{7}{2}$

वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi r^2}{4} = \frac{22\times 7\times 7}{7\times 4\times 2\times 2}$

$= 9.625\ \text{cm}^2$

26. $l = \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

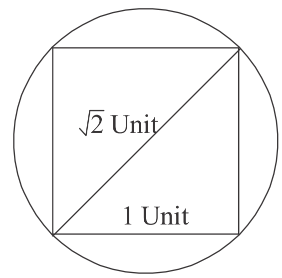
$\Rightarrow \qquad 5\pi = \frac{\theta}{360°} \times 2\pi \times 10$

$\Rightarrow \qquad \theta = 90°$

27. यदि वर्ग की भुजा = 1 इकाई

तब पाइथागोरस नियम के द्वारा

व्यास या विकर्ण = $\sqrt{2}$ इकाई



वर्ग का क्षेत्रफल = 1 × 1 = 1 वर्ग इकाई

वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

$$= \pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{11}{7}$$

इसलिए 4 : π और 11 : 7

28. $\pi r = 2r = 18$ cm

$$\frac{22}{7} r + 2r = 18$$

$$r\left(\frac{22}{7} + 2\right) = 18$$

$$r = \frac{7}{2}$$ और 3.5 cm

29. $2\pi r = 4$ इकाई

और $\qquad \frac{2\pi r}{4 \text{ इकाई}}$ = वृत्त की परिधि / वर्ग का परिमाप

$$r = \frac{7}{11} \text{ इकाई}$$

$$\frac{\pi r^2}{1} = \frac{22}{7} \times \frac{7}{11} \times \frac{7}{11} = \frac{14}{11}$$

और 14 : 11

30. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$\text{अनुपात} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \pi : \sqrt{3}$$

31. $\frac{\theta}{360°}\pi r^2 = \pi r^2 = \frac{5}{18}$

32. $20 \text{ cm} + 14 \text{ cm} + 20 \text{ cm} + \pi r$

$= 20 \text{ cm} + 14 \text{ cm} + 20 \text{ cm} + \frac{22}{7} \times 7$

$= 76 \text{ cm}$

33. $\frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

$$= \frac{60° \times 2 \times 22 \times 105}{360° \times 7 \times 10}$$

$= 11 \text{ cm}$

परिमाप $= (10.5 + 10.5 + 11) \text{ cm} = 32 \text{ cm}$

34. छायांकित भाग का परिमाप = अर्ध वृत्त का परिमाप

$= \text{ARC} + \text{APB} + \text{BSD} + \text{CQD}$

$= \pi(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$

$$= \frac{22}{7}\left(7 + \frac{7}{2} + 7 + \frac{7}{2}\right)$$

$$= \frac{22}{7} \times 21 = 66 \text{ cm}$$

35. $54\pi = \frac{\theta \times \pi \times 36 \times 36}{360°}$

$\theta = 15°$

$$l = \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$$

$$= \frac{15° \times 2 \times \pi \times 36}{360°} = 3\pi$$

36. क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360°} \times \pi r$

$$= \frac{210° \times 22 \times 3 \times 3}{360° \times 7}$$ ($\theta = 210°$, 35 मिनट में)

$$= \frac{1650}{36} = 45\frac{5}{6} \text{cm}$$

37. AC = 28 cm,

BC = $28\sqrt{2}$ cm

(पाइथागोरस प्रमेय द्वारा)

त्रिज्या = $14\sqrt{2}$ cm

छायांकित भाग = अर्धवृत्त का क्षेत्रफल – BCD वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\pi\left(14\sqrt{2}\right)^2 - \frac{90°}{360°} \times \pi(28)^2 + \frac{1}{2} \times 28 \times 28$$

$= 392 \text{ cm}^2$

38. $l = \frac{240° \times 2 \times 22 \times 35}{360° \times 7 \times 10} = 14.6$

OAPBO की लम्बाई

$= 14.6 + 3.5 + 3.5$

$= 21.6$ cm

39. $\pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)$

$= \pi[(1502)^2 - (1500)^2] \times 20$

$= 3.14[(1502)^2 - (1500)^2] \times 20$

$= 377051.2$ रुपए

40. साइकिल के पहिये की परिधि $= 2\pi r$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30 \text{ cm}$$

$$= 188.57 \text{ cm}$$

साइकिल की गति

$$= \frac{18857 \times 140 \times 60}{100 \times 100000}$$

$$= 15.84 \text{ km/h}$$

41. लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$$

$$= \frac{30°}{360°} \times 3.14 \times 4 \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= 4.19 \text{ cm}^2$$

दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360°} \pi r^2$$

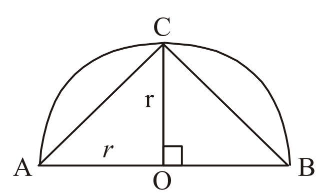
$$= \frac{330}{360°} \times 3.14 \times 4 \times 4$$

$$= 46.1 \text{ cm}^2 \text{(approx)}$$

42. त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} \text{AB} \times \text{OC}$$



$$= \frac{1}{2} \cdot 2r \times r$$

$= r^2$ वर्ग इकाई

43. माना $\text{AB} = h$ cm

समलंब का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(AD + BC) \times AB$$

$$24.5 = \frac{1}{2}(10 + 4) \times h$$

$$h = 3.5 \text{ cm}$$

(ABF) चतुर्थांश का क्षेत्रफल

$$= \frac{90°}{360°} \times \pi\ (3.5)^2 \text{ वर्ग सेमी.}$$

44. छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= 24.5 - 9.625$$

$$= 14.875 \text{ वर्ग सेमी.}$$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= वर्ग का क्षेत्रफल – वृत्त का क्षेत्रफल – (2 × चतुर्थांश का क्षेत्रफल) या अर्धवृत्त का क्षेत्रफल

$$= 64 - \frac{22 \times 42 \times 42}{7 \times 10 \times 10} - \frac{22 \times 14 \times 14 \times 1}{7 \times 10 \times 10 \times 2}$$

$$= 64 - 55.44 - 3.08$$

$$= 5.48 \text{ cm}^2$$

45. $$\frac{70 \cdot 65}{100} = \frac{100° \times 314 \times r^2}{360° \times 100}$$

$$\frac{7065 \times 360}{100 \times 314} = r^2$$

$$9 = r$$

$$r = 9 \text{ cm}$$

46. छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= वृत्त का क्षेत्रफल + आयत का क्षेत्रफल – अर्धवृत्त का क्षेत्रफल (व्यास DC)

छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= \pi r^2 + AB \times BC - \frac{\pi\left(\frac{DC}{2}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{22}{7} \times (3.5)^2 + \left(98 - \frac{22 \times 7 \times 7}{7 \times 2}\right)$$

$= 38.5 + (98 - 77)$

$= 59.5 \text{ cm}^2$

47. चार अर्धवृत्त = 2 वृत्त

2 वृत्तों का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

$= 2 \times 3.14 \times 20 \times 20$

$= 2512$

खर्च $= 2125 \times 1.25$

$= 3140$ रुपये

48. आकृति को अपनी जानी पहचानी आकृतियों में बाटें

जैसे– एक अर्धवृत्त + आयत

छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= l \times b + \frac{\pi r^2}{2}$$

$$= 8 \times 4 + \pi \times \frac{2 \times 2}{2}$$

$= (32 + 2\pi) \text{ cm}^2$

49. वृत्तखंड का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल – त्रिभुज का क्षेत्रफल

वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 462 \text{ cm}^2$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{441}{2}\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$$= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right) \text{ cm}^2$$

$$= \frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

50. $l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$

$$11 = \frac{45° \times 2 \times 22 \times r}{360° \times 7}$$

$14 = r$

$r = 14$ cm

51. फूलों की क्यारी में दो अर्धवृत्ताकार तथा एक आयताकार आकृतियाँ हैं।

क्षेत्रफल $= l \times b + \pi r^2$

$= (44 \times 16 + \pi \times 8 \times 8)$

$= (704 + 64\,\pi)$ cm^2

52. छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= आयत + अर्धवृत्त – त्रिभुज

$$= 20 \times 15 + 28.12\,\pi - \frac{1}{6} \times 9$$

$= 300 + 28.12\pi - 54$

$= 300 + 88.39 - 54$

$= 334.39$ cm^2

53. $2\pi r = 2r + 16.8$

$$2 \times \frac{22}{7} r - 2r = \frac{168}{10}$$

or $$2r\left(\frac{22}{7} - 1\right) = \frac{168}{10}$$

or $$2r\left(\frac{15}{7}\right) = \frac{168}{10}$$

or $$r = \frac{168 \times 7}{10 \times 2 \times 15} = \frac{1176}{300} = 3.92 \text{ cm}$$

54. छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= आयत का क्षेत्रफल – [दो अर्धवृत्तों का क्षेत्रफल + आयत का क्षेत्रफल]

$$= \text{L} \times \text{B} - \left[\frac{2\pi r^2}{2} + l \times b\right]$$

$= 36 \times 12 - [\pi \times 2 \times 2 + 16 \times 4]$

$= 312 - 4\pi - 64$

$= (248 - 4\pi)$ m^2

55. $\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 130\pi$

$\Rightarrow r_1^2 + r_2^2 = 130$ ...(1)

और $r_1 + r_2 = 14$ ...(2)

(2) से r_1 का मान (1) में रखने पर

$2r_1^2 - 28r_1 + 66 = 0$

$r_2^2 - 14r_2 + 33 = 0$ (– ve चिन्ह को हटाने पर)

$r = 11$ cm and $r = 3$ cm

56. छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= त्रिभुज का क्षेत्रफल – 3 त्रिज्यखंडों का क्षेत्रफल

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14 \times 14$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 196 = 49\sqrt{3}$ वर्ग सेमी.

3 त्रिज्यखंडों का क्षेत्रफल

$= \frac{3 \times 60°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 77$ वर्ग सेमी.

छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= (49\sqrt{3} - 77)$ वर्ग सेमी.

57. $\pi r^2 = \frac{616}{100}$

or $r^2 = 1.96$

or $r = 1.4$ m

$2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{14}{10}$

$= \frac{616}{70} = 8.8$ m

चक्करों की संख्या $= \frac{572}{8.8} = 65$

58. $\pi r^2 = 2464$ cm^2

$r = 28$ cm

या $d = 28 + 28 = 56$ cm

समबाहु चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} d_1 d_2$ या $\frac{1}{2} d_2^2 (d_1 = d_2)$

$= \frac{1}{2} \times 56 \times 56 = 1568 \text{ cm}^2$

59. छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= Δ का क्षेत्रफल – 3 त्रिज्यखंडों का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{48} \times 20 - \frac{\pi r^2}{360°}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$= 480 - \frac{22 \times 6 \times 6}{7 \times 360°}(180°)$$

$= 480 - 56.57 = 423.43$

60. $2\pi r^2$ (क्षेत्रफल = 2 वृत्तों का क्षेत्रफल)

61. परिमाप $= \frac{2\pi r_1}{2} + \frac{2\pi r_2}{2} + \frac{2\pi r_3}{2}$

$$= \left[2 \times \frac{22}{7} \times \frac{6}{2} + 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{4}{2} + 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{2}{2}\right]$$

$$= 2 \times \frac{22}{7}[3 + 2 + 1] = \frac{264}{7} = 37.71 \text{ cm}$$

क्षेत्रफल $= \left[\frac{\pi r_1^2}{2} - \frac{\pi r_2^2}{2} + \frac{\pi r_3^2}{2}\right]$

$$= \left[\frac{22 \times 6 \times 6}{7 \times 2} - \frac{22 \times 4 \times 4}{7 \times 2} + \frac{22 \times 2 \times 2}{7 \times 2}\right]$$

$$= \frac{22}{7}(18 - 8 + 2) = 31.71 \text{ cm}^2$$

62. बड़े वृत्त की त्रिज्या (केन्द्र O) = 30 cm

छोटे वृत्त की त्रिज्या (केन्द्र O') = 20 cm

उनकी त्रिज्याओं का अंतर

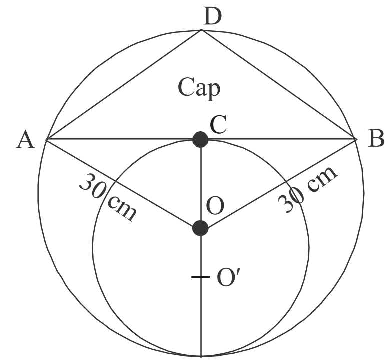
$= (30 - 20) = 10$ cm

AB छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है

त्रिज्या = O'C तथा OD⊥AB

$\therefore \quad \angle OAC = 90° = \angle OCB$

$\therefore \quad \Delta OCA$ में पाइथागोरस नियम के द्वारा



$AC = 20\sqrt{2}$ cm

$AC = CB$

$\Rightarrow \quad AB = AC + CB$

$\Rightarrow \quad AB = AC + AC = 2AC$

$\Rightarrow \quad AB = 2 \times 20\sqrt{2}$ cm

$= 40\sqrt{2}$ cm

CD = बड़े वृत्त की त्रिज्या – OC = 30 – 10 = 20 cm

टोपी का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} AB \times CD$

$= \frac{1}{2} \times 40\sqrt{2} \times 20 \text{ cm}^2 = 400\sqrt{2} \text{ cm}^2$

63. समलम्ब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times 14 \times (18+32) = 350 \text{ cm}^2$

4 त्रिज्यखंडों का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi r^2}{360°} \times (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = \frac{\pi \times 7 \times 7 \times 360°}{360°} = 49\pi \text{ cm}^2$

64. छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$= \left(\frac{\pi r_1^2}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2} + \frac{\pi r_3^2}{2} \right) = \pi \left(\frac{17 \times 17}{2} + \frac{10 \times 10}{2} + \frac{7 \times 7}{2} \right)$

$= 688.28 \text{ cm}^2$

अभ्यास प्रश्न पत्र

समयः 1 घंटा | *अंक : 20*

खण्ड–अ

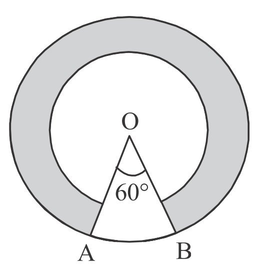
1. यदि दो वृन्तों की परिधि बराबर हो तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा? 1
2. यदि चाँदे का व्यास 21cm हो तो इसका परिमाप ज्ञात कीजिए। 1
3. P त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल .... होगा। 1
4. यही उत्तर पर ठीक का निशान लगाइएः 1
   यदि किसी वृत्त का परिमाप तथा क्षेत्रफल बराबर हो तो वृत्त की त्रिज्या होगीः
   (a) 2 इकाई (b) π इकाई
   (c) 4 इकाई (d) 7 इकाई

खण्ड–ब

5. एक घड़ी की मिनट की सूई की लम्बाई 14 cm है। मिनट की सूई द्वारा 8 मिनट में तय किया क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2
6. यदि एक वृत्त की परिधि 22 सेमी. हो तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2
7. एक वृत्त के चतुर्भाश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 44 सेमी. है 2

खण्ड–स

8. एक घोड़े को 28 सेमी लम्बी रस्सी द्वारा एक खम्भे से बॉधा गया है। घोड़े द्वारा खायी जाने वाली घास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3
9. दिए गए चित्र में OA = 42 सेमी. , OC = 21 सेमी. तथा व्यास $\angle AOB = 60^0$ है तो छायांकित भाग को क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3



खण्ड–द

10. यदि 10 सेमी. त्रिज्या के वृत्त में एक जीवा AB वृत्त के केन्द्र पर समकोण बनाती हो, तो लघु तथा दीर्घ वृत्तखण्ड के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (दिया है : $\pi = 3.14$) 4

13
अध्याय

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

महत्त्वपूर्ण बिन्दुः

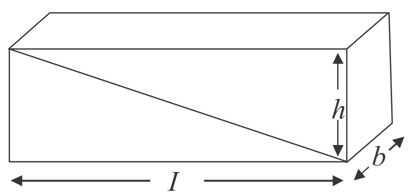
1. **घनाभ** = 3– आयामी आकार जैसे किताब, माचिस की डिब्बी, अलमारी इत्यादि घनाभ कहलाती हैं।

   माना, लम्बाई = 1, चौड़ाई = b, ऊंचाई = h

   आयतन = $l \times b \times h$

   ठोस घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2h(l + b)$

   ठोस घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb + bh + lh)$



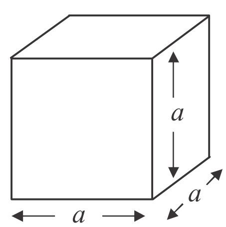
2. **घन** = 3– आयामी आकर जैसे आइस–क्यूबस, लूडो का पासा इत्यादि घन कहलाती हैं।

   माना, लम्बाई = चौड़ाई = ऊंचाई = a

   आयतन = a^3

   ठोस घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4a^2$

   ठोस घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$



3. बेलन = 3– आयामी आकार जैसे जार, स्तंभ, पाइप, रोड़–रोलर इत्यादि बेलन कहलाते हैं।

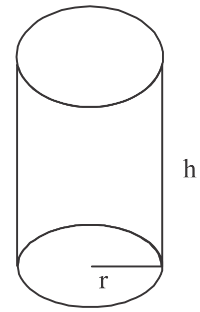
(क) माना, आधार त्रिज्या $= r$

ऊंचाई $= h$

आयतन $= \pi r^2 h$

ठोस बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

ठोस बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(r + h)$



(ख) बेलन (खोखला) के लिए,

बाह्य त्रिज्या = R

अन्तः त्रिज्या $= r$

ऊंचाई $= h$

आयतन $= \pi(R^2 - r^2)h$

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi(R + r)h$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi(R + r)h + 2\pi(R^2 - r^2)$

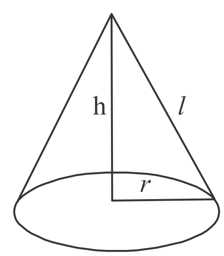
4. **शंकु** : 3– आयामी आकार जैसे टैंट, आइसक्रीम कोन को शंकु कहते हैं।

माना, आधार त्रिज्या $= r$

ऊंचाई $= h$

तिरछी ऊंचाई $= l$

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$



आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

ठोस शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

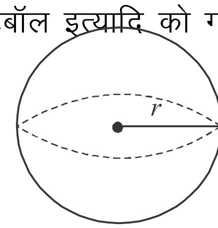
ठोस शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(l + r)$

ध्यान दें,

यदि एक शंकु व एक बेलन दोनों की आधार त्रिज्याएं समान हों व दोनों की ऊंचाई भी समान हो तब

$3 \times$ शंकु का आयतन $=$ बेलन का आयतन

5. **गोला** : 3– आयामी आकार जैसे क्रिकेट बॉल, फूटबॉल इत्यादि को गोला कहते हैं।



(क) माना, त्रिज्या $= r$

आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

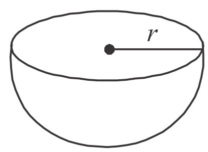
(ख) अर्ध गोलाकार (ठोस)

त्रिज्या $= r$

आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

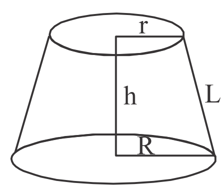
वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$



6. **छिन्नक** : जब एक शंकु को आधार के समांतर काटा जाता है तो उस कटाव से नीचे आधार तक के भाग को शंकु का छिन्नक कहते हैं।

उदाहरण–तुर्की टोपी



माना,

आधार त्रिज्या $=$ R

उपरी त्रिज्या $= r$

तिर्यक ऊंचाई $= h$

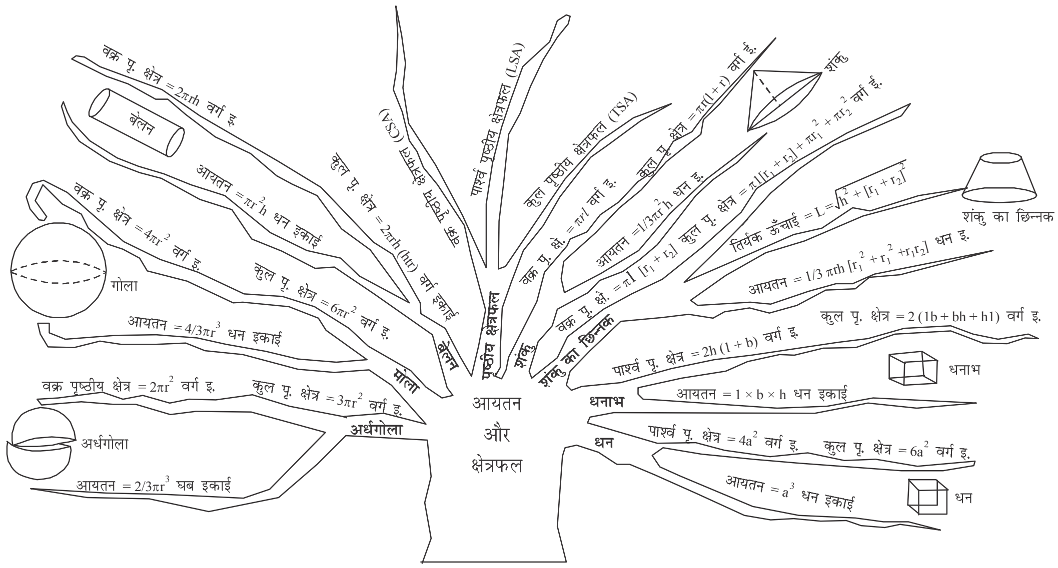
$l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

आयतन $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (ठोस) $= \pi l(\text{R} + r)$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (ठोस) $= \pi l(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$

माइंड मैपिंग



अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. मिलान कीजिएः

कॉलम I	कॉलम II
(a) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल	(i) $2\pi rh$
(b) शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल	(ii) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
(c) धनाभ का आयतन	(iii) $2\pi r (r + h)$
(d) अर्धगोले का आयतन	(iv) $\frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + rh)$
(e) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल	(v) $\pi r (r + 1)$
(f) अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल	(vi) $1 \times b \times h$
(g) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल	(vii) $\frac{2}{3}\pi r^3$
(h) शंकु का आयतन	(viii) πrl
(i) बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल	(ix) $3\pi r^2$
(j) शंकु के छित्रक का आयतन	(x) $4\pi r^2$

2. रिक्त स्थान भरिए:

(i) $a \times a \times b$ विमाओं वाले धनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ——— है।

(ii) आधार त्रिज्या r और ऊँचाई 2r वाले लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन ——————— है।

