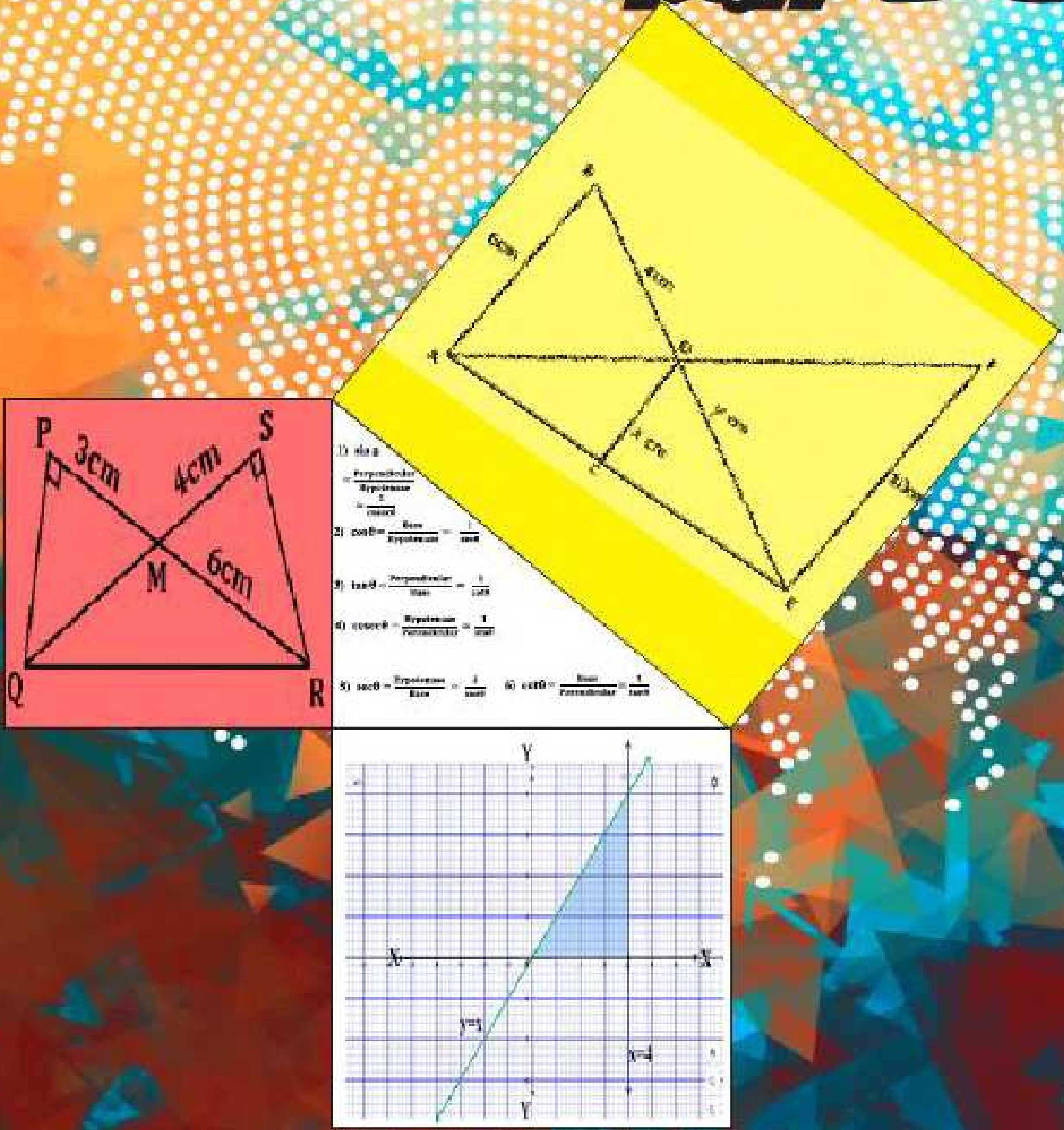
मैंटल मैथ्स

प्रश्न कोष
कक्षा 10



शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली सरकार, दिल्ली

मैंटल मैथ्स

कक्षा-10

2024-25

शिक्षा निदेशालय

राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली सरकार

ASHOK KUMAR
IAS

सत्यमेव जयते

सचिव (शिक्षा)
राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र
दिल्ली सरकार
पुराना सचिवालय, दिल्ली-110054
दूरभाष: 23890187 टेलीफैक्स : 23890119

Secretary (Education)
Government of National Capital Territory of Delhi
Old Secretariat, Delhi-110054
Phone : 23890187, Telefax : 23890119
E-mail : secyedu@nic.in

MESSAGE

The eloquent words of Galileo Galilei resonate: 'The laws of nature are written by the hand of God in the language of mathematics.' In this profound observation, the great astronomer awakened humanity to the paramount importance of mathematics. Within our school education system, mathematics holds a pivotal role, with a dedicated focus on foundational numeracy and literacy.