(iii) आधार त्रिज्या r और ऊँचाई h वाले लम्ब वृत्तीय बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ——————— है।

(iv) आधार त्रिज्या r और ऊँचाई h वाले लम्ब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल —————— है।

(v) यदि एक शंकु की ऊँचाई उसके आधार के व्यास के बराबर हो, तो शंकु का आयतन —————— है।

(vi) त्रिज्या r वाले एक अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल —————— है।

(vii) बाहरी त्रिज्या R, वाले आंतरिक त्रिज्या r और ऊँचाई h के एक खोखले बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ————— है।

(viii) यदि किसी गोले की त्रिज्या दोगुनी हो जाए, तो इसका आयतन मूल गोले के आयतन से —————— गुना हो जाएगा।

(xi) यदि किसी गोले की त्रिज्या आधी हो जाए, तो इसका आयतन मूल गोले के आयतन से ———————— गुना हो जाएगा।

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक में सत्य या असत्य लिखिए:

(i) समान आधार त्रिज्या r वाले सर्वसम ठोस अर्धगोलों को उनके आधारों के अनुदिश जोड़ दिया गया है। इस संयोजन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $6\pi r^2$ है।

(ii) त्रिज्या r और ऊँचाई h वाले एक बेलन को उसी ऊँचाई और त्रिज्या वाले बेलन के ऊपर रख दिया जाता है। इस प्रकार बने आकार का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $4\pi rh + 4\pi r^2$ है।

(iii) त्रिज्या r और ऊँचाई h वाले एक ठोस शंकु को उसी आधार त्रिज्या और ऊँचाई वाले एक ठोस बेलन के ऊपर रख दिया जाता है। संयोजित ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $\pi r[\sqrt{r^2+h^2}+3r+2h]$ है।

(iv) भुजा a वाल एक घनाकार बक्से के अंदर एक ठोस गेंद पूर्णयता ठीक–ठीक रखी जा सकती है। गेद का आयतन $\frac{4}{3}\pi a^3$ है।

(v) शंकु के एक छिन्नक का आयतन $\frac{1}{3}\pi h[r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$ होता है, जहाँ h छिन्नक की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई है और r_1, r_2 सिरों की त्रिज्याएँ हैं।

बहुविकल्पी प्रश्न

4. r त्रिज्या वाले एक ठोस अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल है

(a) πr^2 (b) $2\pi r^2$

(c) $3\pi r^2$ (d) $4\pi r^2$

5. एक गोले का आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल बराबर है, तो गोले की त्रिज्या है

(a) 0 मात्रक (b) 1 मात्रक

(c) 2 मात्रक (d) 3 मात्रक

6. समान आधार और समान ऊँचाई वाले एक बेलन, एक शंकु और एक अर्धगोले के आयतनों का अनुपात है

(a) 1:2:3 (b) 2:1:3

(c) 3:1:2 (d) 3:2:1

7. 'r' त्रिज्या वाले एक ठोस गोले को पिघला कर 'r' ऊँचाई वाला एक ठोस शंकु बनाया गया है। शंकु के आधार की त्रिज्या है

(a) 2r (b) r

(c) 4r (d) 3r

8. 6 सेमी, 8 सेमी और 10 सेमी व्यास वाले तीन ठोस गोलों को पिघला कर एक ठोस गोला बनाया गया है। नए गोले का व्यास है

(a) 6 सेमी (b) 4.5 सेमी

(c) 3 सेमी (d) 12 सेमी

9. एक शंकु के छिन्नक, जो 40 सेमी ऊँचा है, के सिरों की त्रिज्याएँ 38 सेमी और 8 सेमी है। शंकु के छिन्नक की तियर्क ऊँचाई है

(a) 50 सेमी (b) $10\sqrt{7}$ सेमी

(c) 60.96 सेमी (d) $4\sqrt{2}$ सेमी

10. क्रमशः आंतरिक और बाहरी व्यास 4 सेमी और 8 सेमी वाले एक धातु के गोलाकार खोल को पिघालकर आधार व्यास 8 सेमी के एक शंकु के आकार में ढाला जाता हैं। इस शंकु की ऊँचाई है

(a) 12 सेमी (b) 14 सेमी

(c) 15 सेमी (d) 18 सेमी

11. विमाओं 49 सेमी $\times 33$ सेमी $\times 24$ सेमी के घनाभ के आकार के लोहे के किसी ठोस टुकड़े को पिघालकर एक ठोस गोले के रूप में ढाला जाता हैं। गोले की त्रिज्या है

(a) 21 सेमी (b) 23 सेमी

(c) 25 सेमी (d) 19 सेमी

12. बैडमिंटन खेलने में प्रयोग की जाने वाली शटलकॉक (चिड़ी) का आकार निम्नलिखित का संयोजन है (NCERT Exemplar)

(a) एक बेलन और एक गोला

(b) एक बेलन और एक अर्धगोला

(c) एक गोला और एक शंकु

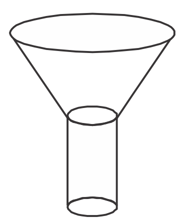
(d) शंकु का छिन्नक और अर्धगोला

13. तिर्यक ऊँचाई 45 सेमी वाली एक बाल्टी के ऊपरी और निचले सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः 28 सेमी और 7 सेमी हैं। इस बाल्टी का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल है (NCERT Exemplar)

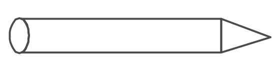
(a) 4950 वर्ग सेमी (b) 4951 वर्ग सेमी

(c) 4952 वर्ग सेमी (d) 4953 वर्ग सेमी

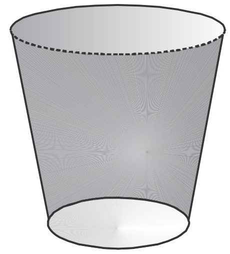
14. ''कीप'' किन दो ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



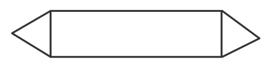
15. एक बेलनाकार ''पेंसिल'' जो एक सिरे से छिली गई है, किन दो ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



16. दी गई ''गिलास'' की आकृति, किस 3– आयामी ज्यामिति आकारों सी प्रतीत होती है?



17. गिल्ली डंडा खेल में प्रयोग में आने वाली ''गिल्ली'' किन–किन ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



18. एक ठोस आकृति को दूसरी ठोस आकृति में रूपांतरण के दौरान, नई ठोस आकृति के आयातन पर क्या प्रभाव होगा?

19. शंकु को आधार के समानांतर विभाजित करने पर होता प्राप्त छिन्नक का उपरी अनुप्रस्थ काट का क्षेत्र किस आकृति का है?

20. एक ठोस–अर्ध–गोलाकार, जिसकी त्रिज्या 7 सेमी है, का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए।

21. दो गोलों के आयतन का अनुपात 64 : 125 है। इनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात बताइए।

22. बेलन व शंकु के आयतन का अनुपात बताइए यदि इनके आधार की त्रिज्या समान है व दोनों की ऊंचाई भी समान है।

23. एक गोले (ठोस) जिसकी त्रिज्या r है, को पिघलाकर r ऊंचाई वाला एक ठोस शंकु बनाया गया है। शंकु के आधार की त्रिज्या बताइए।

24. एक घन का आयतन 1331 सेमी.^{3} है। इसकी भुजा की लम्बाई बताइए।

लघु उत्तरीय प्रश्न 1

25. एक ठोस घनाभ जिसकी भुजाएं 16 सेमी × 12 सेमी × 10 सेमी है, में से 2 सेमी भुजा वाले कितने घन बनाए जा सकते हैं?

26. 729 सेमी^{3} आयतन वाले घन में से अधिक से अधिक कितनी ऊंचाई वाला शंकु काटा जा सकता है?

27. 64 सेमी^{3} आयतन वाले दो घनों को मिलाकर घनाभ बनाया जाता है। इस घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या होगा? (NCERT)

28. एक 2 सेमी व्यास व 16 सेमी ऊंचाई वाले ठोस धातु के बेलन को पिघलाकर बारह एक ही आकार के गोले बनाए गए। प्रत्येक गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

29. बाल्टी के दो सिरों का व्यास 44 सेमी और 24 सेमी है। बाल्टी की ऊँचाई 35 सेमी है। बाल्टी का आयतन ज्ञात कीजिए।

लघु उत्तरीय प्रश्न-II

30. शंकु के छिन्नक के रूप की बाल्टी 28,490 लीटर पानी से पूरी तरह भरी है। इसके ऊपर और नीचे की त्रिज्याएं 28 सेमी व 21 सेमी क्रमशः है। बाल्टी की ऊंचाई ज्ञात कीजिए। (NCERT Exemplar)

31. तीन एक ही धातु के घनों की भुजाओं का अनुपात 3 : 4 : 5 है। इन तीनों को पिघलाकर एक बड़ा घन बनाया गया, जिसका विकर्ण $12\sqrt{3}$ सेमी है। तीनों घनों की भुजाएं ज्ञात कीजिए।

32. 10.5 सेमी त्रिज्या वाले बेलनाकार टैंक की गहराई ज्ञात कीजिए, यदि इसका आयतन 15 सेमी × 11 सेमी × 10.5 सेमी के घनाभ के आयतन के बराबर हो।

33. 8 सेमी त्रिज्या और 12 सेमी ऊंचाई के एक शंकु को उसके आधार के समानंतर धुरी के मध्यबिंदु से दो भागों में बांटा गया है। दोनों भागों के आयतनों का अनुपात बताइए। (NCERT Exemplar HOTS)

34. एक पैट्रोल टैंक मध्य से 28 सेमी व्यास व 24 सेमी लम्बाई का बेलनाकार रूप में है। इसके दोनों छोर 28 सेमी व्यास व 9 सेमी लम्बाई के शंकुओं से जुड़े हैं। इस टैंक का आयतन बताइए।

35. 6 मी चौड़ी 1.5 मी गहरी एक नहर में पानी 10 किमी / घंटा की चाल से बह रहा है। 30 मिनट में, यह नहर कितने क्षेत्रफल की सिंचाई कर पाएगी, जबकि सिंचाई के लिए 8 सेमी गहरे पानी की आवश्यकता होती है। (NCERT, CBSE 2019)

36. एक ठोस बेलन के आकार का है जिसके दोनो सिरे अर्ध गोलाकार हैं। ठोस की कुल लम्बाई 20 सेमी है तथा बेलन का व्यास 7 सेमी है। ठोस का कुल आयतन ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ प्रयोग कीजिए) (CBSE 2019)

37. एक ही धातु के गोलों का भार 1 किलोग्राम तथा 7 किलोग्राम है। छोटे गोले की त्रिज्या 3 सेमी है। दोनों गोलों को पिघलाकर एक बड़ा गोला बनाया गया। नए गोले का व्यास ज्ञात कीजिए। (CBSE 2019)

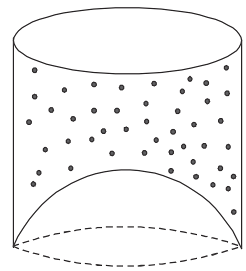
38. मॉडल बनाने वाली मिटट्ी से बने एक शंकु की ऊँचाई 24 सेमी तथा आधार की त्रिज्या 6 सेमी है। एक बच्चा इसका आकार बदल कर इसे एक गोले में बदल देता है। इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए तथा इस गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(NCERT, CBSE 2019)

39. एक किसान अपने खेत में बनी 10 मी. व्यास वाली तथा 2 मी. गहरी एक बेलनाकार टंकी को आंतरिक व्यास 20 सेमी वाले एक पाइप द्वारा एक नहर से जोड़ता है। यदि पाइप में पानी 3 किमी/घंटा की चाल से बह रहा है, तो कितने समय बाद टंकी पूरी भर जाएगी?

(NCERT, CBSE 2019)

40. एक जूस बेचने वाला अपने ग्राहकों को आकृति में दर्शाए गए गिलासों में जूस देता है। बेलनाकार गिलास का आंतरिक व्यास 5 सेमी था, परन्तु गिलास के चिले आधार में एक उभारा हुआ अर्धगोला था, जिससे गिलास की धारिता कम हो जाती थी। यदि एक गिलास की ऊँचाई 10 सेमी थी, तो गिलास की आभासी धारिता तथा उसकी वास्तविक धारिता ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ प्रयोग कीजिए) (NCERT, CBSE 2019, 2009)



41. एक लकड़ी रेत से भरी एक बेलनाकार बाल्टी को, जिसकी आधार त्रिज्या 18 सेमी तथा ऊँचाई 32 सेमी है, फर्श पर इस प्रकार खाली करती है कि रेत का शंक्वाकार ढेर बनता है। यदि इस शंक्वाकार ढेर की ऊँचाई 24 सेमी है, तो तियर्क ऊँचाई (दशमलव के 1 स्थान तक ठीक) ज्ञात कीजिए। (CBSE 2019)

42. 5 किमी/घंटा की दर से पानी का एक पाइप, जिसका व्यास 14 सेमी है, में से बहकर एक आयताकार आधार वाली टंकी में गिर रहा है, जिसकी लंबाई 50 मी. तथा चौड़ाई 44 मी. है। कितने समय में टंकी में पानी का स्तर 7 सेमी ऊँचा हो जाएगा? ($\pi = \frac{22}{7}$ प्रयोग कीजिए) (CBSE 2019)

43. एक आयतकार मैदान की लंबाई 20 मी. तथा चौड़ाई 14 मी. है। 10 मी. गहरा तथा 7 मी. व्यास वाला एक कुआँ, मैदान के एक कोने में खोदा जाता है। खुदाई से निकलने वाली मिटट्ी को मैदान के शेष भाग में बराबर फैला दिया जाता है। ज्ञात कीजिए कि मैदान की

ऊँचाई कितनी बढ़ जायेगी? ($\pi = \frac{22}{7}$ प्रयोग कीजिए) (CBSE 2019)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

44. शंकु के छिन्नक के आकार की ऊपर से खुली एक बाल्टी का आयतन 12308.8 घन सेमी है। इसके ऊपरी तथा निचले वृत्तीय सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः 20 सेमी तथा 12 सेमी है। बाल्टी की ऊँचाई तथा इसके बनाने में लगी धातु की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए) (CBSE 2019)

45. लोहे के एक ठोस खंभे में 220 सेमी ऊँचाई के एक बेलन जिसके आधार का व्यास 24 सेमी है, के ऊपर 60 सेमी ऊँचाई का एक अन्य बेलन अध्यारोपित है जिसकी त्रिज्या 8 सेमी है। इस खंभे का भार ज्ञात कीजिए, जबकि दिया गया है कि 1 घन सेमी लोहे का भार लगभग 8 ग्राम है। ($\pi = 3.14$ प्रयोग कीजिए) (NCERT, CBSE 2019)

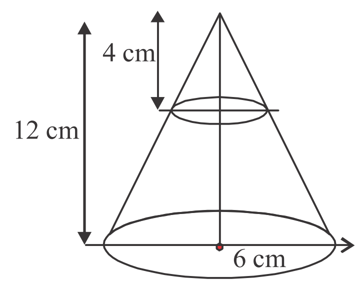
46. त्रिज्या 6 सेमी और ऊँचाई 15 सेमी वाले एक लंब–वृत्तीय बेलन के आकार का बर्तन आइसक्रीम से पूरा भरा हुआ है। इस आइसक्रीम को 10 बच्चों में बाँटने के लिए बराबर–बराबर शंकुओं में भरा जाना है, जिनका ऊपरी सिरा अर्धगोले के आकार का है। यदि शंक्वाकार भाग की ऊँचाई इसके आधार की त्रिज्या का 4 गुना है, तो आइसक्रीम शंकु की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। (CBSE 2019)

47. धातु की चादर से बना, ऊपर से खुला एक बर्तन शंकु के छिन्नक के आकार का है जिसकी ऊँचाई 16 सेमी है तथा निचले तथा ऊपरी सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8 सेमी तथा 20 सेमी हैं। इसमें पूरी तरह से भरे जा सकने वाले ₹. 50 प्रति लीटर वाले दूध का मूल्य ज्ञात कीजिए। इस बर्तन को बनाने में लगी धातु की चादर का मूल्य ज्ञात कीजिए जबकि इसकी दर ₹ 10 प्रति 100 वर्ग सेमी है। ($\pi = 3.14$ लीजिए) (NCERT, CBSE 2019)

48. एक धातु की ऊपर से खुली बाल्टी, शंकु के छिन्नक के आकार की है। यदि इसके ऊपरी तथा निचले वृत्तीय सिरों के व्यास क्रमशः 45 सेमी तथा 25 सेमी हैं तथा बाल्टी की सीधी (ऊर्ध्वाधर) ऊँचाई 24 सेमी है, तो इस बाल्टी को बनाने में लगी धातु की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यह भी ज्ञात कीजिए कि इसमें कितना पानी आ सकता है? ($\pi = \frac{22}{7}$ प्रयोग कीजिए) (NCERT, CBSE 2019)

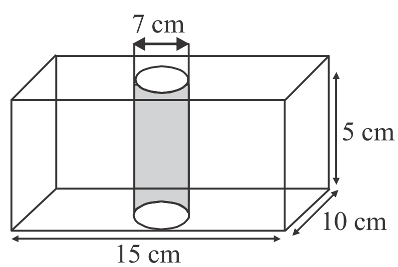
49. दी गई आकृति 12 सेमी0 ऊंचाई के एक ठोस शंकु की है। जिसके आधार की त्रिज्या 6 सेंमी0 है, इसके उपरी भाग से आधार के समांतर तल द्वारा 4 सेमी0 ऊंचाई वाला शंकु काट दिया गया। शेष बचे ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ और

$\sqrt{5} = 2.236$ लीजिए) (CBSE 2015)



50. एक ठोस लकड़ी का खिलौना, अर्ध गोले पर अध्यारोपित समान त्रिज्या के शंकु के आकार का है। अर्ध गोले की त्रिज्या 3.5 सेमी0 है तथा इस खिलौने को बनाने में $166\frac{5}{6}$ घन सेमी0 लकड़ी लगी है। खिलौने की ऊंचाई ज्ञात कीजिए। खिलौने के अर्ध गोलाकार पृष्ठीय तल को रु 10 प्रति वर्ग सेमी0 की दर से रंग करवाने का व्यास भी ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए) (CBSE 2015)

51. दी गई आकृति, धातु के एक ठोस घनाभाकार ब्लाक की है। इसकी भुजाएं 15सेमी $\times$ 10 सेमी $\times$ 5 सेमी हैं। इसमें से 7 सेमी व्यास वाला एक बेलनाकार छेद काट कर निकाल दिया गया है। शेष बचे ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)



52. एक ठोस खिलौना बेलनाकार है जिसका एक सिरा अर्धगोलीय तथा दूसरे सिरे पर शंकु है। इन सभी का व्यास 4.2 सेमी है तथा बेलनाकार और शंक्वाकार भाग की ऊंचाई क्रमशः 12 सेमी और 7 सेमी है। खिलौने का आयतन ज्ञात कीजिए।

53. एक टैन्ट 3 मी. की ऊंचाई तक बेलनाकार और उसके ऊपर शंकु के आकार का है। टैन्ट की कुल ऊंचाई 13.5 मी. तथा आधार की त्रिज्या 14 मी. है। टैन्ट को बनाने में लगे कपड़े का व्यय रु0 80 मी. प्रति वर्ग मी0 की दर से ज्ञात कीजिए।

54. 22 मी. × 20 मी. की छत से वर्षा का पानी एक बेलनाकार बर्तन जिसके आधार का व्यास 2 मी. और ऊंचाई 3.5 मी. है, में डाला गया। यदि पानी से बर्तन पूरा भर जाए, तो बताइए कितने सेमी वर्षा हुई? (NCERT Exemplar)

55. 14 सेमी लम्बे एक लंब खोखले बेलन के बाहरी तथा अंदर के व्रक पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अंतर 88 वर्ग सेमी0 है। यदि बेलन को बनाने में लगी धातु का आयतन 176 घन सेमी0 हो तो बेलन के बाह्य तथा आन्तरिक व्यास ज्ञात कीजिए। (HOTS)

उत्तर और संकेत

1. (a) (x) $4\pi r^2$
   (b) (v) $\pi r(r + l)$
   (c) (vi) $l \times b \times h$
   (d) (vii) $\frac{2}{3}\pi r^3$
   (e) (viii) πrl
   (f) (ix) $2\pi r^2$
   (g) (i) $2\pi rh$
   (h) (ii) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
   (i) (iii) $2\pi r(r + h)$
   (j) (iv) $\frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + rR)$

2. (i) $2a^2 + 4ab$
   (ii) $2\pi r^3$
   (iii) $2\pi r(r + h)$
   (iv) $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$
   (v) $\frac{2}{3}\pi r^3$
   (vi) $3\pi r^2$
   (vii) $2\pi h(R + r)$
   (viii) 8
   (ix) $\frac{1}{8}$

3. (i) असत्य
   (ii) असत्य
   (iii) असत्य
   (iv) असत्य
   (v) सत्य
4. (C) $3\pi r^2$
5. (D) 3 मात्रक
6. (C) 3 : 1 : 2
7. (A) $2r$
8. (D) 12 सेमी
9. (A) 50 सेमी
10. (B) 14 सेमी
11. (A) 21 सेमी
12. (D) शंकु का छिन्नक और अर्धगोला
13. (A) 4950 वर्ग सेमी
14. बेलन और शंकु का छिन्नक
15. बेलन और शंकु
16. शंकु का छिन्नक
17. शंकु सिरों वाला बेलन
18. अपरिवर्तित
19. वृत्त
20. 462 वर्ग सेमी
21. 16 : 25
22. 3 : 1
23. $2r$
24. 11 सेमी.
25. घनों की संख्या $= \dfrac{16\times12\times10}{2\times2\times2} = 240$
26. घन की भुजा $= \sqrt[3]{729} = 9$ सेमी
    सबसे बड़े शंकु की ऊँचाई = घन की भुजा = 9 सेमी
27. घन की भुजा $= \sqrt[3]{64} = 4$ सेमी.
    नए घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 8 सेमी., 4 सेमी. और 4 सेमी. है।
    घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल
    $= 2[8 \times 4 + 4 \times 4 + 4 \times 8]$
    = 160 वर्ग सेमी.

28. 12 ठोस गोलों का आयतन = ठोस बेलन का आयतन

$$12\times\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi(1)^2 \times 16$$

$r^3 = 1$

$r = 1$ सेमी.