This year marks a significant milestone, as the project extends its reach to Government-Aided schools and introduces Level IV for classes 11th and 12th as well.

In the competitive arena, where time is of the essence, a strong command over mathematics is indispensable. These skills are not only prized in competitive exams but also wield significant influence in the realms of entrepreneurship and innovation. Mental Maths, with its transformative impact, enhances students' number sense, fosters an understanding of relationships between quantities, and cultivates logical thinking for problem-solving.

The meticulously crafted Mental Maths Question Banks recognize the diverse abilities, needs, and interests of students. As the saying goes, 'Nothing great can be achieved without consistent and persistent hard work'. Heartfelt congratulations to the State Core Team members, District Cordinators and Subject Experts for their silent and steadfast dedication to bring forth these impactful publications.

(Ashok Kumar)

BHUPESH CHAUDHARY, IAS
DIRECTOR (EDUCATION & SPORTS)

Directorate of Education,
Govt. of NCT of Delhi
Room No. 12, Civil Lines,
Old Secretariat, Delhi-54
Phone: 011-23890172
Email: diredu@nic.in

सत्यमेव जयते

MESSAGE

Beyond mere numbers and equations, Mathematics serves as a foundational language, intricately woven into the fabric of everything from the technology we rely on to the scientific principles shaping our understanding of the cosmos.

Enter Mental Maths – a captivating art of calculation sans paper or tools, a dance of numbers performed within the confines of the mind. It's not just about crunching numbers; it's about empowerment. Mental Maths nurtures the comprehension of place value, fortifies basic operations, and establishes a robust foundation for grappling with more complex mathematical concepts in the future.

Engaging in Mental Maths includes exercising multiple cognitive processes – memory, attention, and critical thinking. Studies reveal that regular Mental Maths exercises contribute to maintaining cognitive reserve, postponing the onset of age-related memory loss, and fending off other cognitive declines. In essence, Mental Maths keeps our minds agile and adaptable, akin to the benefits of physical activity for our bodies. It becomes the catalyst for swift decision-making and adept situational adaptation.

A heartfelt commendation goes to the dedicated State Core Team members and subject experts who meticulously crafted the Mental Maths Question Banks. These resources, tailored for students in Government and Government-Aided Schools of the Directorate of Education are a testament to their sincere efforts and the wise guidance of the Project Director of Mental Maths. It brings me immense pleasure to present this Mental Maths Question Bank to students, encouraging them to weave the magic of Mental Maths into the tapestry of their daily lives.

Bhupesh

(BHUPESH CHAUDHARY)

विकास कालिया
क्षेत्रीय शिक्षा निदेशक
उत्तर एवं मध्य क्षेत्र,
पुरस्कार एवं कल्याण शाखाएँ,
पत्राचार विद्यालय एवं
रा. मुक्त विद्यालयी शिक्षा शाखाएँ
परियोजना निदेशक: मेंटल मैथ्स

सत्यमेव जयते

VIKAS KALIA
Regional Director of Education
Central & North,
Awards & Welfare Branches,
Patrachar Vidyalaya &
NIOS (Branches)
Project Director: Mental Maths

MESSAGE

At the tender age of 16, RPraggnanandhaa, the prodigious talent in Indian chess, sent waves through the global chess community by outsmarting Chess Grandmaster Magnus Carlsen in a lightning-fast game at the Airthings Masters Rapid Chess Tournament. His secret weapon was the remarkable ability for mental calculations. This young genius effortlessly combines his exceptional talent with lightning-quick numerical intuition, fortifying his strategic thinking skills.

At the age of 20, Neelakanta Bhanu Prakash of Hyderabad secures his place as the fastest human calculator on the planet, clinching India's first gold in the Mental Calculation World Championship at the Mind Sports Olympiad in London. Holding an impressive tally of 4 world records and 50 Limca records for speed calculation, his journey is even more remarkable considering a childhood setback. A skull fracture at the age of 5 kept him away from school for a year, but he turned adversity into opportunity, delving into puzzle-solving and mathematics games to hone his cognitive skills.

Mental Mathematics isn't just about acing exams; it's a cognitive superpower that equips the brain to think strategically, break down challenges into manageable steps, and devise creative solutions. This skill transcends academic boundaries, proving invaluable when estimating shopping costs, calculating expenses, or planning a trip. Imagine confidently tallying a shopping bill without reaching for any gadgets.

Recognizing that each student has a unique learning style, Mental Maths Question Banks cater to diverse needs, offering a plethora of materials. Through collaborative efforts, students engage in exhilarating Mental Maths competitions, learning from one another and building self-confidence.