29. बाल्टी का आयतन

$$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 35\ [(22)^2 + (12)^2 + 22 \times 12]$$

$$= 32706\cdot\frac{2}{3} \text{ घन सेमी.}$$

30. बाल्टी का आयतन = 28490 घन सेमी.

$$\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times h\,[(28)^2 + (21)^2 + 28 \times 21] = 28490$$

h = 15 सेमी.

31. माना तीन घनों की भुजा क्रमशः $3x$ सेमी., $4x$ सेमी तथा $5x$ सेमी है

नए घन का आयतन = तीनों घनों के आयतन का योग

$(\text{भुजा})^3 = (3x)^3 + (4x)^3 + (5x)^3$

भुजा = $6x$ सेमी

बड़े घन का विकर्ण = $12\sqrt{3}$ सेमी

$\sqrt{3}(6x) = 12\sqrt{3}$

$x = 2$

अतः तीनों घनों की भुजा क्रमशः 6 सेमी, 8 सेमी और 10 सेमी है।

32. बेलनाकार टैंक का आयतन = आयताकार टैंक का आयतन

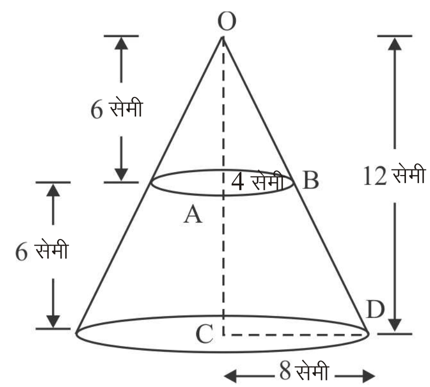
$$\frac{22}{7}\times(10.5)\times h = 15 \times 11 \times 10.5$$

$h = 5$ सेमी.

33. $\Delta OAB \sim \Delta OCD$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC}$$

AB = 4 सेमी.



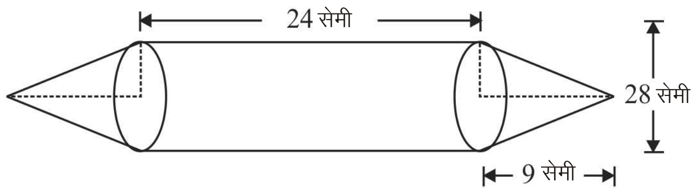
$$\frac{\text{शंक्वाकार भाग का आयतन}}{\text{छिन्नक भाग का आयतन}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\pi(4)^2 \times 6}{\frac{1}{3}\pi \times 6[(8)^2 + (4)^2 + 8 \times 4]} = \frac{1}{7}$$

अतः अभीष्ट अनुपात 1 : 7 या 7 : 1 है।

34. टैंक का आयतन = बेलनाकार भाग का आयतन + 2 × शंक्वाकार भाग का आयतन

= 18480 घन सेमी.



35. 30 मिनटों में नहर द्वारा तय की लम्बाई

= 5000 मीटर

∴ 30 मिनट में बह पानी का आयतन

= 6 × 1.5 × 5000 घन मी.

सींचा गया क्षेत्रफल $= \frac{6 \times 1.5 \times 5000}{0.08}$ = 56500 वर्ग मी.

36. बेलन की ऊँचाई = 20 – 3.5 – 3.5

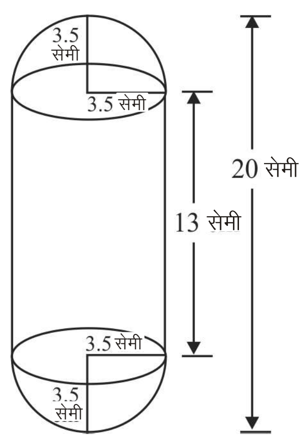
= 13 सेमी.

ठोस का आयतन = बेलनाकार भाग का आयतन

+ 2 × अर्ध गोलाकार भाग का आयतन

$$= \frac{22}{7} \times (3.5)^2 \times 13 + 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2$$

$= 680\frac{1}{6}$ घन सेमी.



37. पहले गोले की त्रिज्या = 3 सेमी   माना धातु का घनत्व d किग्रा./घन सेमी. है।

$$\therefore \quad \frac{4}{3}\pi(3)^3 \times d = 1 \qquad ...(1)$$

माना दूसरे गोले की त्रिज्या r सेमी है।

$$\therefore \quad \frac{4}{3}\pi(r)^3 \times d = 7 \qquad ...(2)$$

(1) और (2) के द्वारा, हमें प्राप्त

$$r^3 = 7(3)^3$$

माना नए गोले की त्रिज्या R सेमी है।

प्रश्नानुसार,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(3)^3 + \frac{4}{3}\pi r^3$$

$R^3 = (3)^2 + 7(3)^3$

R = 6 सेमी.

$\therefore$ नए गोले का व्यास = 2 × 6 = 12 सेमी.

38. गोले का आयतन = शंकु का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi(6)^2 \times 24$$

$$r = 6 \text{ सेमी.}$$

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 4 \times \pi \times (6)^2 = 144\pi$ वर्ग सेमी.

39. टैंक भरने का समय

$$= \frac{\text{बेलनाकार टैंक का आयतन}}{\text{1 घंटे में बहे पानी का आयतन}}$$

$$= \frac{\pi(50)^2 \times 2}{\pi\left(\frac{1}{10}\right)^2 \times 3000} = 100 \text{ मिनट या 1 घंटा 40 मिनट}$$

40. आभासी धारिता $= 3.14 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 10 = 196.25$ घन सेमी.

वास्तविक धरिता = बेलनाकार भाग का आयतन – अर्धगोलाकार भाग का आयतन

$= 196.25 - \frac{2}{3} \times 3.14 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3$

= लगभग 163.54 घन सेमी.

41. शंक्वाकार ढेर का आयतन = बेलनाकार बाल्टी का आयतन

$\frac{1}{3}\pi r^2 \times 24 = \pi(18)^2 \times 32$

$r = 36$ सेमी.

तिर्यक ऊँचाई $= \sqrt{(36)^2 + (24)^2} = 43.2$ सेमी.

42. टैंक में बढ़े हुए पानी का आयतन

$= 50 \times 44 \times \frac{7}{100} = 154$ घन मी.

1 घंटे में बहे पानी का आयतन

$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{100}\right)^2 \times 5000 = 77$ घन मी.

अभीष्ट समय $= \frac{154}{77} = 2$ घंटे

43. बढ़ी हुई ऊँचाई $= \dfrac{\text{खोदी गई मिट्टी}}{\text{मैदान के शेष भाग का क्षेत्रफल}}$

$= \dfrac{\frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 10}{\left[22 \times 14 - \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\right]}$ = लगभग 1.5 मी.

44. बाल्टी का आयतन = 12308.8 घन सेमी.

$\frac{1}{3} \times 3.14 \times h\left[(20)^2 + (12)^2 + 20 \times 12\right] = 12308.8$

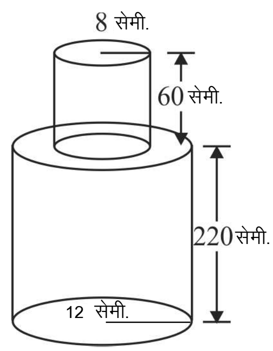
$h = 15$ सेमी.

$l = \sqrt{(15)^2 + (20-12)^2} = 17$ सेमी.

धातु की चादर का क्षेत्रफल = $3.14 \times 17 \times (20 + 12) + 3.14 \times (12)^2$
= 2160.32 वर्ग सेमी

45. ठोस का आयतन = $3.14 \times (12)^2 \times 220 + 3.14 \times (8)^2 \times 60$
= 111532.8 घन सेमी

खंभे का भार = $111532.8 \ \frac{8}{1000}$ किग्रा
= 892.2624 किग्रा



46. माना शंक्वाकार भाग की त्रिज्या r सेमी है।
अतः शंक्वाकार भाग की ऊँचाई 4r सेमी है।
प्रश्नानुसार
10 × आइसक्रीम के एक शंकु का आयतन = बेलनाकार बर्तन का आयतन

$$10 \times \left[\frac{1}{3}\pi r^2 \times 4r + \frac{2}{3}\pi r^3\right] = \pi (6)^2 \times 15$$

r = 3 सेमी

47. बर्तन का आयतन = $3.14 \times 16 \, [(20)^2 + (8)^2 + 20 \times 8]$
= लगभग 10450 घन सेमी = 10.45 लीटर

दूध का मूल्य = 10.45×50 = ₹ 522.50

तिर्यक ऊँचाई = $\sqrt{(16)^2 + (20-8)^2}$ = 20 सेमी

बर्तन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3.14 \times 20 \times (20 + 8) + 3.14 \times (8)^2$
= 1959.36 वर्ग सेमी

धातु की चादी का मूल्य = $\frac{10}{100} \times 1959.36$ = ₹ 195.94.

48. तिर्यक ऊँचाई $= \sqrt{(24)^2 + \left(\frac{45}{2} - \frac{25}{2}\right)^2} = 26$ सेमी

बाल्टी का पृष्ठीय का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{22}{7} \times 26 \times \left(\frac{45}{2} + \frac{25}{2}\right) + \frac{22}{7} \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2}$

= लगभग 3351.07 वर्ग सेमी

आयतन $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 24 \times \left[\left(\frac{45}{2}\right)^2 + \left(\frac{25}{23}\right)^2 + \frac{45}{2} \times \frac{25}{2}\right]$

= लगभग 23728.57 घन सेमी

49. छिन्नक की त्रिज्याएँ 6 सेमी और 8 सेमी है। छिन्नक की ऊँचाई = 12 – 4 = 8 सेमी

तिर्यक ऊँचाई $= \sqrt{(82)^2 + (6-2)^2} = 4\sqrt{5}$ सेमी.

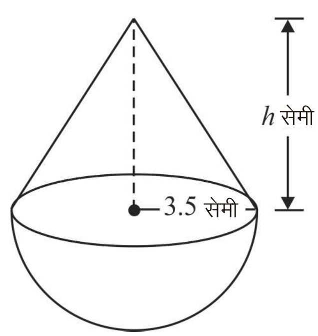
छिन्नक का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{22}{7} \times 4 \times 2.236 \times [6+2] + \frac{22}{7} \times (6)^2 + \frac{22}{7} \times (2)^2$

= लगभग 350.592 वर्ग सेमी

50. खिलौने का आयतन $= \frac{1001}{6}$ घन सेमी

$$\frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^3 + \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times h = \frac{1001}{6}$$

h = 6 सेमी



खिलौने के अर्धगोलाकार भाग का क्षेत्रफल $= 2 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2$

= 77 वर्ग सेमी

रंग करने का मूल्य = 77 × 10 = ₹ 770

51. शेष बचे ठोस पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनाभाकार ब्लाक का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल – 2 × वृत्ताकार आधार का क्षेत्रफल

$$= 2(15 \times 10 + 10 \times 5 + 15 \times 5) + 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times 5 - 2 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

= 583 वर्ग सेमी

52. खिलौने का आयतन = बेलनाकार भाग का आयतन + अर्धगोलाकार भाग का आयतन + शंक्वाकार भाग का आयतन

$$= \frac{22}{7} \times (2\,.\,1)^2 \times 12 + \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (2\,.\,1)^2 \times 7 + \frac{2}{3} \times (2.\,1)^3$$

= 218.064 घन सेमी.

53. तिर्थक ऊँचाई $= \sqrt{(14)^2 + (10.5)^2} = 17.5$ मी

टैन्ट का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2 \times \frac{22}{7} \times 3 \times 14 + \frac{22}{7} \times 14 \times 17.5 = 1034$ वर्ग मी.

कपड़े का मूल्य = 1034 × 80 = ₹ 82720.

54. वर्षा की मात्रा $= \dfrac{\text{बेलनाकार बर्तन का आयतन}}{\text{छत्त का क्षेत्रफल}} = \dfrac{\frac{22}{7} \times (1)^2 \times 3.5}{22 \times 20} = \dfrac{1}{40}$ मी. या 2.5 सेमी

55. माना खोखले बेलन की आंतरिक व बाहरी त्रिज्या क्रमशः r सेमी और R सेमी है।

बाहरी व आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल का अंतर = 88 वर्ग सेमी

$$2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times (R - r) = 88$$

$$R - r = 1 \qquad ...(1)$$

खोखले बेलन का आयतन = 176 घन मी.

$$\frac{22}{7} \times 14 \times (R^2 - r^2) = 176$$

$$R^2 - r^2 = 4$$

$$(R - r)(R + r) = 4$$

$$R + r = 4 \qquad ....(2)\ [\because (1) \text{ से}]$$

समीकरण (1) और (2) को हल करने पर, R = 2.5 सेमी. व r = 1.5 सेमी.

अतः बाहरी व आंतरिक व्यास क्रमशः 5 सेमी. व 3 सेमी. है।

अभ्यास प्रश्न पत्र

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

समयः 1 घंटा | *अंक : 20*

खण्ड–अ

1. त्रिज्या r वाले एक अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ––––– है। **1**

2. एक शंकु को उसके आधार के समांतर काटने पर कौन–सी दो ज्यामिति आकृतियाँ प्राप्त होती है?

   (A) एक बेलन और एक शंकु

   (B) एक शंकु और एक अर्धगोला

   (C) एक गोला और एक शंकु

   (D) शंकु का छिन्नक और एक शंकु **1**

3. 4.2 सेमी भुजा वाले एक घन से काटे जा सकने वाले बड़े से बड़े लम्बवृत्तीय शंकु की त्रिज्या (सेमी में) है।

   (A) 4.2 (B) 2.1 (C) 8.4 (D) 1.05 **1**

4. एक घन का आयतन 1000 घन सेमी है। घन की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए। **1**

खण्ड–ब

5. एक शंकु के छिन्नक, जो 45 सेमी ऊँचा है, के सिरों की त्रिज्याएँ 28 सेमी और 7 सेमी हैं। इसका आयतन ज्ञात कीजिए। **2**

6. 10.5 सेमी त्रिज्या के एक ठोस गोले को पिघला कर छोटे ठोस शंकु बनाए गए, जिनमें प्रत्येक की त्रिज्या 3.5 सेमी तथा ऊँचाई 3 सेमी है। इस प्रकार बने शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए। **2**

7. एक घन तथा एक गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल समान है। गोले तथा घन के आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए। **2**

खण्ड–स

8. एक बर्तन उलटे हुए शंकु के आकार का है जिसकी ऊँचाई 8 सेमी तथा खुले हुए ऊपरी सिरे की त्रिज्या 5 सेमी है। शंकु को पानी से भरा जाता है। उसमें कुछ सीसे की गोलियाँ डालने पर, जिनकी त्रिज्या 0.5 सेमी है, एक–चौथाई पानी बिखर जाता है। बर्तन में डाली गई सीसे की गोलियाँ की संख्या ज्ञात कीजिए। **3**

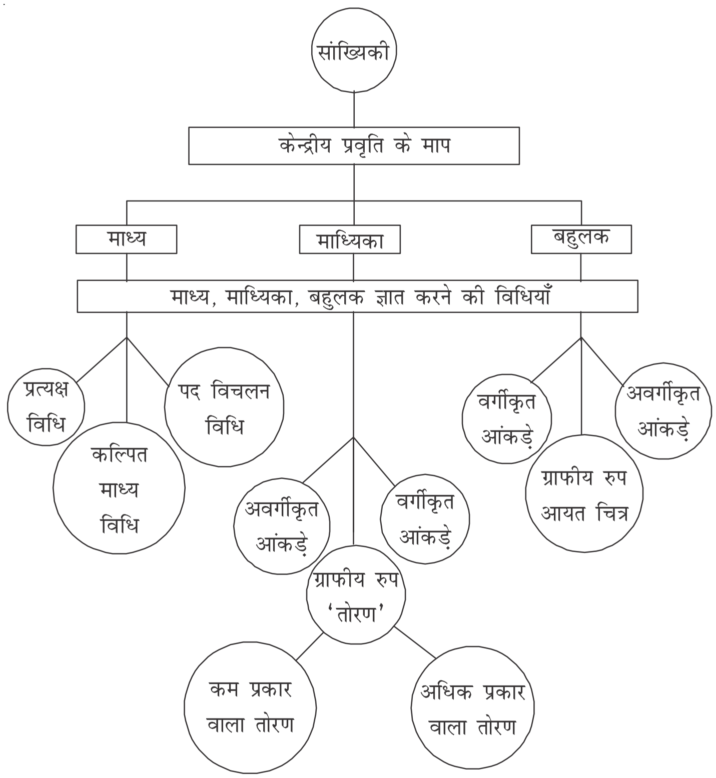
9. अधिकतम विमाओं वाले एक लम्ब वृत्तीय शंकु को एक 9 सेमी किनारे वाले ठोस घन में से काटा गया हैं। बचे हुए ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। **3**

खण्ड–द

10. एक अस्पताल में प्रयोग किया गया पानी 2 मी. व्यास तथा 5 मी. ऊँचाई के एक बेलनाकार टैंक में एकत्र होता है। पुनर्चक्रमण के पश्चात् इस पानी को अस्पताल के एक पार्क जिसकी लम्बाई 25 मी. और चौड़ाई 20 मी. है, की सिंचाई के लिए प्रयोग किया जाता है। यदि टैंक पूर्णतः भरा हो तो इससे पार्क में सिचाई के लिए ठहरे पानी की ऊँचाई क्या होगी? **4**

14
अध्याय

सांख्यिकी



महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. माध्य $\overline{x}$

(a) अवर्गीकृत आंकड़ों के लिए

$$x = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

$$= \frac{\text{आकड़ों का योग}}{\text{आकड़ों की संख्या}}$$

(b) वर्गीकृत आंकड़ों के लिए

(i) यदि आंकड़े बड़े हों या हल मुश्किल हो तो हम कल्पित माध्य विधि या पद विचलन विधि

→ कल्पित माध्य विधि $\overline{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$, a = कल्पित माध्य और $d_i = x_i - a$

→ पद विचलन विधि $\overline{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$u_i = \frac{d_i}{h}$, h = वर्ग माप

2. माध्यिका

(a) अवर्गीकृत आंकड़ों के लिए पहले आंकड़ों को बढ़ते क्रम से या घटते क्रम से लगाऐं। फिर आंकड़ों की संख्या ज्ञात करें, माना n.

यदि n विषम हैं तो माध्यिक $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ वां आंकड़ा

यादि n सम है तो माध्यिका

$$= \frac{\left(\frac{n}{2}\text{ वां}\right)\text{ मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{ वां मान}}{2}$$

(b) वर्गीकृत आंकड़ों के लिए

$$\text{माध्यिक} = l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf_0\right)}{f_1} \times h$$

3. बहुलक $= l + \left(\frac{f_i - f_o}{2f_i - f_o - f_2}\right) \times h$ वगीकृत आंकड़ों के लिए

अवर्गीकृत आंकड़ों के लिए बहुलक वह आंकड़ा है जो सबसे अधिक बार आए।

नोट

1. माध्य, माध्यिका और बहुलक में सम्बन्ध

   बहुलक = 3 (माध्यिका) – 2 (माध्य) (अनुभवजन्य संबंध)

2. यदि वर्ग अंतराल सतत् न हो तो उन्हें सतत् बनाने के लिए निम्न वर्ग में से 0.5 घटाओ और उपरि सीमा में 0.5 जोड़ो।

3. x_i = वर्ग चिन्ह =

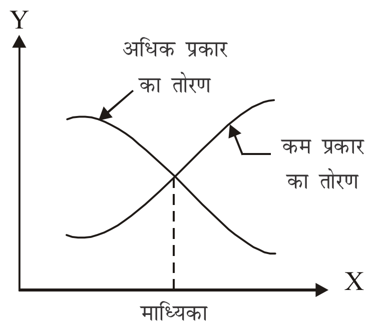
$$\frac{\text{उपरि वर्ग सीमा} + \text{निम्न वर्ग सीमा}}{2}$$

4. h = वर्ग माप = उपरि सीमा – निम्न सीमा

5. बहुलक वर्ग – वह अंतराल जिसकी बारंबारता सबसे अधिक हो।

6. माध्यिका वर्ग – वह अतंराल जिसकी संचयी बारंबारता $\frac{n}{2}$ से बड़ी या लगभग आसपास हो। $\left(n = \sum f_i\right)$

7. किसी वर्ग अंतराल की माध्यिका, उस बिन्दु का x अक्ष होता है, जो कम प्रकार और अधिक प्रकार के तोरण का प्रतिच्छेदी बिन्दु होता है (आलेखी विधि)



8. यदि $x_1, x_2, ..., x_n$ का माध्य $\bar{x}$ हो तो।

   (a) $kx_1, kx_2, ..., kx_n$ का माध्य $k\bar{x}$ होगा।

   (b) $\frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k} ......, \frac{x_n}{k}$ का माध्य $\frac{\bar{x}}{k}$ होगा।

   (c) $x_1 + k, x_2 + k ....., x_n + k$ का माध्य $\bar{x} + k$ होगा।

   (d) $x_1 - k, x_2 - k, ... x_n - k$ का माध्य $\bar{x} - k$ होगा।

9. यदि n_1 आंकड़ों का माध्य $\bar{x}_1$ हो और n_2 आंकडो का माध्य $\bar{x}_2$ हो तो इनका संयुक्त माध्य $= \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

10. $\Sigma x_i = n\bar{x}$

11. परिसर = अधिकतम आंकड़ा – न्यूनतम आंकड़ा

12. बहुलक ग्राफ पर आयत चित्र द्वारा दर्शाया जाता है।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. पहली 12 अभाज्य संख्याओं का माध्य क्या होगा?

2. 20 संख्याओं का माध्य 18 है। यदि प्रत्येक संख्या में 2 जोड़ दिया जाए, तो नया माध्य क्या होगा?

3. पाँच प्रेक्षणों 3, 5, 7, x और 11 का माध्य 7 हो, तो x का मान बताइए।

4. पहली 5 प्राकृत संख्याओं का माध्यक क्या होगा?

5. यदि निम्न आकड़ों का माध्यक 27.5 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

24, 25, 26, $x + 2$, $x + 3$, 30, 33, 37

6. निम्न, आंकड़ों का बहुलक क्या है?

5, 7, 8, 5, 7, 6, 9, 5, 10, 6.

7. एक आंकड़ें का माध्य तथा बहुलक क्रमशः 24 और 12 है, इसका माध्यक निकालिए।

8. वर्ग 19.5 – 29.5 का वर्ग चिन्ह ज्ञात कीजिए।

9. बहुविकल्पिय प्रश्न

(i) यदि किसी बारंबारता सारणी के वर्ग अंतराल 1–10, 11–20, 21–30, – – – – – 51–60 हो तो हर वर्ग अंतराल का माप होगा।

(a) 9 (b) 10

(c) 11 (d) 5.5

(ii) यदि किसी बारंबारता सारणी के वर्ग अंतराल 1–10, 11–20, 21–30, – – – –, 61–70 हो तो 21–30 की उपरिसीमा होगी।

(a) 21 (b) 30

(c) 30.5 (d) 20.5 होगी।

(iii) निम्न बारंबारता सारणी में माध्यिका वर्ग बताऐं

वर्ग	0–5	6–11	12–17	18–23	24–29
बारंबारता	12	10	15	8	11

(a) 17 (b) 17.5

(c) 18 (d) 18.5

(iv) किसी फैक्टरी के कर्मचारियों की दैनिक मजदूरी निम्न है

दैनिक मजदूरी (₹ में)	121–126	127–132	133–138	139–144	145–150
कमर्चचारियों की संख्या	5	27	20	18	12

इस सारणी के बहुलक वर्ग की निम्न सीमा बताऐं।

(a) ₹ 127 (b) ₹ 126

(c) ₹ 126.5 (d) ₹ 133

(v) निम्न तालिका में माध्यिका वर्ग और बहुलक वर्ग की निम्न सीमाओं का योग बताऐं।

वर्ग	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25
बारंबारता	10	15	12	20	9

(a) 15 (b) 25

(c) 30 (d) 35

10. रिक्त स्थान भरें:

(a) बहुलक = 3 .... – 2 .....

(b) तोरण वक्र का प्रयोग .... ज्ञात करने में होता है।

(c) यदि कम प्रकार और अधिक प्रकार के तोरण का प्रतिछेदी बिन्दु (20.5, 30.7) हो तो माध्यिका का मान .... होगा।

(d) किसी बारंबारता सारणी का बहुलक आलेख पर .... द्वारा प्राप्त होता है।

(e) यदि बहुलक 8 हो, माध्य भी 8 हो तो माध्यिका का मान .... होगा।

(f) वह केन्द्रीय प्रवृत्ति जो ग्राफ द्वारा प्राप्त नही हो सकती .... है।

(g) यदि एक सत्तत् बारंबारता सारणी के वर्ग चिन्ह् 22, 30, 38, 46, 54, 62 हो तो वर्ग चिन्ह् 46 का वर्ग अंतराल .... होगा।

(h) संयची बारंबारता सारणी का प्रयोग .... ज्ञात करने में मदद करती है।

(i) माध्य ज्ञात करने की पद विचलन विधि का फार्मूला .... होता है।

(j) वर्गीकृत आंकड़ों की माध्यिका ज्ञात करने का सूत्र .... होता है।

(k) वर्गीकृत आंकड़ों का बहुलक ज्ञात करने का सूत्र .... होता है।

(l) दिए गए आंकड़ों की 255, 125, 130, 160, 185, 170, 103 का परिसर .... होगी।

(m) वर्गचिन्ह $= \frac{1}{2}$ (———— + ————)

(n) प्रथम दस अभाज्य संख्याओं की माध्यिका —————————— होगी।

(o) कल्पित माध्य विधि का सूत्र ————————— होता है।

लघु उत्तरीय प्रश्न–I

11. 11 प्रेक्षणों का माध्य 50 है। यदि पहले 6 प्रेक्षणों का माध्य 49 तथा अंतिम 6 प्रेक्षणों का माध्य 52 हो, तो छठा प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

12. निम्न बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए।

x	12	16	20	24	28	32
f	5	7	8	5	3	2

13. निम्न आंकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए।

x	10	12	14	16	18	20
f	3	5	6	4	4	3

14. निम्न बारंबारता बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0–5	5–10	10 –15	15–20	20–25	25–30
बारंबारता	2	7	18	10	8	3

15. निम्न आंकड़ों के लिए 'से कम प्रकार' का तोरण खीचिंए।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
20 से कम	0
30 से कम	4
40 से कम	16
50 से कम	30
60 से कम	46
70 से कम	66
80 से कम	82
90 से कम	92
100 से कम	100

16. निम्न आकड़ों की 'से कम संचयी बारंबारता' तालिका बनाइए।

अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
विद्यार्थियों की संख्या	7	9	6	8	10

17. निम्नलिखित बारंबारता बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए:

वर्ग अंतराल	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50	50 – 55
बारंबारता	25	34	50	42	38	14

(CBSE 2018-19)

18. निम्न आंकड़ों का माध्यक क्या हैं? (CBSE 2011)

x	10	20	30	40	50
f	2	3	2	3	1

19. एक बारंबारता बंटन का माध्य (x) 45 है। यदि $\sum f_i = 20$ है तो $\sum f_i x_i$ का मान ज्ञात कीजिए। (CBSE 2011)

लघु उत्तरीय प्रश्न–II

20. यदि निम्न आकड़ों का माध्य 54 हो तो P का मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
बारंबारता	7	P	10	9	13

21. निम्न बारंबारता बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए।

C.I.	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
f	5	3	10	6	4	2

22. निम्न बारंबारता का माध्यक 24 वर्ष है। x का मान ज्ञात कीजिए।

आयु (वर्षों में)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
व्यक्तियों की संख्या	2	25	x	18	7

23. निम्न आंकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

अंक	10 से कम	20 से कम	30 से कम	40 से कम	50 से कम	60 से कम
विद्यार्थियों की संख्या	0	12	20	28	33	40

24. निम्न आकड़ों का 'से अधिक प्रकार' का तोरण खीचिए।

वजन (कि.ग्रा)	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55	55–60
व्यक्तियों की संख्या	2	4	10	15	6	3

25. निम्न आकंड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

ऊचाई (सेमी.में)	30से अधिक	40से अधिक	50से अधिक	60से अधिक	70से अधिक	80से अधिक
पेड़ों की संख्या	34	30	27	19	8	2

26. नीचे दिया हुआ बंटन 100 विद्यार्थियों द्वारा एक परीक्षा में प्राप्त अंको को दर्शा रहा हैः

प्राप्तांकः	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60	60 – 65
विद्यार्थियों की संख्या	14	16	28	23	18	8	3

विद्यार्थियों के माध्य अंक ज्ञात कीजिए। (CBSE 2018-19)

27. निम्न बंटन एक मोहल्ले के बच्चों का जेब खर्च को दर्शाता है। माध्य जेब खर्च ₹18 है। लुप्त बारंबारता ज्ञात कीजिए।

दैनिक जेब भत्ता (₹ में)	11 – 13	13 – 15	15 – 17	17 – 19	19 – 21	21 – 23	23 – 25
बच्चों की संख्या	3	6	9	13	k	5	4

(CBSE 2018)

28. निम्नलिखित बारंबारता बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग अतंराल	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100
विद्यार्थियों की संख्या	15	18	21	29	17

ऊपर दिए गए आंकड़ों का माध्य 53 है तो अनुभवजन्य संबंध द्वारा माध्यिका का अनुमान लगाओ। (CBSE 2018)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

29. निम्न आंकड़ों का माध्य 53 है, तो f_1 और f_2 का मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	योग
बारंबारता	15	f_1	21	f_2	17	100

30. निम्न आंकड़ों का माध्यक 28.5, हो, तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	योग
बारंबारता	5	8	x	15	y	5	60

31. निम्न बंटन का माध्यक 35 है। a तथा b का मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	योग
बारंबारता	10	20	a	40	b	25	15	170

32. निम्न बांरबारता बंटन का माध्य, माध्यक तथा बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	1–15	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50
बारंबारता	2	3	6	7	14	12	4	2

33. एक शहर में 60 दिनों में दर्ज की गई वर्षा निम्न तालिका में दी गई है।

वर्षा (सेमी. में)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
दिनों की संख्या	16	10	8	15	5	6

से अधिक प्रकार के तोरण द्वारा माध्यक ज्ञात कीजिए।

34. पद विचलन विधि द्वारा निम्न आंकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए।

दैनिक व्यय (रुपये में)	100–150	150–200	200–250	250–300	300–350
घरों की संख्या	4	5	12	2	2

35. निम्न आंकड़े एक कक्षा के 100 विद्यार्थियों के प्राप्तकों को दर्शातें है।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0–5	4
5–10	6
10–15	10
15–20	10
20–25	25
25–30	22
30–35	18
35–40	5

इन आंकड़ों द्वारा 'से कम प्रकार' तथा 'से अधिक प्रकार' के तोरण खींचिए। इस आलेख की सहायता से इसका माध्यक ज्ञात कीजिए।

36. एक औद्योगिक क्षेत्र की 30 फैक्ट्रियों द्वारा अर्जित वार्षिक लाभ निम्न है। इन आंकड़ों के लिए दोनों प्रकार के तोरण खीचकर माध्यक ज्ञात कीजिए।

लाभ (लाख रु. में)	फैक्ट्रियों की संख्या
5 के बराबर या अधिक	30
10 के बराबर या अधिक	28
15 के बराबर या अधिक	16
20 के बराबर या अधिक	14
25 के बराबर या अधिक	10
30 के बराबर या अधिक	7
35 के बराबर या अधिक	3
40 के बराबर या अधिक	0

37. निम्नलिखित बंटन को 'से कम प्रकार' के बंटन में बदलिए और फिर उसका तोरण खींचिए।

वर्ग अंतराल	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100
बारंबारता	7	5	8	10	6	6	8

(CBSE 2018-19)

38. यदि निम्न बंटन का माध्य 65.6 हो तो अज्ञात बारंबारताएँ f_1 और f_2 ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	10 – 30	30 – 50	50 – 70	70 – 90	90 – 110	110 – 130	कुल
बारंबारता	5	8	f_1	20	f_2	2	50

(CBSE 2017)

उत्तरमाला

1. 16.4 लगभग

2. 20

3. 9

4. 3

5. $x = 25$

6. 5

7. माध्यक = 20

8. 24.5

9. (i) B (पहले वर्ग अंतराल को सतत् बनाएं)

(ii) C

(iii) C

(iv) C

(v) B (बहुलक वर्ग 15–20

माध्यिका वर्ग 10–15)

10. (a) 3 माध्यिका – 2 माध्य

(b) माध्यिका

(c) 20.5

(d) आयत चित्र

(e) 8

(f) माध्य

(g) 42–50

(दो लगातार आंकड़ों के बीच का अंतर 8 है।

46 में से $\frac{8}{2}$ घटाकर निम्न वर्ग प्राप्त करें।

46 में $\frac{8}{2}$ जोड़कर उपरि वर्ग प्राप्त करें।)

(h) माध्यिका

(i) $\overline{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

(j) माध्यिका $= l + \dfrac{\left(\frac{n}{2} - Cf_o\right)}{f_i} \times h$

(k) बहुलक $= l + \dfrac{(f_1 - f_0)}{(2f_1 - f_2 - f_0)}$

(l) परिसर = 255 – 103 = 152

(m) $\frac{1}{2}$ (उपरि सीमा + निम्न सीमा)

(o) $\bar{x} = a + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

11. 56 **12.** 20

13. 14.8 **14.** 12.89 लगभग

16.

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	7
20 से कम	16
30 से कम	22
40 से कम	30
50 से कम	40

17.

अंक	विद्यार्थियों की संख्या	
25–30	25	
30–35	34 f_0	
35–40	50 f_1	बहुलक वर्ग
40–45	42 f_2	
45–50	38	
50–55	14	

बहुलक $= l + \dfrac{(f_1 - f_0)}{(2f_1 - f_0 - f_2)} \times h$

$= 35 + \dfrac{(50 - 34)}{(100 - 34 - 42)} \times 5 = 35 + \dfrac{16 \times 5}{24}$

$= 35 + 3.33 = 38.33$

18.

x_i	f_i	cf_i
10	2	2
20	3	5
30	2	7
40	3	10
50	1	11
कुल	11	

$$N = 11 \text{ odd}$$

माध्यक $= \left(\dfrac{N+1}{2}\right)$ वां मान $=$ 6वां मान

माध्यक $= 30$

19.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$$

$$45 = \frac{\Sigma f_i x_i}{20}$$

$$\Sigma f_i x_i = 900$$

20. 11

21. 27

22. 10

23. 30

25. 63.75 सेमी.

26.

प्राप्तांक	x_i	d_i	u_i	f_i	$f_i u_i$
30–35	32.5	–15	–3	14	–42
35–40	37.5	–10	–2	16	–32
40–45	42.5	–5	–1	28	–28
45–50	$47.5 = a$	0	0	23	0
50–55	52.5	5	1	18	18
55–60	57.5	10	2	8	16
60–65	62.5	15	3	3	9
				110	–59

$$\overline{x} = a + \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} \times h$$

$$= 47.5 - \frac{59}{110} \times 5$$

$$= 47.5 - 2.68$$

$$= 44.82$$

27. Q 26 के जैसे सारणी बनाए

$$\overline{x} = a + \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} \times h$$

$$18 = 18 + \frac{(k-8)}{(40+k)} \times 2$$

$$2k - 16 = 0$$

$$k = 8$$

28. बहुलक $= l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$

$$= 60 + \frac{(29-21)}{2 \times 29 - 21 - 17} \times 20 = 68$$

$$= 68$$

बहुलक = 3 माध्यिका − 2 माध्य

68 = 3 माध्यिका − 2 × 53

68 + 106 = 3 माध्यिका सरल करें। उत्तर 58

29. $f_i = 18, f_2 = 29$

30. $x = 20, y = 7$

31. $a = 35, b = 25$

32. माध्य = 32.4, माध्यक = 33, बहुलक = 34.39 लगभग

33. माध्य = 25 सेमी.

34. माध्य = 211 रुपये

35. माध्यक = 24

36. माध्यक = 17.5 लाख रुपये

37.

से कम प्रकार	f	cf
40 से कम	7	7
50 से कम	5	12
60 से कम	8	20
70 से कम	10	30
80 से कम	6	36
90 से कम	6	42
100 से कम	8	50

बिंदु (40, 7), (50, 12), (60, 20), (70, 30), (80, 36), (90, 42), (100, 50) आलेख पर लगाएँ व मिलाकर तोरण बनाएं।

38.

वर्ग अंतराल	f_i	x_i	$f_i x_i$
10–30	5	20	100
30–50	8	40	320
50–70	f_1	60	$60 f_1$
70–90	20	80	1600
90–110	f_2	100	$100 f_2$
110–130	2	120	240
	$35+f_1+f_2$		$2260+60f_1+100f_2$

$35 + f_1 + f_2 = 50 \quad \Rightarrow \quad f_1 + f_2 = 15 \quad ...(1)$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$$

$$65.6 = \frac{2260 + 60 f_1 + 100 f_2}{50} \quad \Rightarrow \quad 3f_1 + 5f_2 = 51 \; ...(2)$$

(1) और (2) को सरल करें।

Ans. $f_1 = 12, f_2 = 3$

अभ्यास प्रश्न–पत्र

सांख्यिकी

समय : 1 घंटा *अंक : 20*

खण्ड–अ

1. $a-b$ का वर्ग चिन्ह ज्ञात कीजिए। **1**

2. 11 से 21 के मध्य सभी सम संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए। **1**

3. तोरण वक्र की मदद से हम क्या ज्ञात करते हैं? **1**

(a) परिसर (b) माध्य (c) बहुलक (d) माध्यिका

4. सत्य/असत्य बताएं **1**

माध्य आलेखी विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

खण्ड–ब

5. 50 प्रेक्षणों का माध्य 20 है। यदि प्रत्येक संख्या को 3 से गुण किया जाए, तो नया माध्य ज्ञात कीजिए। **2**

6. 10 प्रेक्षणों का माध्य 15.3 है। यदि 6 और 9 के स्थान पर 8 और 14 रखा जाता है। तो नया माध्य क्या होगा? **2**

7. निम्न बारंबारता सारणी का बहुलक वर्ग बताइए। **2**

वर्ग अंतराल	1–4	5–8	9–12	13–16	17–20	21–24
बारंबारता	8	9	1	12	8	9

खण्ड–स

8. बहुलक ज्ञात कीजिए: **3**

अंक	20 से कम	40 से कम	60 से कम	80 से कम	100 से कम
छात्रों की संख्या	4	10	28	36	50

9. निम्न आंकड़ों का बहुलक 58 वर्ष है तो x का मान ज्ञात करिए। **3**

आयु (वर्षों में)	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
रोगियों की संख्या	5	13	x	20	18	19

खण्ड–द

10. निम्न बंटन का माध्य 57.6 और बारंबारताओं का योग 50 हैं तो f_1 तथा f_2 का मान ज्ञात कीजिए। **4**

वर्ग अंतराल	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
बारंबारता	7	f_1	12	f_2	8	5

अथवा

हॉस्पिटल में एक मास के दौरान दाखिल दिल के रोगियों को निम्न बंटन दर्शाता है।

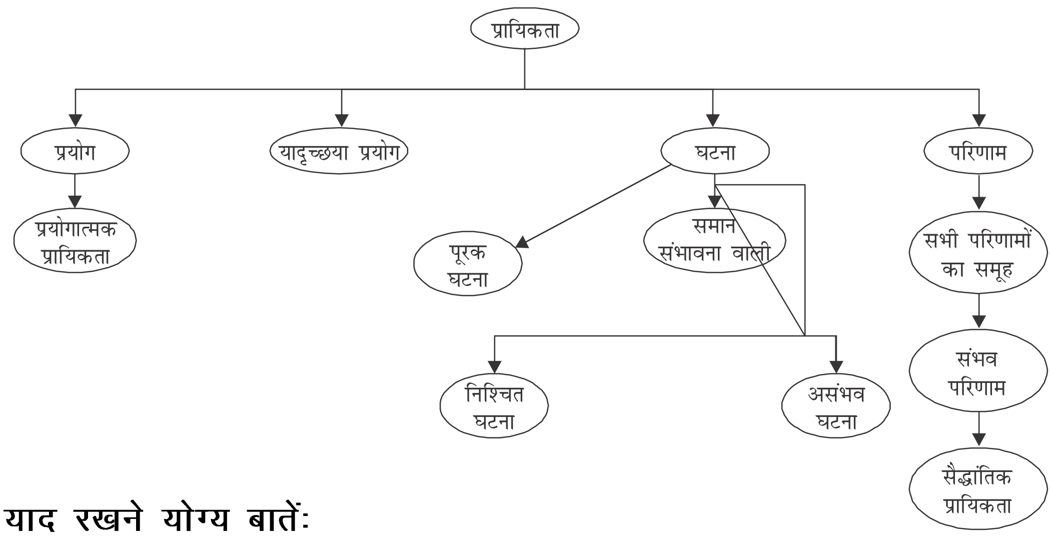
आयु (वर्षों में)	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
रोगियों की सं.	2	8	15	12	10	5

'कम प्रकार का' तथा 'अधिक प्रकार का तोरण खींचिए और माध्यक भी ज्ञात कीजिए।

15

अध्याय

प्रायिकता



याद रखने योग्य बातें:

1. किसी घटना के होने की संभवाना की माप प्रायिकता होती है।

2. किसी घटना E की प्रायिकता $= \dfrac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणाम}}$

3. $\mathbf{0 \leq P(E) \leq 1}$

4. यदि $P(E) = 0$ हो तो वह असंभव घटना होती है।

5. यदि $P(E) = 1$ हो तो वह निश्चित घटना होती है।

6. घटना E की पूरक घटना $\bar{E}$ होती है।

7. $P(\bar{E}) = 1 - P(E) \Rightarrow P(E) + P(\bar{E}) = 1$

8. प्रायिकता कभी भी ऋणात्मक नहीं होती।

9. प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space) सभी संभव परिणामों से प्रतिदर्श समष्टि मिलता है।

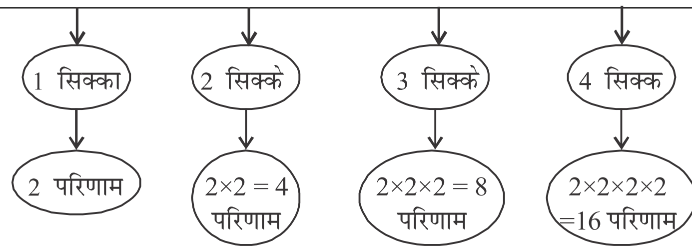
कुछ घटनाओं की परिणाम (प्रतिदर्श समष्टि)

1. जब एक सिक्के को उछाल जाए तो कुल परिणाम = H, T
2. जब दो सिक्के उछाले जाऐं तो कुल परिणाम = HH, TT, HT, TH

3. जब तीन सिक्के उछाले जाऐं तो कुल परिणाम = HHH, TTT, HTT, THT, TTH, THH, HTH, HHT

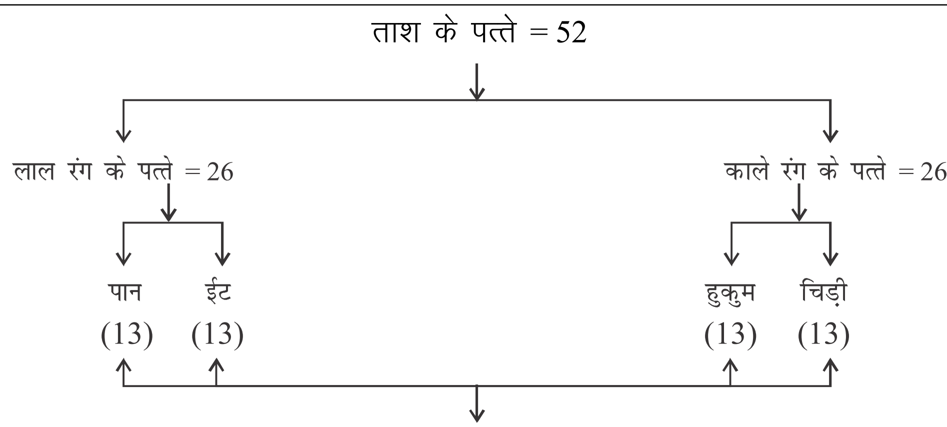
4. अब चार सिक्के उछालें जाऐं तो कुल परिणाम = HHHH, TTTT, HTTT, THTT, TTHT, TTTH, HHTT, TTHH, HTHT, THTH, HTTH, THHT, THHH, HTHH, HHTH, HHHT

H → चित्त, T →पट



1. जब एक पासा फेंका जाए तो कुल परिणाम S = 1, 2, 3, 4, 5, 6, n(S) = 6
2. जब दो पासे फेंके जाए तो कुल परिणाम n(S) = 6 × 6 = 36.

   S = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2,5) (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4) (6, 5), (6, 6)
3. जब तीन पासे फेंके जाऐं तो n(S) = 6 × 6 × 6 = 216 परिणाम



प्रत्येक में 1 इक्का, 1 बादशाह, 1 बेगम और 1 गुलाम, 9 नंबर कार्ड 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 जिसमें 12 तस्वीर वाले कार्ड होते हैं तस्वीर कार्ड में 4 बादशाह, 4 बेगम 4 गुलाम बाकी 40 पत्ते बिना तस्वीर वाले होते हैं।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. रिक्त स्थान भरिए:

(a) किसी कार्य को करने की प्रयिकता .... से बड़ी या बराबर और .... से छोटी या बराबर होती है। (NCERT)

(b) किसी अंसभव कार्य की प्रयिकता .... होती है।

(c) किसी शत् प्रतिशत संभव कार्य की प्रयिकता .... होती है और इसे .... कहते हैं। (NCERT)

(d) सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रयिकतओं का योग .... होता है। (NCERT)

(e) किसी घटना E का प्रयिकता + किसी घटना के न होने की प्रयिकता $(\bar{E})$ = ... होती है। (NCERT)

(f) यदि किसी खेल को जीतने की प्रायिकता $\frac{4}{9}$ है तो इसको हारने की प्रायिकता .... होगी।

(g) यदि एक सिक्के को दो बारा उछाला जाए तो सभी संभव परिणामों की संख्या .... होगी।

(h) यदि किसी पासे को दो बार उछाला जाए तो सभी संभव परिणामों की संख्या .... होगी।

2. सत्य/असत्य बताइए:

(a) किसी घटना की प्रायिकता ऋणात्मक हो सकती है।

(b) किसी घटना की प्रयिकता 1 से ज्यादा हो सकती है।

3. बहु विकल्पीय प्रश्न:

(i) निम्न में से कौन सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती है? (NCERT)

(a) 0.7 (b) $\frac{2}{3}$ (c) -1.5 (d) 15%

(ii) निम्न में से कौन सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता हो सकती है। (NCERT Exemplar)

(a) -0.04 (b) 1.004 (c) $\frac{18}{23}$ (d) $\frac{8}{7}$

(iii) कोई घटना होने की संभावना न के बराबर हो तो उसकी प्रायिकता किसके पास होगी? (NCERT Exemplar)

(a) 0.0001 (b) 0.001 (c) 0.01 (d) 0.1

(iv) एक अंकीय अभाज्य संख्याओं में से एक संख्या यादृच्छया चुनी गई। यह संख्या सम होने की प्रायिकता क्या होगी?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{2}{5}$

(v) जब एक पासे को फेंका जाए तो विषम संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी?

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

(vi) रशिम के पास एक पासा है जिसके 6 सतह पर निम्न अक्षर दिए हैं:

A B C D A C

यदि वह पासा एक बार फेंके तो C आने की प्रायिकता क्या होगी।

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{6}$

(vii) ताश के 52 पत्तों में से एक पत्र यादृच्छया निकाला जाता है। यदि E घटना है तस्वीर वाला पत्ता नहीं है तो E के कुल परिणामों की संख्या क्या होगी?

(a) 51 (b) 40 (c) 36 (d) 12

4. दिए गए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनेः

(i) यदि किसी प्रारंभिक घटना के होने की प्रायिकता p हो, तो इसके न होने की प्रायिकता क्या होगी?

(a) $p-1$ (b) p (c) $1-p$ (d) $1-\frac{1}{p}$

(ii) एक परिवार में 3 बच्चे हैं। इनमें कम से कम एक लड़का होगा प्रायिकता क्या होगी? (CBSE 2014)

(a) $\frac{7}{8}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{5}{8}$ (d) $\frac{3}{4}$

(iii) संख्याओं 1, 2, 3, ... 15 में से यादृच्छया एक संख्या चुनी गई। क्या प्रायिकता है कि वह 4 की गुणज हैं?

(a) $\frac{4}{15}$ (b) $\frac{2}{15}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{3}$

(iv) जो वर्ष लीप वर्ष न हो उसमें 53 सोमवार होने की प्रायिकता क्या होगी।

(a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{3}{7}$ (d) $\frac{5}{7}$

(v) एक बैंग में 6 लाल और 5 नीली गेंदे हैं। एक गेंद यादृच्छया से निकाली गई। नीली गेंद आने की प्रायिकता क्या होगी?

(a) $\frac{2}{11}$ (b) $\frac{5}{6}$ (c) $\frac{5}{11}$ (d) $\frac{6}{11}$

(vi) MATHEMATICS के अक्षरों में से एक अक्षर चुना गया। उस अक्षर के स्वर होने ही प्रायिकता क्या होगी?

(a) $\frac{6}{11}$ (b) $\frac{5}{11}$ (c) $\frac{3}{11}$ (d) $\frac{4}{11}$

5. ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह न तो इक्का होगा और न बादशाह।

6. एक बक्से में 250 बल्ब है जिनमें से 35 बल्ब खराब हैं। बक्से में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह बल्ब खराब नहीं है।

7. किसी घटना के विपरित 3:4. है। इस घटना के घटने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

8. यदि (1, 4, 9, 16, 25, 29) में से 29 को हटा दिया जाए तो एक अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता बताइए।

9. ताश की एक गड्डी में से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। इसके तस्वीर वाला कार्ड होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

10. 1000 लॉटरी के टिकटो में 5 टिकटों पर इनाम है। यदि एक व्यक्ति एक टिकट खरीदे तो उसके ईनाम जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

11. ताश की गड्डी में से 1 पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। इसके काला पत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

12. एक पासा एक बार उछाला जाता है। पूर्ण वर्ग संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

13. दो पासों को एक साथ उछाला जाता है दोनों पासों पर अंकों योग 10 या 10 से अधिक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

14. 1, 2, 3, ...,33, 34, 35 में 7 का गुणज आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

15. ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह न तो लाल रंग का है और न ही बेगम है। (CBSE 2016)

16. दो विभिन्न पासों को एक साथ फेंका जाता हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(a) दोनों पर समान संख्या आए।

(b) दोनों पर आई संख्याओं का योग 10 हो। (CBSE 2018)

17. एक बक्से में 12 गेंदे हैं जिनमें कुछ लाल रंग की हैं। यदि 6 लाल रंग की गेंदे इस बक्से में और डाली जाए तो अब लाल रंग की गेंद आने की प्रायिकता पहली प्रायिकता की दुगुनी हो जाती है। बक्से में लाल रंग की कितनी गेंदे हैं? (CBSE 2018)

18. 1 से 100 में से यादृच्छया एक पूर्णांक चुना गया। क्या प्रायिकता होगी कि (1) वह 8 से विभजित होता है। (2) 8 से विभजित नहीं होता है। (CBSE 2018)

19. तीन विभिन्न सिक्कों को एक साथ उछाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए (i) सिर्फ और सिर्फ दो चित्त आए (ii) कम से कम 2 चित्त आए।

20. एक बक्से में कुछ कार्ड जिन पर क्रमशः संख्याएं 3, 4, 5, ... 50 अंकित हैं। बाक्स में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस पर ऐसी संख्या है जो एक पूर्ण वर्ग है। (CBSE 2016)

लघु उत्तरीय प्रश्न - II

21. संख्या 1, 2, 3 और 4 में से यादृच्छया एक संख्या x चुनी गई। फिर संख्या 1, 4, 9 और 16 में से यादृच्छया एक संख्या y चुनी गई। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि x तथा y का गुणनफल 16 से कम हो। (CBSE 2016)

22. दो विभिन्न पासों को एक बार फेंका गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(a) दोनों पासों पर अभाज्य संख्या है।

(b) दोनों पर आई संख्याओं का योग 9 या 11 हो।

23. एक बैंग में 15 सफेद और कुछ काली गेंदे हैं। यदि काली गेंद निकालने की प्रायिकता, सफेंद गेंद की प्रायिकता से तीन गुना हो तो बैंग में कितनी काली गेंदे होंगी?

(CBSE 2017)

24. (a) दो पासों को एक साथ फेंका जाता है। इन दो पासों पर आई संख्याओं का गुणनफल 12 हो, इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(b) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि संख्याओं का योग ज्यादा से ज्यादा 5 हो।

25. एक बैग में कुछ कार्ड है जिनपर 1 से 100 तक की संख्याएँ लिखी हैं। इस बैग में से यादृच्छया एक कार्ड निकाला गया। क्या प्रायिकता है कि चुने गए कार्ड पर आई सख्ंयाः

(i) 9 से विभजित होती है और एक पूर्ण वर्ग है।

(ii) 80 से बड़ी अभाज्य संख्या है।

26. एक लाटरी में 10 इनाम और 25 खाली हैं। इनाम जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए इस घटना के लिए $P(E) + P(\bar{E}) - 1$ की जाँच कीजिए।

27. किसी खेल की जीतने की प्रायिकता $\frac{x}{12}$ है। यदि इसे हारने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

28. एक बक्से में कुछ कार्ड जिन पर क्रमशः संख्याएं 3, 4, 5, ..., 50 अंकित है। बाक्स में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस पर ऐसी संख्या है जो

(i) 7 से विभाजित होती है (ii) दो अंकों वाली संख्या है

29. एक थैले में 5 सफेद गेंदे, 7 लाल गेंदे, 4 काली गेंदे तथा 2 नीली गेंदे हैं। थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकालने पर प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद

(i) सफेद या नीली है। (ii) लाल या काली है।

(iii) सफेद नहीं है। (iv) न सफेद तथा न काली है।

30. 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी में से ईंट के बादशाह, बेगम तथा गुलाम निकाल दिये जाते हैं। शेष पत्तों में से एक पत्ता निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकला पत्ता

(i) ईंट का होगा। (ii) गुलाम होगा।

31. 400 अंडों में से एक खराब अंडा निकालने की प्रायिकता 0.035 है। खराब अंड़ों की संख्या ज्ञात कीजिए। एक ठीक अंडा निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

32. किसी मेले में एक खेल की स्टॉल पर एक डिब्बे में कुछ परचियाँ रखी है जिन पर 3,3,5,7,7,7,9,9,9,11 लिखा है। एक व्यक्ति तब जीतता है यदि पर्ची पर संख्याओं का माध्य लिखा हो। उसके न जीतने की प्रायिकता क्या होगी?

33. एक बाक्स में 90 डिस्क हैं जिन पर 1 से 90 संख्या अंकित है इस बाक्स में से एक डिक्स यादृच्छया निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस पर जो संख्या अंकित होगी वह

(i) दो अंको की संख्या होगी। (ii) एक पूर्ण वर्ग संख्या होगी।

(iii) 5 से विभाजित होगी।

34. ताश की अच्छी तरह से फेंटी गई गड्डी में से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह पत्ता।

(i) हुकुम का है या इक्का है। (ii) एक लाल बादशाह है।

(iii) न बादशाह तथा न बेगम। (iv) या तो एक बादशाह या एक बेगम

35. ताश की अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है उसके

(i) चित्र पत्ता। (ii) लालरंग का चित्रपत्ता।

(iii) काले रंग का चित्रपत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

36. रमेश को 24000 रूपये त्यौहार के बोनस के रूप में मिले। उसने 5000 रूपये मंदिर को, 12000 रूपये अपनी पत्नी को, 2000 रूपये अपने नौकर को और शेष राशि अपनी बेटी को दे दी।

(i) पत्नी को प्राप्त राशि की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(ii) नौकर को प्राप्त राशि की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(iii) बेटी को प्राप्त राशि की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

37. एक हास्टल में 240 विद्यार्थी रहते हैं। जिसमें 50% प्रातःकाल योग क्लास जाते हैं, 25% जिम क्लब तथा 15% मार्निंग वाक को जाते हैं। शेष विद्याथी लाफिंग क्लब से जुड़े हैं। लाफिंग क्लब से जुड़े विद्यार्थियों की प्रायिकता बताइए।

38. एक बक्से में कुछ कार्ड हैं जिन पर संख्याएँ 11 से 123 लिखें हैं। इस बक्से में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया। क्या प्रायिकता है कि जो कार्ड निकाला गया उस पर

(i) वर्ग संख्या है।

(ii) 7 का गुणज है।

39. एक पासे को दो बारा उछाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) 5 कम से कम पासे पर एक बार आए।

(ii) 5 एक बार भी नहीं आए।

40. एक बक्से में कुछ कार्ड हैं जिन पर क्रमशः संख्याएँ 1, 3, 5 ...... 49 अंकित है। बाक्स में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस पर ऐसी संख्या है जो

(i) उसे विभाजित होगी।

(ii) एक भाज्य संख्या हैं।

(iii) पूर्ण वर्ग नहीं है।

(iv) 3 और 5 के गुणज है। (CBSE 2017)

41. 52 पत्तों की ताश की एक गड्डी में से लाल रंग की बेगमें और काले रंग के गुलाम हटा दिए गए। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह पत्ता

(i) चिड़ी का हो या इक्का हो

(ii) काले रंग का बादशाह हो।

(iii) न तो गुलाम हो न ही बादशाह हो।

(iv) बादशाह या बेगम हो।

42. एक बच्चे में 100 लाल रंग के, 200 पीले रंग में और 50 नींले रंग के कार्ड हैं। इस बक्से में से यादृच्छया एक कार्ड निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह कार्ड

(i) नीले रंग का है।

(ii) पीला नहीं है।

(iii) न तो पीला है न ही नीला है।

उत्तर और संकेत

1. (a) $\underline{0} \times \underline{1}$ (b) $\underline{0}$ (c) $\underline{1}$, निश्चित घटना

(d) $\underline{1}$ (e) $\underline{1}$ (f) $\frac{5}{9}$

(g) $\underline{4}$ (h) 36

2. (a) असत्य, $(0 \leq p(A) \leq 1)$ (b) असत्य, $(0 \leq p(A) \leq 1)$

3. (i) (c) (ii) (c) (iii) (a) (होने की संभावना बहुत कम हैं)
(iv) B (अभाज्य संख्या 2, 3, 5, 7) (v) (a)
(vi) (a) (प्रायिकता $\frac{2}{6}$) 7.(b) (तस्वीर कार्ड 12, शेष कार्ड 40)

4. (i) (a) C (p + $\overline{p}$ = 1)
(ii) (a) A (संभावित परिणाम) = (GGG, BGG, GBG, GGB, BBG, GBB, BGB, BBB)
(iii) (c) (प्रायिकता $\frac{3}{15}$)
(iv) (a) (कुल सप्ताह हैं 52, शेष दिन = 1
संभावित परिणाम = रविवार, सोमवार, मंगलवार, बुधवार, वीरवार, शुक्रवार, शनिवार)
(v) (c)
(vi) (d) स्वर (A, A, E, I)

5. कुल पत्ते = 52
इक्कों की संख्या = 4
बादशाहों की संख्या = 4
P (न ही इक्का न ही बादशाह) = $\frac{44}{52} = \frac{11}{13}$

6. P (बल्ब खराब नहीं है) = $1 - \frac{35}{250} = \frac{43}{50}$

7. कुल परिणाम = 7
P (घटना घटने की) = $\frac{4}{7}$

8. P (अभाज्य संख्या) = 0

9. तस्वीर वाले पत्तों की संख्या = 12
P (तस्वीर वाले पत्ते) = $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

10. P (ईनाम जीतने की) = $\frac{5}{1000} = 0.005$

11. कुल काले पत्ते = 26
P (काले पत्ते की) = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

12. कुल परिणाम = 1, 2, 3, 4, 5, 6

पूर्ण वर्ग = 1, 4

P (पूर्ण वर्ग) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

13. कुल परिणाम = 36

संभावित परिणाम = (4,6) (5,5) (6,4) (5,6) (6,5), (6, 6)

P (संख्याओं का योग ≥ 10) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

14. 7 के गुणज 7, 14, 21, 28, 35

P (7 के गुणज) = $\frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

15. लाल पत्तों की संख्याऐं = 26 (2 लाल बेगम आ चुकी हैं)

बेगम की संख्या = 4 − 2 = 2

जो पत्ते न तो लाल है न बेगम = 56 – (26 + 2) = 24

प्रायिकता = $\frac{24}{52} = \frac{6}{13}$

16. समान संख्या वाले परिणाम

(i) (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)

प्रायिकता = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(ii) योग 10 वाले परिणाम (4,6), (5,5), (6,4)

प्रायिकता = $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

17. $\frac{x+6}{18} = 2\left(\frac{x}{12}\right)$

$x = 3$

18. कुल परिणाम = 98 (1 और 100 के बीच में)

(i) 8 से विभाजित संख्याएं = 8, 16, 24 ....., 96

अनुकूल परिणाम = 12

प्रायिकता = $\frac{12}{98} = \frac{6}{49}$

(ii) P (8 से विभाजित न होने की) = $1 - \frac{6}{49} = \frac{43}{49}$

19. कुल परिणाम HHH, TTT, HTT, THT, TTH, THH, HTH, HHT

(i) P (2 चित्त) = 3/8

(ii) P (2 या 2 से ज्यादा चित्त) = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

20. कुल कार्ड = 50–3+1=48

पूर्ण वर्ग = 4,9,16,25,36,49

प्रायिाकता = $\frac{6}{48} = \frac{1}{8}$

21. कुल परिणाम (1,1), (1,4), (1,9), (1,16)
(2,1), (2,4), (2,9), (2,16)
(3,1), (3,4), (3,9), (3,16)
(4,1), (4,4), (4,9), (4,16)

अनुकूल परिणाम $xy < 16$

(1,1), (1,4), (1,9), (2,1), (2,4), (3,1), (3,4), (4,1)

प्रायिकता = $\frac{8}{6} = \frac{1}{2}$

22. कुल परिणाम = 36

(a) अनुकूल परिणाम (2,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,3), (3,5) (5,2), (5,3), (5,5)

प्रायिकता = $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

(b) अनुकल परिणाम (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (5,6), (6,5)

प्रायिकता = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

23. $\frac{x}{15+x} = \frac{3\times 15}{15+x}$

$x = 45$

24. कुल परिणाम = 36

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

अनुकूल परिणाम (2,6), (3,4), (4,3), (6,2)

प्रायिकता $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

25. (i) कुल संख्याएं $= 100$

9 से विभाजित होने वाली संख्याएं तथा पूर्ण वर्ग $= 9, 36, 81$

प्रायिकता $= \frac{3}{100} = 0.03$

(ii) 80 से बड़ी अभाज्य संख्याएं 83, 89, 97

प्रायिकता $= \frac{3}{100} = 0.03$

26. कुल टिकट $= 35$

P (जीतने की) $= \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$

P (न जीतने की) $= \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$

27. P (जीतने की) + P (हारने की) = 1

$$\frac{x}{12} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow x = 8$$

28. कुल कार्ड $= 50 – 3 + 1 = 48$

(i) 7 से विभाजित होने वाली संख्याएं 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49

प्रायिकता $\frac{7}{48}$

(ii) दो अंकों वाली संख्याएँ 10, 11, 12, ..., 50

अनुकूल परिणामों की संख्या $= 50 - 10 + 1 = 41$

प्रायिकता $= \frac{41}{48}$.

29. (i) $\frac{5+2}{18} = \frac{7}{18}$ (ii) $\frac{7+4}{18} = \frac{11}{18}$ (iii) $\frac{7+4+2}{18} = \frac{13}{18}$

(iv) $\frac{7+2}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$

30. (i) कुल परिणाम $= 52 – 3 = 49$

शेष ईट के पत्ते $= 13 – 3 = 10$

प्रायिकता $= \frac{10}{49}$

(ii) P (गुलाम का पत्ता) $= \frac{3}{49}$ (1 गुलाम हटाने पर)

31. (कुल अंडे) = 400

P (खराब अंडे) = 0.035

माना खराब अंडों की संख्या $= x$

$$\frac{x}{400} = 0.035$$

$$x = 400 \times 0.035$$

$$x = 14$$

$$P\ (\text{ठीक अंडे}) = 1 - 0.035 = 0.965$$

32. माध्य $= \frac{3+3+5+7+7+7+9+9+9+11}{10} = \frac{70}{10} = 7$

$$P\ (\text{हारने की}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

33. कुल संख्या = 90

(1) दो अंको वाली संख्या 10, 11, 12 ...., 90।

अनुकूल परिणामों की संख्या = 90 – 10 + 1 = 81

प्रायकिता $= \frac{81}{90} = \frac{9}{10}$

(2) पूर्ण वर्ग संख्या 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

प्रायिकता $= \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$

(3) 5 से विभाजित होने वाली संख्या 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90

प्रायिकता $= \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$

34. (i) P(हुकुम या इक्का) $= \frac{13+3}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

(ii) P (लाल बादशाह) $= \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

(iii) P (न ही बादशाह न ही बेगम) $= 1 - \frac{8}{52} = 1 - \frac{2}{13} = \frac{11}{13}$

(iv) P (बादशाह या बेगम) $= \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$

35. (i) $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

(ii) $\frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

(iii) $\frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

36. (i) P (पत्नी को प्राप्त राशि) $= \frac{12000}{24000} = \frac{1}{2}$

(ii) P (नौकर को प्राप्त राशि) $= \frac{2000}{24000} = \frac{1}{12}$

(iii) P (बेटी को प्राप्त राशि) $= \frac{5000}{24000} = \frac{5}{42}$

37. 10% विद्यार्थी लाफिंग क्लब से जुड़े

प्रायिकता $= \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

38. कुल कार्ड = 123–11+1 = 113

(i) वर्ग संख्या 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121

प्रायिकता $= \frac{8}{113}$

(ii) 7 के गुणज = 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70 77, 84, 91, 98, 105, 112, 119

प्रायिकता $= \frac{16}{113}$

39. कुल परिणाम = 36

(i) P (5 कम से कम एक बार आए) $= \frac{11}{36}$

(अनुकूल परिणाम (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4),(5,6))

(ii) P (5 एक बार भी न आए) $= 1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}$

40. कुल परिणाम = 25 (1, 3, 4, ..., 49)

(i) 3 से विभाजित संख्याएँ 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45

प्रायिकता = $\frac{8}{25}$

(ii) भाज्य संख्याएँ

9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39, 45, 49

प्रायिकता = $\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$

(iii) P(पूर्ण वर्ग न होने की)

= 1 − P (पूर्ण वर्ग संख्या) [पूर्ण वर्ग संख्या 1, 9, 25, 49]

$= 1-\frac{4}{25}=\frac{21}{25}$

(iv) 3 और 5 के गुणज

15 के गुणज = 15, 45

प्रायिकता = $\frac{2}{25}$

41. (i) $\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$

(ii) $\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$

(iii) $1-\frac{8}{52}=1-\frac{2}{13}=\frac{11}{13}$

(iv) $\frac{8}{52}=\frac{2}{13}$

42. (a) P(नीला कार्ड) $=\frac{50}{350}=\frac{1}{7}$

(b) P(पीना कार्ड नहीं) $=\frac{150}{350}=\frac{3}{7}$

(c) P(न ही पीला और न ही नीला) $=\frac{100}{350}=\frac{2}{7}$

अभ्यास प्रश्न पत्र

प्रायिकता

समय : 1 घंटा *अंक : 20*

खण्ड–अ

1. एक पासा एक बार फेंका जाता है तो विषम संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 1

2. एक थैले में 4 लाल तथा 6 काली गेंदे हैं। थैले में से 1 गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। काली गेंद आने की प्रायिकता बताइए। 1

3. PROBABILITY में से एक अक्षर चुना गया। वह अक्षर स्वर होगा इसकी प्रायिकता है। 1

4. 900 सेब में से खराब सेब आने की प्रायिकता 0.18 है। खराब सेबों की संख्या है। 1 (CBSE 2017)

खण्ड–ब

5. एक अधिवर्ष में 53 शुक्रवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

6. ताश को अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी में से 1 पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है उसके काले रंग का चित्र पत्ता या लाल रंग का चित्र पत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

7. एक सिक्के को दो बार उछाला। कम से कम एक पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

खण्ड–स

8. एक बक्से में 5 लाल, 4 हरे तथा 7 सफेद कंचे है। बक्से में से 1 कंचा यादृच्छया निकालने पर उसके 3

(i) सफेद ना होने की।

(ii) न लाल और न ही सफेद होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

9. एक पासा एक बार फेंका जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि प्राप्त होने वाली संख्या

(i) एक सम अभाज्य संख्या है।

(ii) एक पूर्ण वर्ग संख्या है। 3

खण्ड–द

10. एक थैले में कार्ड है, जिस पर 1, 3, 5, ..., 35 संख्याएँ अंकित है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक निकाले गये कार्ड पर 4

(*i*) 15 से कम वाली अभाज्य संख्या अंकित है।

(*ii*) 3 तथा 15 दोनों से विभाजित होने वाली संख्या अंकित है।

अथवा

52 ताश के पत्तों की गड्डी से चिड़ी का बादशाह, बेगम तथा गुलाम हटाए गए तथा शेष पत्तों में से एक पत्ता खींचा गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि खींचा गया पत्ता 4

(*i*) पान का पत्ता होगा। (*ii*) बेगम होगा।

(*iii*) चिड़ी का पत्ता होगा।

अभ्यास प्रश्न पत्र–I (हल सहित)

कक्षा-दसवीं

गणित (बेसिक)

समय : 3 घंटे *अधिकतम अंक* : 80

सामान्य निर्देश :

(i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) इस प्रश्नपत्र में कुल 40 प्रश्न हैं जिन्हें चार खंडों अ, ब, स तथा द में विभाजित किया गया है।

(iii) खंड 'अ' में कुल 20 प्रश्न हैं, प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। खंड 'ब' में 6 प्रश्न हैं, जो सभी 2 अंक के हैं। खंड 'स' में कुल 8 प्रश्न हैं, जो सभी 3 अंक के हैं तथा खण्ड 'द' में कुल 6 प्रश्न हैं, जो सभी 4 अंक के हैं।

(iv) इस प्रश्नपत्र में कोई समग्र विकल्प नहीं है।

(v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

खण्ड 'अ'

1. यदि p और q दो सह–अभाज्य संख्याएँ हैं, तो p^2 और q^2 .... है।

2. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, BC = 3 सेमी, EF = 4 सेमी और $ar(\Delta ABC) = 54$ वर्ग सेमी है, तो $ar(\Delta DEF) =$ .... है।

3. यदि $5 \tan\theta - 4 = 0$ है, तो $\dfrac{5\sin\theta - 4\cos\theta}{5\sin\theta + 4\cos\theta}$ का मान है–

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{5}{6}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{6}$

4. एक पासे को एक बार फेंका जाता है। एक अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता है–

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{6}$

5. यदि समीकरण $x^2 + 4x + k = 0$ के मूल वास्तविक और असमान है, तो

(a) $k < 4$ (b) $k > 4$ (c) $k \geq 4$ (d) $k \leq 4$

6. यदि एक वृत्त की परिधि और उसका क्षेत्रफल बराबर हो, तो वृत्त का व्यास है–

(a) $\frac{\pi}{2}$ मात्रक (b) 2π मात्रक (c) 2 मात्रक (d) 4 मात्रक

7. समांतर श्रेणी : $\sqrt{7}, \sqrt{28}, \sqrt{63}, ...$ का अगला पद है–

(a) $\sqrt{70}$ (b) $\sqrt{84}$ (c) $\sqrt{97}$ (d) $\sqrt{112}$

8. बिंदुओं $(a\cos\theta + b\sin\theta, 0)$ और $(0, a\sin\theta - b\cos\theta)$ के बीच की दूरी है–

(a) $a^2 + b^2$ (b) $a + b$ (c) $a^2 - b^2$ (d) $\sqrt{a^2 + b^2}$

9. यदि एक द्विघातीय बहुपद f(x), एक रैखिक बहुपद का वर्ग हो, तो उनके शून्यक बराबर होते हैं। (सत्य / असत्य)

10. वृत्त पर स्थित किसी एक बिंदु से अनगिनत स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती है। (सत्य / असत्य)

11. p के किस मान के लिए, बहुपद $x^2 - 2x - (7p + 3)$ का एक शून्यक (– 4) है?

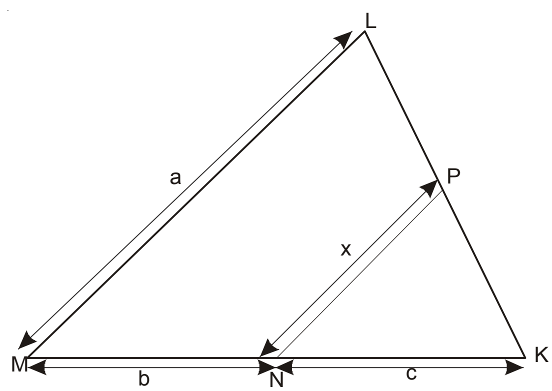
12. निम्नलिखित रैखिक समीकरणों के युग्म के हलों की संख्या है–

$$x + 2y - 8 = 0$$
$$2x + 4y = 16$$

13. शीर्ष बिंदु (0, 4), (0, 2) और (3, 0) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

14. यदि समांतर चतुर्भुज ABCD के तीन शीर्ष A(1, 2), B(4, 3) और C(0, 0) है, तो D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

15. आकृति में PN||LM है। x को a, b तथा c व्यक्त कीजिए, जहाँ a, b तथा c क्रमशः LM, MN और NK की लम्बाई है।



चित्र

16. आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय का कथन (परिभाषा) लिखिए।

17. एक गैर लीप वर्ष में 53 सोमवार आने की प्रायिकता क्या होगी?

18. यदि एक ठोस अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 462 वर्ग सेमी. हो, तो इसका व्यास ज्ञात कीजिए।

19. एक खंभा जमीन पर $2\sqrt{3}$ मी. लम्बी छाया डालता है, यदि उस समय सूर्य का उन्नयन कोण 60° हो, तो खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

20. यदि किसी घटना E के लिए $P(E) = \frac{3}{7}$ हो, तो P(E नहीं) का मान क्या होगा?

खण्ड 'ब'

21. यदि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है, तो सिद्ध कीजिए कि $(5+3\sqrt{2})$ एक अपरिमेय संख्या है।

22. 'k' के किस मान के लिए समीकरण $kx + 3y = 1, 12x + ky = 2$ का कोई हल नहीं है?

23. एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लम्बाई 14 सेमी. है। सुई द्वारा 5 मिनट में बनाया गया क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

24. दो घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन 27 घन मी. है, के संलग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस घनाभ बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

25. किसी परीक्षा में 140 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों को निम्न बंटन सारणी में दर्शाया गया है–

अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
विद्यार्थियों की संख्या	20	45	80	55	40

बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

26. 1 से 100 के बीच में से एक पूर्णांक चुना जाता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह

(i) 8 से विभाज्य है।

(ii) 8 से विभाज्य नहीं है।

खण्ड 'स'

27. अभाज्य गुणनखंड विधि से 180, 252 और 324 का म.स. ज्ञात कीजिए।

28. यदि बहुपद $2x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 3x - 1$ के दो शून्यक $(2+\sqrt{3})$ और $(2-\sqrt{3})$ हों, तो बहुपद के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए।

29. x के लिए हल कीजिए $\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{3}; x \neq 1, 2, 3$

30. समांतर श्रेणी का नौवां पद, दूसरे पद के सात गुना के बराबर है और बारहवां पद, तीसरे पद के पांच गुना से 2 अधिक है। पहला पद और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

31. सिद्ध कीजिए कि एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

32. केंद्र O वाले वृत्त पर बाह्य बिंदु T से दो स्पर्श रेखाएँ TP और TQ खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ है।

33. सिद्ध कीजिए कि $(\cot\theta - \text{cosec}\,\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ है।

34. ΔABC में, $\angle B = 90°$, $BC = 5$ सेमी. और $AC - AB = 1$ सेमी. है। $\sin C$ और $\cos C$ के मान ज्ञात कीजि ।

खण्ड 'द'

35. निम्न समीकरणों का ग्राफ खींचिए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

$$x + y = 5; \quad x - y = 5$$

(i) ग्राफ से समीकरणों का हल ज्ञात कीजिए।

(ii) इन रेखाओं और y-अक्ष से बने त्रिभुजाकार भाग को छायांकित कीजिए।

36. यदि A और B क्रमशः $(-2, -2)$ और $(2, -4)$ हो, तो बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ताकि $AP = \frac{3}{7}AB$ हो और P रेखाखंड AB पर स्थित हो।

37. एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें $BC = 7$ सेमी, $\angle B = 60°$ और $AB = 6$ सेमी हो तथा एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं की $\frac{3}{4}$ गुनी हों।

38. समुद्र तल से 100 मी. ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो, तो दोनों जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

($\sqrt{3} = 1.732$ का प्रयोग कीजिए)

39. एक खोखला गोला, जिसका आंतरिक और बाहरी व्यास क्रमशः 4 सेमी और 8 सेमी है, को पिघलकर 8 सेमी व्यास वाले एक शंकु में बदला जाता है। शंकु की ऊँचाई और तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

40. निम्न बंटन का माध्य और माध्यक ज्ञात कीजिए–

वर्ग	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
बारंबारता	3	6	9	13	18	5	4

उत्तर और संकेत

1. अभाज्य **2.** 96 वर्ग सेमी **3.** (c) 0

4. (c) $\frac{1}{2}$ **5.** (a) $k < 4$ **6.** (d) 4 मात्रक

7. (d) $\sqrt{112}$ **8.** (d) $\sqrt{a^2 + b^2}$ **9.** सत्य

10. असत्य **11.** $(-4)^2 - 2(-4) - (7p + 3) = 3 \Rightarrow p = 3$

12. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, अतः दिए गए रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

13. $\Delta = \frac{1}{2}$ $[0\,(2-0) + 0\,(0-4) + 3(4-0)] = 6$ वर्ग मात्रक

14. माना D के निर्देशांक (x, y) हैं।

AC के मध्य बिंदु के निर्देशांक = BD के मध्य बिंदु के निर्देशांक

$$\left(\frac{1+0}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right)$$

$\therefore$ $x = -3$ और $y = -1$

अतः D के निर्देशांक (– 3, – 1) है।

15. $\Delta KLM \sim \Delta KPN$ (AA समरूपता कसौटी)

$$\frac{LM}{PN} = \frac{KM}{KN}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{x} = \frac{b+c}{c}$$

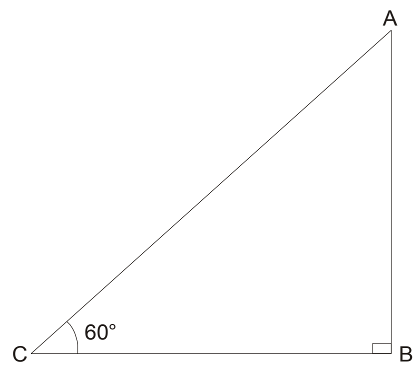
$$x = \frac{ac}{b+c}$$

16. सही कथन। **17.** P (53 सोमवार) = $\frac{1}{7}$

18. $3\pi r^2 = 462 \quad \Rightarrow \quad r = 7$ सेमी

व्यास = 14 सेमी.

19. AB एक खंभा है और इसकी छाया BC है।



ΔABC में, $\dfrac{AB}{BC} = \tan 60°$

$AB = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$ मी

20. P(E नहीं) $= 1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$

21. माना $5 + 3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है जिसे हम लिख सकते हैं

$5 + 3\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$; $b \neq 0$, a और b सह–अभाज्य संख्या है।

$$\sqrt{2} = \frac{a - 5b}{3b}$$

RHS परिमेय संख्या है। अतः LHS को भी परिमेय संख्या है, जोकि इस तर्क को विरोधाभास करती है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इसलिए, हमारी अवधारणा गलत है। अतः $5 + 3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

22. कोई भी हल नहीं के लिए,

$$\frac{k}{12} = \frac{3}{k} \neq \frac{1}{2}$$

$k = \pm 6$ या $k \neq 6$

$\therefore \qquad k = -6$

23. 5 मिनट में बना कोण $= 30°$

5 मिनट में बनाया गया क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \frac{30°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 51\frac{1}{3} \text{ वर्ग सेमी.}$$

24. घन की भुजा $= \sqrt[3]{27} = 3$ सेमी.

घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः $3 + 3 = 6$ सेमी., 3 सेमी., 3 सेमी. है।

घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(6 \times 3 + 3 \times 3 + 3 \times 6) = 90$ वर्ग सेमी.

25. बहुलक वर्ग $= 20 - 30$

$$\text{बहुलक} = 20 + \frac{40 - 24}{2 \times 40 - 24 - 36} \times 10 = 28$$

26. 1 से 100 के बीच 98 पूर्णांक हैं।

(i) $P(8 \text{ से विभाज्य}) = \frac{12}{98} = \frac{6}{49}$

(ii) $P(8 \text{ से विभाज्य नहीं}) = 1 - \frac{6}{49} = \frac{43}{49}$

27. $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$

$324 = 2^2 \times 3^4$

म.स. $(180, 252, 324) = 2^2 \times 3^2 = 36$

28. माना $p(x) = 2x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 3x - 1$ है।

$\left(2+\sqrt{3}\right)$ और $\left(2-\sqrt{3}\right)$, $p(x)$ के शून्यक हैं।

$x - \left(2+\sqrt{3}\right)$ और $x - \left(2-\sqrt{3}\right)$, $p(x)$ के गुणनखंड हैं।

$\therefore \quad \left[x - \left(2+\sqrt{3}\right)\right]\left[x - \left(2-\sqrt{3}\right)\right] = x^2 - 4x + 1$ भी $p(x)$ का गुणनखंड है।

$$p(x) = (x^2 - 4x + 1)(2x^2 - x - 1)$$

$$= \left[x - \left(2+\sqrt{3}\right)\right]\left[x - \left(2-\sqrt{3}\right)\right](2x + 1)(x - 1)$$

$\therefore \quad p(x)$ के शून्यक $1, \frac{-1}{2}, \left(2+\sqrt{3}\right)$ और $\left(2-\sqrt{3}\right)$ है।

29. $\frac{1}{x-2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}\right] = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{x-2}\times\frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 3$

$\Rightarrow \quad x^2 - 4x = 0$

$\Rightarrow \quad x(x-4) = 0$

$x = 0$ या $x = 4$

30. $a_9 = 7a_2 \quad \Rightarrow \quad a + 8d = 7(a + d)$

$\Rightarrow \quad d = 6a$ ...(1)

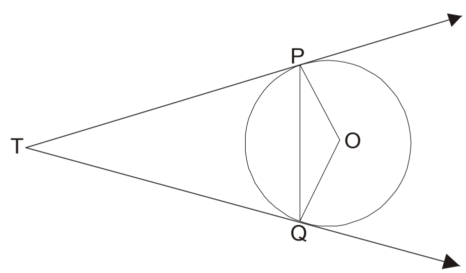
$a_{12} = 5a_3 + 2$

$\Rightarrow \quad 4a - d + 2 = 0$ ...(2)

(1) और (2) से, $a = 1$ और $d = 6$

31. सही उत्पत्ति।

32. OP, OQ और PQ मिलाइए।



माना $\angle PTQ = x$ है।

ΔPTQ में, $\angle TQP + \angle TPQ + \angle PTQ = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle TQP + \angle TPQ = 180° - x$ ...(1)

$TP = TQ$ ($\because$ बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखाएँ)

$\therefore \quad \angle TQP = \angle TPQ$ ..(2)

(1) और (2) से, $\angle TPQ = 90° - \frac{x}{2}$ ...(3)

$\angle OPT = 90°$

$\Rightarrow \quad \angle OPQ + \angle TPQ = 90°$

$$\angle OPQ = \frac{x}{2} \quad \text{(3 से)}$$

$$2\angle OPQ = \angle PTQ$$

33. LHS = $(\cot\theta - \text{cosec}\,\theta)^2 = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\right)^2$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \text{RHS}$$

34. दिया है, $AC - AB = 1$ ...(1)

ΔABC में, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$AC^2 - AB^2 = (5)^2$$

$$(AC - AB)(AC + AB) = 25$$

$$AC + AB = 25 \quad \text{...(2)}$$

1 और 2 से, AC = 13 सेमी. और AB = 12 सेमी.

$$\sin C = \frac{12}{13}$$

$$\cos C = \frac{5}{13}$$

35. सही ग्राफ बनाने पर इसका हल (5, 0) है। अभीष्ट भाग को छायांकित कीजिए।

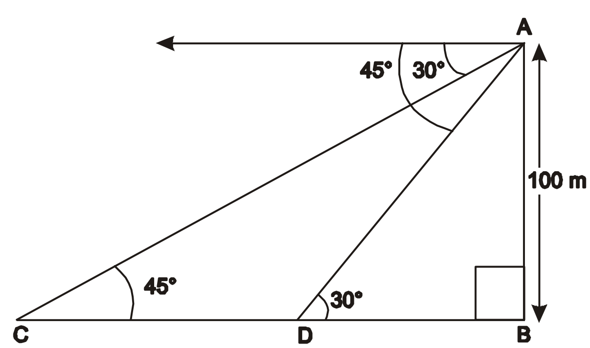
36. $D \leftrightarrow (4, 0)$

$$ar(\Delta ABD) = \frac{1}{2}\,[4(-2-0) + 3(0+6) + 4(-6+2)] = 3 \text{ वर्ग मात्रक}$$

$$ar(\Delta ACD) = \frac{1}{2}\,[4(2-0) + 5(0+6) + 4(-6-2)] = 3 \text{ वर्ग मात्रक}$$

$\therefore$ $ar(\Delta ABD) = ar(\Delta ACD)$

37. सही रचना



38. ΔABD में, $\frac{AB}{BD} = \tan 45^\circ$

$\Rightarrow$ BD = 100 मी.

ΔABC में, $\frac{AB}{BC} = \tan 30^\circ$

$\Rightarrow \quad \dfrac{100}{CD + 100} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \quad CD = 100\,(1.732 - 1) = 73.2$ मी.

39. माना शंकु की ऊँचाई h सेमी. है।

शंकु का आयतन = खोखले गोले का आयतन

$$\frac{1}{3}\pi(4)^2 h = \frac{4}{3}\pi(4^3 - 2^3)$$

$$h = 14 \text{ सेमी.}$$

$$l = \sqrt{(4)^2 + (14)^2} = 2\sqrt{53} \text{ सेमी.}$$

40.

वर्ग	f_i	x_i	$f_i x_i$	**c.f.**
11–13	3	12	36	3
13–15	6	14	84	9
15–17	9	16	144	18
17–19	13	18	234	31
19–21	18	20	360	49
21–23	5	22	110	54
23–25	4	24	96	58
योग	**58**		**1064**	

माध्य $= \dfrac{1064}{58} = 18$

माध्यक $= 17 + \dfrac{(29 - 18)}{13} \times 2 = 18.69$ लगभग

❑❑❑

अभ्यास प्रश्न पत्र–II

कक्षा-दसवीं

गणित (बेसिक)

समय : 3 घंटे | *अधिकतम अंक : 80*

सामान्य निर्देश :

(i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) इस प्रश्नपत्र में कुल 40 प्रश्न हैं जिन्हें चार खंडों अ, ब, स तथा द में विभाजित किया गया है।

(iii) खंड 'अ' में कुल 20 प्रश्न हैं, प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। खंड 'ब' में 6 प्रश्न हैं, जो सभी 2 अंक के हैं। खंड 'स' में कुल 8 प्रश्न हैं, जो सभी 3 अंक के हैं तथा खण्ड 'द' में कुल 6 प्रश्न हैं, जो सभी 4 अंक के हैं।

(iv) इस प्रश्नपत्र में कोई समग्र विकल्प नहीं है।

(v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

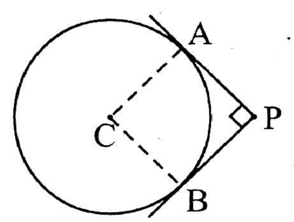
खण्ड 'अ'

प्रश्न संख्या 1 से 20 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. गणित की आधारभूत प्रमेय का प्रयोग करके 96 और 360 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

2. एक रेखाखंड की लंबाई 5 सेमी है। यदि इसके एक सिरे के निर्देशांक $(2, 2)$ और दूसरे सिरे के निर्देशांक $(-1, x)$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

3. आकृति में, केंद्र C और 4 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के किसी बाह्य बिंदु से PA और PB दो स्पर्श रेखाएँ खींची गई हैं। यदि $PA \perp PB$, तो प्रत्येक स्पर्श की लंबाई ज्ञात कीजिए।



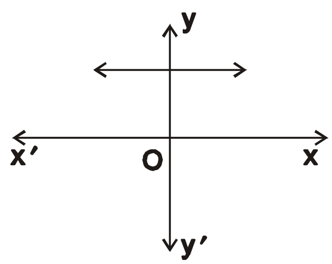
4. एक समांतर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पद $3y - 1$, $3y + 5$ और $5y + 1$ हैं। y का मान ज्ञात कीजिए।

5. एक पासे को एक बार उछाला गया। क्या प्रायिकता है कि यह 4 से बड़ी संख्या को दर्शाए?

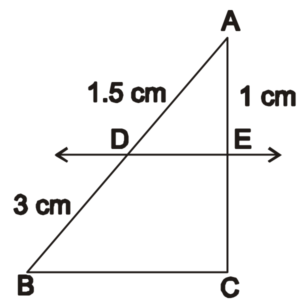
6. r त्रिज्या के एक ठोस गोले को पिघलाकर r ऊँचाई का एक ठोस शंकु बनाया गया है। शंकु के आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

7. आकृति में y = p(x) का ग्राफ दिया गया p(x) के शून्यक होंगे–

(a) एक (b) तीन (c) कोई नहीं (d) दो



8. आकृति में DE || BC हो तो EC का मान है–



(a) 1 cm (b) 2 cm (c) 1.5 cm (d) 3 cm

9. यदि किसी बिन्दु Q से वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 24 cm है तथा बिन्दु Q की वृत्त के केन्द्र से दूरी 25 cm है तो वृत्त की त्रिज्या होगी–

(a) 7 cm (b) 12 cm (c) 15 cm (d) 24.5 cm

10. 15 मीटर ऊँचे टॉवर के पाद से 15 मीटर दूरी पर टॉवर के शिखर से उन्नयन कोण होगा–

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

11. किसी वृत्त की परिधि तथा व्यास की लम्बाइयों का अन्तर 30 cm है। वृत्त की त्रिज्या होगी–

(a) 5 cm (b) 7.7 cm (c) 7 cm (d) 6 cm

12. किसी घटना की होने की प्रायिकता E + घटना के न होने की प्रायिकता 'E नहीं' = ...

13. घात दो के बहुपद को कहते हैं .... बहुपद।

14. रेखा $x - y = 8$, y-अक्ष को (0, – 8) पर काटती है। यह कथन सत्य है या असत्य।

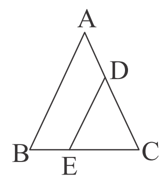
15. दिए गए रैखिक युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल है (सत्य या असत्य बताइए)

$x + 2y - 8 = 0$ $2x + 4y = 16$

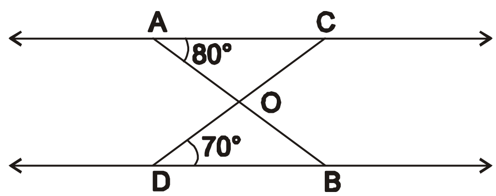
16. $3 \cot^2 60° + \sec^2 45° =$ ....

17. कार्ड जिन पर 3, 4, 5 .... 50 संख्याएँ लिखी हैं, को एक डिब्बे में डालकर अच्छी तरह मिलाया जाता है और एक कार्ड निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाले गए कार्ड पर पूर्ण वर्ग संख्या है।

18. आकृति में, ΔABC, $DE \| AB$. यदि $AD = 2x$, $DC = x + 3$, $BE = 2x - 1$ और $CE = x$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।



19. आकृति में $l \| m$, $\angle OAC = 80°$, $\angle ODB = 70°$ है। क्या $\Delta OCA \sim \Delta ODB$ है?

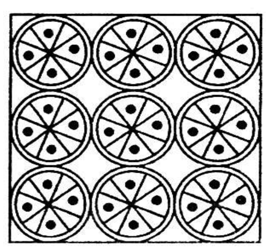


20. द्विघात समीकरण $Kx^2 - 14x + 8 = 0$ में K का मान ज्ञात कीजिए। यदि इसका एक मूल दूसरे का छः गुना हो।

खंड 'ब'

प्रश्न संख्या 21 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।

21. एक वर्गाकार रुमाल पर नौ वृत्ताकार डिजाइन, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 7 सेमी है, बनाए गए हैं। रुमाल के बाकी हिस्से का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



22. $\sqrt{2}$ और $\sqrt{3}$ के बीच परिमेय संख्या लिखिए।

23. K के किस मान के लिए नीचे दिए गए समीकरण का कोई हल नहीं है?

$(3K + 1)x + 3y = 2$

$(K^2 + 1)x + (K - 2) = 5$

24. एक बेलनाकार टब जिसका व्यास 12 सेमी तथा ऊँचाई 15 सेमी है आइसक्रीम से भरा हुआ है। इस आइसक्रीम को 10 बच्चों में बराबर बाँटा जाना है यदि आइसक्रीम के कोन का ऊपरी हिस्सा अर्ध गोलाकार हो और शंकुवाकार भाग की ऊँचाई उसके आधार के व्यास की दो गुनी हो तो शंकु का व्यास ज्ञात कीजिए।

25. निम्नलिखित बारंबारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए:

वर्ग	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
बारंबारता	1	2	2	6	7	2

26. कार्ड, जिन पर 2 से 151 तक की संख्याएँ अंकित है, एक डिब्बे में रखकर अच्छी प्रकार से मिलाए गए हैं। इस डिब्बे से एक कार्ड यादृच्छया निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाले गए कार्ड पर अंकित संख्या

(*i*) 75 से छोटी अभाज्य संख्या है।

(*ii*) एक विषम संख्या है।

खण्ड 'स'

प्रश्न संख्या 27 से 34 तक प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है।

27. मान निकालिए : $(\cos^2 20° + \cos^2 70°) + \dfrac{\cot 25°}{\tan 65°} + \cot 5° \cot 10° \cot 60° \cot 80° \cot 85°$

28. त्रिभुज PQR जिसमें P समकोण है, QT और RS इसकी माध्यिकाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि $4(QT^2 + RS^2) = 5QR^2$ है।

29. यदि बहुपद $p(x) = 2x^2 + 11x + 5$, के शून्यक α और β हैं, तो $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} - 2\alpha\beta$ का मान ज्ञात कीजिए।

30. सिद्ध कीजिए: $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \dfrac{\tan\theta}{1+\cos\theta} = \cos\theta \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta.$

31. समीकरण $\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{x-7} = \dfrac{11}{30} x \neq -4, 7$ के मूल ज्ञात कीजिए।

32. दर्शाइए कि $n, n+2, n+4$ में से केवल और केवल एक ही 3 से विभाजित होता है, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

33. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम छह पदों का योग 42 है। इसके 10वें पद से 30वें पद का अनुपात 1 : 3 है। श्रेढ़ी का प्रथम और 13वाँ पद ज्ञात कीजिए।

34. आकृति में AB वृत्त की जीवा है। O वृत्त का केन्द्र तथा AB = 16 cm है। वृत्त की त्रिज्या 10 cm है। वृत्त की स्पर्श रेखाएँ A तथा B से P बिन्दु पर काटती है। PA की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

खण्ड 'द'

प्रश्न संख्या 35 से 40 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।

35. एक राजमार्ग पर स्थान A और B एक-दूसरे से 100 किमी दूर हैं। एक ही समय पर एक कार स्थान A से तथा दूसरी कार स्थान B से चलना शुरू करती है। यदि कारें एक ही दिशा में भिन्न-भिन्न चालों से चलती हैं तो वे 5 घंटे में मिलती हैं। यदि वे एक-दूसरे की ओर चलती हैं तो वे 1 घंटे में मिलती हैं। दोनों कारों की चाल क्या है?

36. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें रेखा $3x + y - 9 = 0$ बिंदुओं (1, 3) और (2, 7) को जोड़ने वाले रेखाखंड को विभाजित करती है।

37. एक बिल्डिंग के शीर्ष का टॉवर के पाद से उन्नयन कोण $30°$ है और टॉवर के शीर्ष का बिल्डिंग के पाद से उन्नयन कोण $60°$ है। यदि टॉवर 60 मी ऊँचा है, तो बिल्डिंग की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

38. अचानक बाढ़ आने पर, कुछ कल्याणकारी संस्थाओं ने मिल कर सरकार को उसी समय 100 टेंट लगवाने के लिए कहा तथा इस पर आने वो खर्च का 50% देने की पेशकश की। यदि प्रत्येक टेंट का निचला भाग बेलनाकार है जिसका व्यास 4.2 मी तथा ऊँचाई 4 मी है तथा ऊपरी भाग उसी व्यास का शंकु है जिसकी ऊँचाई 2.8 मी है, और इस पर लगने वाले कैनवस की लागत ₹ 100 प्रति वर्ग मी है। तो ज्ञात कीजिए कि इन संस्थाओं को कितनी राशि देनी होगी।

$$\left[\text{Use } \pi = \frac{22}{7}\right]$$

39. निम्न बंटन एक फैक्टरी में 50 मजदूरों की दैनिक आय दर्शाता है :

दैनिक आय (₹ में)	200 – 250	250 – 300	300 – 350	350 – 400	400 – 450	450–500
मजदूरों की संख्या	10	5	11	8	6	10

बंटन को 'से कम प्रकार' के संचयी बारंबारता वितरण में बदलिए और इसका तोरण बनाइए। दैनिक आय माध्यक भी ज्ञात कीजिए।

40. 5 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त बनाइए P, 8 सेमी दूर एक बिंदु P से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं का एक युग्म खींचिए। प्रत्येक स्पर्श रेखा की लंबाई मापिए।

उत्तर

खंड 'अ'

1. 1440	**2.** $x = 6$ या $x = -2$	**3.** PA = PB = 4 cm
4. $y = 5$	**5.** $\frac{1}{3}$	**6.** $2r$
7. नहीं	**8.** 2 cm	**9.** 7 cm
10. 45°	**11.** 7 cm	**12.** 1
13. द्विघात	**14.** सत्य	**15.** सत्य
16. 3	**17.** 1/8	**18.** 3/5
19. हाँ	**20.** k = 3	

21. शेष हिस्से का क्षेत्रफल = 378 सेमी^{2}

22. $\sqrt{2}$ और $\sqrt{3}$ के बीच परिमेय संख्या 1.5 स्थित है।

23. (– 1)	**24.** 6 cm	**25.** माध्य = 18

26. $(i)\frac{7}{50}, (ii)\frac{1}{2}, (iii)\frac{11}{150}$

27. $\frac{6+\sqrt{3}}{3}$

29. $-\frac{36}{5}$

31. $x = 1, 2,$

33. प्रथम पद = 2, $a_{13} = -26$

34. $\frac{40}{3}$ cm

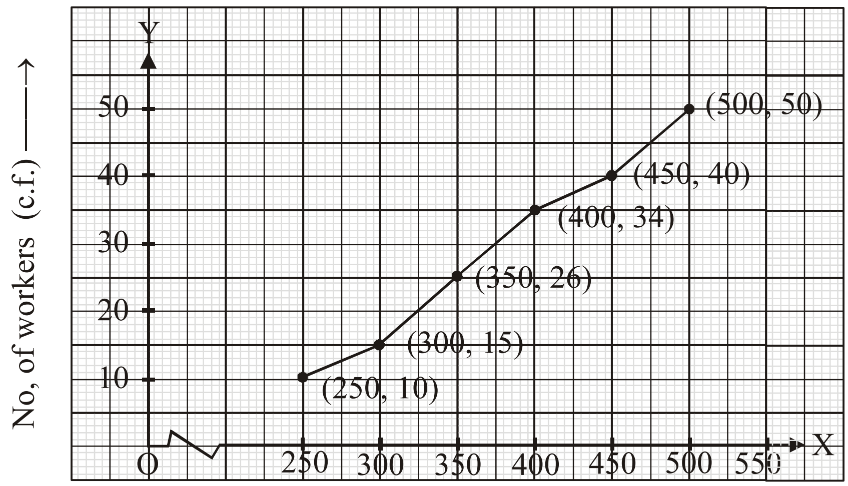
35. कारों की गति क्रमशः 60 किमी/घंटा और 40 किमी/घंटा है।

36. अनुपात 3 : 4 आंतिरिक रूप से

37. भवन की ऊँचाई = 20 मीटर

38. रुपये 379500

39. रुपये 345



दैनिक आय (वर्ग)	मजदूरों की संख्या (*c.f.*)
250 से कम	10
300 से कम	15
350 से कम	26
400 से कम	34
450 से कम	40
500 से कम	50

40. प्रत्येक स्पर्श रेखा की लंबाई = $\sqrt{39}$ सेमी.

❒❒❒

अभ्यास प्रश्न पत्र–1 (हल सहित)

कक्षा-दसवीं

गणित (स्टैण्डर्ड)

समय : 3 घंटे	*अधिकतम अंक* : 80

सामान्य निर्देश :

(i) *सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।*

(ii) *इस प्रश्नपत्र में कुल 40 प्रश्न हैं जिन्हें चार खंडों अ, ब, स तथा द में विभाजित किया गया है।*

(iii) *खंड 'अ' में कुल 20 प्रश्न हैं, प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। खंड 'ब' में 6 प्रश्न हैं, जो सभी 2 अंक के हैं। खंड 'स' में कुल 8 प्रश्न हैं, जो सभी 3 अंक के हैं तथा खण्ड 'द' में कुल 6 प्रश्न हैं, जो सभी 4 अंक के हैं।*

(iv) *इस प्रश्नपत्र में कोई समग्र विकल्प नहीं है।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

खण्ड 'अ'

1. दो संख्याओं का लघुत्तम समापवर्तक 1200 है। निम्न में से कौन सी संख्या इनका महत्तम समापवर्तक नहीं हो सकती–

   (a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 3

2. एक बारंबारता बंटन का माध्यक ग्राफीय रूप से निम्न में से किसकी सहायता से प्राप्त किया जा सकता है–

   (a) आयत चित्र (b) बारंबारता वक्र

   (c) बारंबारता बहुभुज (d) तोरण

3. यदि $x, x + 3, x + 6, x + 9$ व $x + 12$ का माध्य 10 है तो x का मान है–

   (a) 1 (b) 2 (c) 6 (d) 4

4. दो पासे फेंके गए। इसकी प्रायिकता, कि दोनों के ऊपरी सतह पर आने वाली संख्याओं का गुणनफल 6 हो, है–

   (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{9}$ (d) $\frac{2}{3}$

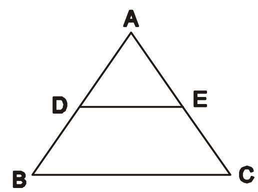
5. एक बेलन, एक शंकु व एक अर्धगोले की ऊँचाई व आधार समान हैं। उनके आयतनों का अनुपात होगा–

   (a) 3 : 1 : 2 (b) 1 : 2 : 3 (c) 3 : 2 : 1 (d) 1 : 3 : 2

6. दो समद्विबाहु त्रिभुजों के कोण समान हैं व उनके क्षेत्रफलों का अनुपात 16 : 25 है। उनकी संगत ऊँचाइयों का अनुपात होगा–

(a) 4:5 (b) 5:4 (c) 3:2 (d) 5:7

7. आकृति में DE || BC व $AD = \frac{1}{2}$ BD है। यदि BC = 4.5 सेमी. है तो DE का मान बताएँ।



8. यदि दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 4 सेमी व 5 सेमी हैं तो एक वृत्त की प्रत्येक जीवा की माप ज्ञात कीजिए जो दूसरे वृत्त की स्पर्श रेखा हो।

9. यदि एक वृत्त के व्यास को 40% बढ़ा दिया जाए तो ज्ञात कीजिए कि उसका क्षेत्रफल कितने प्रतिशत बढ़ जाएगा?

10. द्विघात समीकरण $3\sqrt{3}x^2 + 10x + \sqrt{3} = 0$ का विवित्कर ज्ञात कीजिए।

11. समान्तर श्रेणी $\frac{1}{m}, \frac{1+m}{m}, \frac{1+2m}{m}$, ... की *n*वीं संख्या ज्ञात कीजिए।

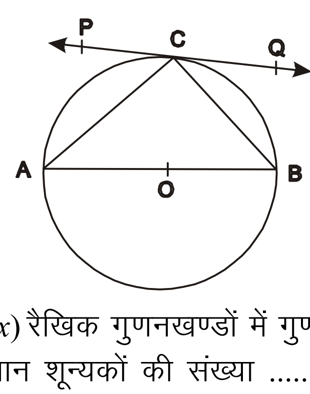
12. यदि $(x + a)$, $2x^2 + 2ax + 5x + 10$ का एक गुणनखंड है तो a का मान ज्ञात कीजिए।

13. एक रेखा $3x - 2y = 6$ व y-अक्ष के प्रतिच्छेदी बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

14. y-अक्ष पर उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदु (– 2, 5) से निकटतम हो।

15. यदि एक मीनार की ऊँचाई व उसकी छाया की लंबाई का अनुपात $\sqrt{3} : 1$ है तो सूर्य के उन्नयन कोण का माप ज्ञात कीजिए।

16. आकृति में PQ केन्द्र O वाले वृत्त की एक स्पर्श रेखा है जिसका स्पर्श बिन्दु C है। यदि AB वृत्त का व्यास है और $\angle CAB = 30°$ तो $\angle PCA$ ज्ञात कीजिए।



17. यदि एक द्विघात बहुपद $f(x)$ रैखिक गुणनखण्डों में गुणनखण्डित किया जा सकता है तो $f(x)$ के वास्तविक व असमान शून्यकों की संख्या .... है।

18. बिन्दुओं $A(\sin\theta - \cos\theta, 0)$ व $B(0, \sin\theta + \cos\theta)$ के बीच की दूरी .... है।

19. दो समरूप त्रिभुजों की भुजाओं का अनुपात 4 : 9 है। इनके क्षेत्रफलों का अनुपात .... होगा।

20. यदि $\tan A = \frac{5}{12}$ तो $(\cos A - \sin A)\operatorname{cosec} A$ का मान .... है।

खण्ड 'ब'

21. दो भिन्न पासों को एक बार एक साथ उछालने पर निम्न की प्रायिकता बताएँ–

(a) प्रत्येक पासे पर एक अभाज्य संख्या प्राप्त करना।

(b) दोनों पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग 9 या 11 प्राप्त करना।

22. एक अर्धगोलाकार टैंक की त्रिज्या 3 मीटर है जो पानी से भरा है। यह $3\frac{4}{7}$ प्रति सेकंड की दर से एक पाइप द्वारा खाली किया जाता है। टैंक को आधा खाली करने में कितना समय लगेगा?

23. एक बक्से में कुछ कार्ड्स रखकर, जिन पर 13, 14, 15 ...., 60 तक संख्याएँ अंकित हैं, हिला दिया जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक कार्ड निकाले जाने पर वह (i) 5 से विभाज्य हो (ii) एक पूर्ण वर्ग संख्या हो।

24. एक घड़ी की मिनट की सुई की लंबाई 5 सेमी. है। प्रातः 6 : 05 से 6 : 40 बजे तक सुई द्वारा रचित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

25. x व y के लिए हल कीजिए $\frac{4}{x} + 5y = 7;\ \frac{3}{x} + 4y = 5$

26. दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6m + 1, 6m + 3$ या $6m + 5$ के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ m एक घनात्मक पूर्णांक है।

खण्ड 'स'

27. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

28. यदि $x = p\sec\theta + q\tan\theta$ व $y = p\tan\theta + q\sec\theta$ है तो सिद्ध कीजिए कि–

$$x^2 - y^2 = p^2 - q^2.$$

29. एक 5 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र O से 13 सेमी. की दूरी पर A बिन्दु स्थित है। AP व AQ, P व Q बिन्दुओं पर वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि लघु चाप PQ पर स्थित एक बिन्दु R पर स्पर्श रेखा इस प्रकार खींची जाए कि वह AP व AQ को क्रमशः B व C पर प्रतिच्छेद करती है तो ΔABC का परिमाप ज्ञात कीजिए।

30. मान ज्ञात कीजिए–

$\cot\theta \tan(90° - \theta) - \sec(90° - \theta) \operatorname{cosec}\theta + \sin^2 65° + \sin^2 25° + \sqrt{3} \tan 5° \tan 45° \tan 85°$.

31. यदि α व β बहुपद $6y^2 - 7y + 2$ के दो शून्यक हैं तो वह द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यक $\frac{1}{\alpha}$ व $\frac{1}{\beta}$ हैं।

32. वह प्राकृत संख्या ज्ञात कीजिए जिसके वर्ग को 50 कम करने पर वह संख्या में से 8 कम करके उसका पांच गुणा करने पर प्राप्त संख्या के बराबर है।

33. सिद्ध कीजिए कि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण पर बने अर्धवृत्त का क्षेत्रफल उसकी अन्य दो भुजाओं पर बने अर्धवृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

34. एक AP में 45 पद हैं। इसकी मध्य के तीन पदों का योग 546 व अंतिम तीन पदों का योग 1050 है। AP ज्ञात कीजिए।

खण्ड 'द'

35. एक टी–सैट को 5% हानि व लेमन सैट को 15% लाभ पर बेचने पर एक दुकानदार को ₹ 7 का लाभ प्राप्त होता है। यदि वह टी–सैट को 5% लाभ व लैमनसैट को 10% लाभ पर बेचता है तो उसे ₹ 13 का लाभ होता है। टी–सैट व लैमन सैट का वास्तविक मूल्य ज्ञात कीजिए।

36. बिन्दु P, बिंदुओं A(2, 1) व B(5, – 8) को जोड़ने वाले रेखाखंड को इस प्रकार विभाजित करता है कि $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$ है। यदि P, रेखा $2x - y + K = 0$ पर स्थित है तो K का मान ज्ञात कीजिए।

37. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें AB = AC = 6 सेमी. और BC = 5 सेमी. है। एक अन्य त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जो ΔABC के समरूप हो जिसमें PQ = 8 सेमी. है। रचना का औचित्य सिद्ध कीजिए।

38. एक व्यक्ति एक झील से 60 मीटर की ऊँचाई पर खड़े होकर एक बादल को देखता है तो उन्नयन कोण 30° है व वहीं से झील में बादल की परछाई का अवनमन कोण 60° है। बादल की झील से ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

39. एक 14 सेमी. व्यास वाले पाइप से होकर, 15 किमी./घंटा की रफ्तार से पानी एक आयताकार तालाब, जिसकी लंबाई 50 मीटर व चौड़ाई 44 मी है, में गिर रहा है। तालाब में 21 सेमी की ऊँचाई प्राप्त करने में पानी कितना समय लेगा?

40. यदि निम्न बारंबारता बंटन का माध्यक 525 है तो x व y का मान ज्ञात कीजिए यदि बारंबारताओं का योग 100 है।

वर्ग अंतराल	बारंबारता
0–100	2
100–200	5
200–300	x
300–400	12
400–500	17
500–600	20
600–700	y
700–800	9
800–900	7
900–100	4
योग	**100**

उत्तर और संकेत

1. (a) 4 **2.** (d) तोरण **3.** (d) 4

4. (b) $\frac{1}{6}$ **5.** (a) 3 : 1 : 2 **6.** (a) 4 : 5

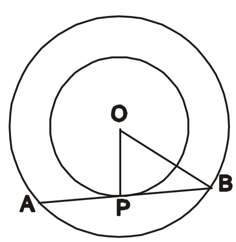
7. AD : AB = 1 : 3

$$\Delta ADE \sim \Delta ABC$$

$$\frac{DE}{4.5} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ DE = 1.5 सेमी.

8. ΔOPB में, $PB = \sqrt{(5)^2 - (4)^2} = 3$ सेमी.



AB = 2 × PB = 2 × 3 = 6 सेमी.

9. माना वृत्त का व्यास d मात्रक है।

वृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{\pi d^2}{4}$ वर्ग मात्रक

40% बढ़ने पर वृत्त का व्यास $= d + 40\%$ of d

$$= \frac{14}{10} d \text{ मात्रक}$$

बढ़े हुए वृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{196\pi d^2}{400}$ वर्ग मात्रक

क्षेत्रफल में वृद्धि % $= \frac{\frac{96\pi d^2}{400}}{\frac{\pi d^2}{4}} \times 100 = 96\%$

10. $D = (10)^2 - 4 \times 3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 64$

11. $a = \frac{1}{m}$ और $d = 1$

$$a_n = \frac{1}{m} + (n-1) \times 1 = \frac{1 + m(n-1)}{m}$$

12. $2(-a)^2 + 2a(-a) + 5(-a) + 10 = 0$

$$a = 2$$

13. $3(0) - 2y = 6$

$$y = -3$$

$\therefore$ अभीष्ट बिंदु $(0, -3)$ है।

14. $(0, 5)$

15. $\tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60°$

16. OC को मिलाओ।

$$OA = OC$$

$$\Rightarrow \angle OCA = \angle OAC = 30°$$

$$\angle PCO = 90°$$

$$\angle PCA + \angle OCA = 90°$$

$$\therefore \angle PCA = 60°$$

17. 2

18. $\sqrt{(\sin\theta - \cos\theta)^2 + (\sin\theta + \cos\theta)^2} = \sqrt{2}$ मात्रक

19. 16 : 81

20. $(\cos A - \sin A) \times \dfrac{1}{\sin A} = \cot A - 1$

$$= \frac{12}{5} - 1 = -\frac{7}{5}$$

21. (i) $\dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$ (ii) $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

22. समय = आधे टैंक का आयतन / 1 सेकंड में बहा पानी

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}}{\frac{25}{7000}} = 16\frac{1}{2} \text{ मिनट}$$

23. (a) $\dfrac{10}{48} = \dfrac{5}{24}$ (b) $\dfrac{4}{48} = \dfrac{1}{12}$

24. 35 मिनट में सुई द्वारा बना कोण

$$= \frac{35}{60} \times 360° = 210°$$

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{22}{7} \times \frac{(5)^2 \times 210°}{360°} = 45\frac{5}{6} \text{ वर्ग मात्रक}$$

25. माना $\dfrac{1}{x} = a$ है।

$\therefore$ $4a + 5y = 7$

और $3a + 4y = 5$

इन समीकरणों को हल करने पर

a = 3 और $y = -1$

$x = \dfrac{1}{3}$ और $y = -1$

26. सही उत्पति **27.** सही उत्पति

28. LHS $= x^2 - y^2 = (p \sec\theta + q \tan\theta)^2 - (p \tan\theta + q \sec\theta)^2$

$= p^2 \sec^2\theta + q^2 \tan^2\theta + 2pq \sec\theta + \tan\theta - p^2 \tan^2\theta - q^2 \sec^2\theta - q^2 \sec^2\theta$
$- 2pq \tan\theta \sec\theta$

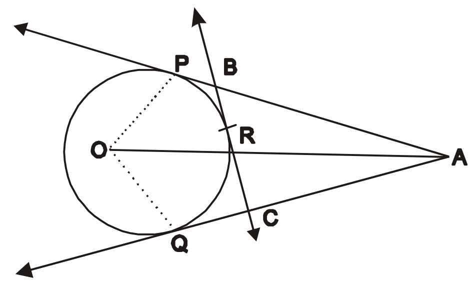
$= p^2 (\sec^2\theta - \tan^2\theta) - q^2 (\sec^2\theta - \tan^2\theta)$

$= p^2 - q^2 = \text{RHS}$

29. $OP \perp AP$

$\Rightarrow \qquad \angle OPA = 90°$

ΔOPA में, $\qquad OA^2 = OP^2 + PA^2$



$\Rightarrow \qquad (13)^2 = (5)^2 + PA^2$

$\Rightarrow \qquad PA = 12$ सेमी.

ΔABC का परिमाप $\qquad = AB + BC + CA$

$= AB + BR + RC + CA$

$= AB + BP + CQ + CA$

$= AP + AQ = 2AP$

$= 2 \times 12 = 24$ सेमी.

30. $\cot\theta \cdot \cot\theta - \text{cosec}\,\theta + (\sin^2 65° + \cos^2 65°) + \sqrt{3}\,\tan 5° \cdot \tan 45° \cdot \cot 5°$

$= \cot^2\theta - \text{cosec}^2\theta + 1 + \sqrt{3} \times 1 \times 1$

$= -1 + 1 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$

31. $\alpha + \beta = \frac{7}{6}$ और $\alpha.\beta = \frac{7}{6}$

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{7}{2}$$

$$P = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{6}{2}$$

∴ अभीष्ट बहुपद $k\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{6}{2}\right)$ है।

$k = 2$ रखने पर, $x^2 - 7x + 6$

32. माना संख्या x है।

प्रश्नानुसार, $x^2 - 10 = 5(x + 8)$

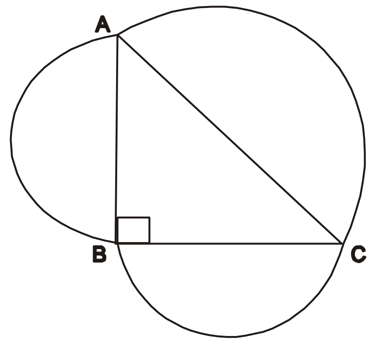
$$x^2 - 5x - 50 = 0$$

$$(x - 10)(x + 5) = 0$$

$x = 10$ या $x = -5$

परन्तु प्राकृत संख्याएँ हमेंशा धनात्मक होती हैं, अतः $x = 10$ है।

33. AB व्यास वाले अर्धवृत्त का क्षेत्रफल + BC व्यास वाले अर्धवृत्त का क्षेत्रफल



$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{AB^2 + BC^2}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{AC^2}{4}\right)$$

= AC व्यास वाले अर्धवृत्त का क्षेत्रफल

34. $a_{22} + a_{23} + a_{24} = 546$

$$a + 22d = 182 \quad ...(1)$$

$$a_{43} + a_{44} + a_{45} = 1050$$

$$a + 43d = 350 \quad ...(2)$$

(1) और (2) से, $a = 6$ और $d = 8$ है।

∴ समांतर श्रेणी 6, 14, 20, ... है।

35. माना टी सेट का वास्तविक मूल्य ₹ x है

और लैमन सेट का वास्तविक मूल्य ₹ y है

प्रश्नानुसार, $$-\frac{5}{100}x+\frac{15}{100}y = 7$$

$$\Rightarrow \quad -x + 3y = 140 \qquad ...(1)$$

$$\frac{5}{100}x+\frac{10}{100}y = 13$$

$$\Rightarrow \quad x + 2y = 260 \qquad ...(2)$$

(1) और (2) से, x = ₹ 100 और y = ₹ 80

36. $P \leftrightarrow (3, -2)$

$2(3) - (-2) + k = 0$

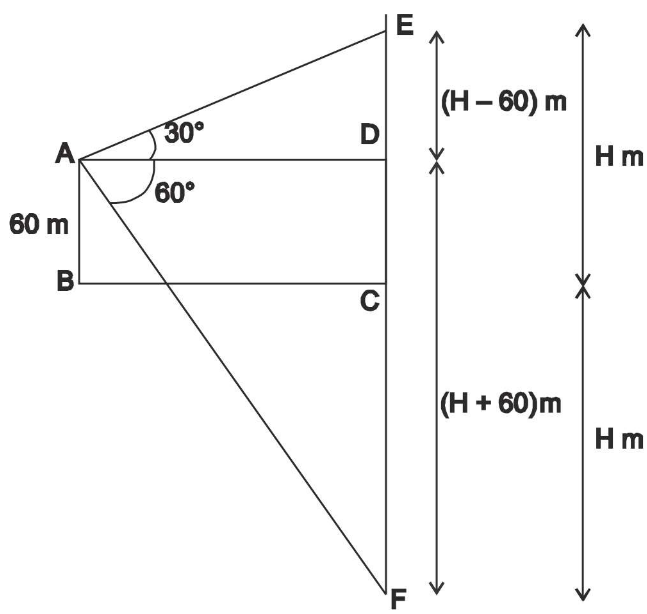
$\Rightarrow \quad k = -8$

$$AP = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10} \text{ मात्रक}$$

37. सही रचना और सही औचित्य।

38. ΔADE में, $\frac{H-60}{y} = \tan 30°$ ...(1)

ΔADF में, $\frac{H+60}{y} = \tan 60°$ ...(2)



(1) और (2) से

$$H - 60 = \frac{2 \times 60 \tan 30°}{\tan 60° - \tan 30°}$$

$$H = 120 \text{ मी.}$$

39. अभीष्ट समय = 21 सेमी. ऊँचाई तक पानी का आयतन / 1 घंटे में बहा पानी

$$= \frac{50 \times 44 \times \frac{21}{100}}{\frac{22}{7} \times \frac{7}{100} \times \frac{7}{100} \times 15000} = 2 \text{ घंटे}$$

40.

चर	**बारंबारता**	**c.f.**
0–100	2	2
100–200	5	7
200–300	X	7 + x
300–400	12	19 + x
400–500	17	36 + x
500–600	20	56 + x
600–700	Y	56 + x + y
700–800	9	65 + x + y
800–900	7	72 + x + y
900–1000	4	76 + x + y
कुल	100	

$$76 + x + y = 100$$

$$x + y = 24 \qquad ...(1)$$

$$525 = 500 + \frac{50 - (36 + x)}{20} \times 100$$

$$x = 9$$

(1) से, $y = 15$

❑❑❑

अभ्यास प्रश्न पत्र–II

कक्षा-दसवीं

गणित (स्टैंडर्ड)

समय : 3 घंटे | *अधिकतम अंक* : 80

सामान्य निर्देश :

(i) *सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।*

(ii) *इस प्रश्नपत्र में कुल 40 प्रश्न हैं जिन्हें चार खंडों अ, ब, स तथा द में विभाजित किया गया है।*

(iii) *खंड 'अ' में कुल 20 प्रश्न हैं, प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। खंड 'ब' में 6 प्रश्न हैं, जो सभी 2 अंक के हैं। खंड 'स' में कुल 8 प्रश्न हैं, जो सभी 3 अंक के हैं तथा खण्ड 'द' में कुल 6 प्रश्न हैं, जो सभी 4 अंक के हैं।*

(iv) *इस प्रश्नपत्र में कोई समग्र विकल्प नहीं है।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

खण्ड 'अ'

1. यदि n एक प्राकृतिक संख्या हो तो $9^{2n} - 4^{2n}$ हमेशा किससे विभाजित होगा?

(a) 5 (b) 13 (c) 5 और 13 (d) कोई विकल्प नहीं

2. यदि निम्न बंटन का माध्य 2.6 हो तो y का मान बताएँ।

x	1	2	3	4	5
f	4	5	y	1	2

(a) 3 (b) 8 (c) 13 (d) 24

3. यदि किसी वृत्त की परिधि और त्रिज्या का अंतर 37 cm हो तो $\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करके इस वृत्त की परिधि क्या होगी?

(a) 154 cm (b) 44 cm (c) 14 cm (d) 7 cm

4. यदि $am \neq bl$ हो तो निम्न रैखिक युग्मों $ax + by = c$ और $lx + mt = n$ के–

(a) एक अद्वितीय हल (b) कोई हल नही

(c) अनगिनत हल

(d) हल हो भी सकता है, नहीं भी हो सकता

5. यदि द्विघात समीकरण $x^2 - kx + 4 = 0$ के मूल बराबर हों तो K का मान

(a) 4, – 4 (b) 16 (c) – 4 (d) 4

6. किसी बढ़ती हुई समांतर श्रेणी की तीन लगातार पदों का योग 51 है और प्रथम तथा तृतीय पदों का गुणनफल 273 है तो तीसरा पद क्या होगा?

(a) 13 (b) 9 (c) 21 (d) 17

7. यदि $(K + 1) = \sec^2\theta\,(1 + \sin\theta)\,(1 - \sin\theta)$ हो तो K का मान ज्ञात कीजिए।

8. यदि $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = x$ हो तो $(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

9. एक 6 m ऊँचे स्तंभ की छाया की लंबाई भूमि पर $2\sqrt{3}$ m है तो सूर्य का उन्नयन कोण बताइए।

10. सत्य असत्य बताइए–

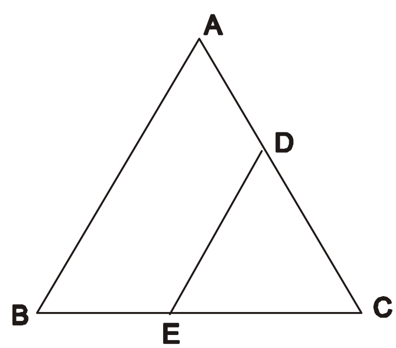
एक पासे को उछालने पर दो संभावित परिणाम है विषम संख्या या सम संख्या। इसलिए विषम संख्या की प्रायिकता 1/2 है।

11. सत्य/असत्य बताइए–

एक ड्राइवर कार चलाना शुरू करता है। कार चलेगी या नहीं चलेगी–यह एक समान संभावना वाली घटना है।

12. एक समबाहु त्रिभुज की माध्यिका की लंबाई $\sqrt{3}$ cm हो तो इस त्रिभुज की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

13. दिए गए चित्र में ΔABC में D तथा E, CA और CB पर क्रमशः दो बिन्दु हैं तथा $DE \parallel AB$ है। यदि $AD = 2x$, $DC = x + 3$, $BE = 2x - 1$ और $CE = x$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।



14. एक समबाहु त्रिभुज की भुजा 8 cm है तो इसका शीर्षलम्ब ज्ञात कीजिए।

15. रिक्त स्थान भरिए–

यदि P(2, 4), Q(0, 3), R(3, 6) और S(a, b) एक समांतर चतुर्भुज PQRS के शीर्षबिंदु हों तो (a + b) का मान .... होगा।

16. यदि P(2, 4) बिन्दु A(5, K) और B(K, 7) से समदूरस्थ हो तो K का मान ज्ञात कीजिए।

17. दो स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण 60° है और इस वृत्त की त्रिज्या $\sqrt{3}$ cm है। स्पर्श रेखाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

18. यदि द्विघात बहुपद $ax^2 - 5x + c$ के शून्यकों का योग और गुणनफल 10 हो तो a और c का मान ज्ञात कीजिए।

19. यदि द्विघात बहुपद $2x^2 + 5x + 1$ के शून्य के α तथा β हो तो एक द्विघात बहुपद बनाइए जिसके शून्यक 2α तथा 2β हो।

20. दो संकेन्द्रिय वृत्तों की त्रिज्याएँ 4 cm और 5 cm है। तो वृत्त की जीवा जो अन्य वृत्त पर स्पर्श रेखा है उसकी लंबाई बताइए।

खण्ड 'ब'

21. सिद्ध कीजिए $(3 - \sqrt{5})$ एक अपरिमेय संख्या है।

22. x के लिए हल कीजिए: $\frac{4}{x} + 5y = 7, \frac{3}{x} + 4y = 5$

23. एक ठोस घनाभाकार लोहे की विमाएँ 4.4 m × 2.6 m ×10 m है। इसे पिघलाकर खोखले पाइप में ढाला जाता है जिसकी आंतरिक त्रिज्या 30 cm है और मोटाई 5 cm है। पाइप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

24. दिए गए आंकड़ों में P तथा Q का मान ज्ञात कीजिए माध्यिका वर्ग तथा बहुलक वर्ग भी ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
100–200	11	11
200–300	12	P
300–400	10	33
400–500	Q	46
500–600	20	66
600–700	14	80

25. यदि $\sin^2\theta + 4\cos^2\theta = 4$ हो तो $\tan\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

26. एक बक्से में कुछ कार्ड हैं जिन पर संख्याएँ 13, 14, 15, ... 60 अंकित हैं। इस बॉक्स में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस कार्ड पर अंकित संख्या

(a) 2 या 3 से विभाजित होती है

(b) एक अभाज्य संख्या है।

खण्ड 'स'

27. सिद्ध कीजिए कि किसी धनात्मक पूर्णांक को हम $9\,m, 9m + 1$ अथवा $9m + 8$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ m एक पूर्णांक है।

28. बहुपद $2x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 15x - 12$ के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{\frac{3}{2}}$ और $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ हैं।

29. x के लिए सरल कीजिए–

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2} = 4 - \frac{2x+3}{x-2}, x \neq 1, -2, 2$$

30. सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उसकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपातों के बराबर होता है।

31. एक समद्विबाहु त्रिभुज ΔABC जिसमें $AB = AC = 6$ cm है, एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 9 cm है, के अंतर्गत है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

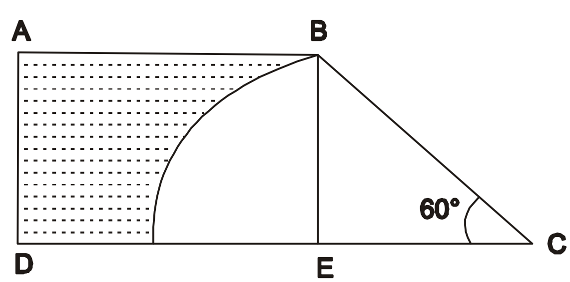
32. एक समांतर श्रेढ़ी में 50 पद हैं। इसके प्रथम दस पदों का योग 210 है और इसके आखिरी 15 पदों का योग 2565 है। यह समांतर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

33. मान ज्ञात कीजिए–

$$\left(\frac{3\tan 41^\circ}{\cot 49^\circ}\right)^2 - \left(\frac{\sin 35^\circ \sec 55^\circ}{\tan 10^\circ \tan 20^\circ \tan 60^\circ \tan 70^\circ \tan 80^\circ}\right)^2$$

34. दिए गए चित्र में ABCD एक समलंब है जिसमें $AB \parallel DC$ तथा $\angle BCD = 60^\circ$ है। यदि BFEC, एक वृत्त जिसका केन्द्र C है, उसका त्रिज्याखंड हो और $AB = BC = 7$ cm, $DE = 4$ cm हो तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

$$\left(\pi = \frac{22}{7}, \sqrt{3} = 1.732\right)$$



35. एक तालाब से 60 m ऊपर एक बिन्दु से एक बादल का उन्नयन कोण 30° है और इस बादल का तालाब में प्रतिबिंब का इसी बिन्दु से अवनमन कोण 60° है। बादल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

36. एक शंकु की ऊँचाई 30 cm है। इसके आधार के समांतर एक तल इस शंकु में से एक छोटा शंकु काट देता है। यदि इसका आयतन दिए गए शंकु के आयतन का $\frac{1}{27}$ हो तो आधार से कितनी ऊँचाई पर यह शंकु काटा गया?

37. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 7 cm, $\angle B = 45°$, $\angle A = 105°$ हो। इस ΔABC के समरूप एक और त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं की $\frac{4}{3}$ गुना हो।

38. निम्न बंटन किसी कक्षा के 100 विद्यार्थियों के अंक दर्शाता है।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0–5	4
5–10	6
10–15	10
15–20	10
20–25	25
25–30	22
30–35	18
35–40	5

इन आंकड़ों के लिए 'कम प्रकार' और अधिक प्रकार के तोरण बनाइए। और तब आलेख द्वारा माध्यिका भी ज्ञात कीजिए।

39. K का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु (3K – 1, K – 2), (K, K – 7) और (K– 1, – K – 2) संरेखीय हों।

40. एक मोटर बोट की शांत जल में गति 18 किमी./घंटा है। इसे 24 किमी धारा के विपरीत जाने में लगा समय धारा की दिशा में इसी जगह लौटने में लगे समय से 1 घंटा अधिक है। धारा की गति ज्ञात कीजिए।

उत्तर संकेत

1. (c)	**2.** (b)	**3.** (b)
4. (a)	**5.** (a)	**6.** (c)
7. zero	**8.** $\left(\frac{1}{x}\right)$	**9.** $60°$
10. सत्य	**11.** असत्य	**12.** $a = 12$ cm
13. 3/5	**14.** $4\sqrt{3}$ cm	**15.** $a + b = 12$
16. $K = 3$	**17.** 3 cm	**18.** $a = \frac{1}{2}, c = 5$
19. $x^2 + 5x + 1 = 0$	**20.** 6 cm	**21.** सिद्ध कीजिए
22. $x = \frac{1}{3}, y = -1$	**23.** 112 cm	

24. $p = 11 + 12 = 23$

$q = 13$

माध्यिका वर्ग 400–500

बहुलक वर्ग 500–600

25. $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$	**26.** (a) $\frac{32}{48} = \frac{2}{3}$ (b) $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$	
27. यूक्लिड प्रमेयिका द्वारा	**28.** 4, 1	**29.** $x = -5, x = \frac{6}{5}$
30. प्रमेय	**31.** $8\sqrt{2}$ वर्ग सेमी.	

32. $S_{10} = 210$

$S_{50} - S_{35} = 2565$, $a = 3$, $d = 4$ समांतर श्रेणी 3, 7, 11, ...

33. $\frac{26}{3}$	**34.** 28.89 cm^2	**35.** $h = 120$ cm
36. $h = 20$ cm	**37.** रचना	

38. तोरण, माध्यिका = 24 लगभग ग्राफ द्वारा **39.** $K = 0, 3$

40. 6 km/hr

NOTES

NOTES