A heartfelt acknowledgment goes to the Mental Maths State Core Team, District and Zonal Coordinators, and HOSs for their unwavering dedication to bringing the Mental Maths superpower to students across all Government and government-aided schools of the Directorate of Education. Gratitude extends to the esteemed Secretary Education and the Director of Education for their guidance and constructive feedback, steering the Mental Maths Project toward continuous improvement.

(VIKAS KALIA)
PROJECT DIRECTOR (MMP)

अभिस्वीकृति

विषय विशारद एवं पाठ्य सामग्री निर्माण समिति

कक्षा-10 (सत्र 2024-2025)

डॉ. सुनील अग्रवाल, प्रवक्ता

समन्यवक, मेंटल मैथ्स प्रोजेक्ट

रा.स.सह-शिक्षा उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, पौसंगीपुर, बी-1, जनकपुरी (विद्यालय कोड - 1618003)

संपदा गुलाटी, उप-प्रधानाचार्या

सह समन्वयक, मेंटल मैथ्स प्रोजेक्ट

राजकीय सर्वोदय कन्या विद्यालय, नं. 1, सी ब्लॉक, जनकपुरी (विद्यालय कोड -1618017)

नारायण दत्त मासीवाल, प्रवक्ता

रा.स.सह-शिक्षा उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, पौसंगीपुर, बी-1, जनकपुरी (विद्यालय कोड -1618003)

कुमार गौरव, टी.जी.टी.

राजकीय सह-शिक्षा उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, कांगनहेड़ी (विद्यालय कोड - 1821034)

विनती सिंगला, टी.जी.टी.

राजकीय उच्चतर माध्यमिक बाल विद्यालय, आया नगर (विद्यालय कोड -1923354)

अंजू कुमारी, टी. जी. टी.

राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, सेक्टर - 10, द्वारका, (विद्यालय कोड - 1821022)

तरुण कुमार, टी. जी. टी.

राजकीय सर्वोदय बाल विद्यालय, तिलक नगर, (विद्यालय कोड -1514005)

राजेश खुराना, टी. जी. टी.

सर्वोदय बाल विद्यालय नं. 2 , तिलक नगर, (विद्यालय कोड -1514006)

आकांक्षा चौधरी, टी. जी. टी.

राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, सेक्टर - 5, द्वारका, (विद्यालय कोड - 1821286)

तकनीकी सहायक एवं मुख पृष्ठ आवरण

प्रेम कुमार शर्मा, प्रवक्ता

राजकीय उच्चतर माध्यमिक बाल विद्यालय, नं. 1, सी ब्लॉक, जनकपुरी (विद्यालय कोड -1618006)

अजय कुमार तिवारी, प्रवक्ता

राजकीय उच्चतर माध्यमिक बाल विद्यालय, नं. 1, जे जे कॉलोनी खयाला (विद्यालय कोड -1514003)

नरेश कुमार, टी.जी.टी.

राजकीय सर्वोदय बाल विद्यालय, नं. 2, सी ब्लॉक, जनकपुरी (विद्यालय कोड -1618005)

STATE LEVEL MENTAL MATH QUIZ COMPETITION RESULT 2022-2023
LEVEL-3
REGION EAST (1st POSITION)

S. No.	CLASS	NAME OF STUDENT	FATHER'S NAME	STUDENT ID	SCHOOL NAME	SCHOOL CODE	NAME OF GUIDE TEACHER
1	X	SHREYANSH GUPTA	MUNNA GUPTA	20180021877	SOSE KHICHRIPUR	1002401	KAMALJEET
2	X	PIYUSH KUMAR	BANWARI LAL	20180015820	RPVV B BLOCK YAMUNA VIHAR	1104149	SANGEETA
3	X	PIYUSH THAKUR	UDAYKANT THAKUR	20210047830	GBSSS TAJPUR PAHARI BADARPUR	1925360	SURAJ PAL

REGION SOUTH (1ST RUNNER UP)

S. No.	CLASS	NAME OF STUDENT	FATHER'S NAME	STUDENT ID	SCHOOL NAME	SCHOOL CODE	NAME OF GUIDE TEACHER
1	X	PUNEET KUMAR	AMRITESH KUMAR	20180149516	SOSE SEC 10 DWARKA	1821291	ANJU KUMARI
2	X	SHAILESH	DEVENDER	2018012318	GBSSS DEVLI	1923018	MANOJ KUMAR
3	X	PRABHASH KUMAR JHA	MANOJ KUMAR JHA	20180204788	GBSSS NO-1 SAGARPUR	1821006	HARIOM DUTT

REGION WEST (2ND RUNNER UP)

S. No.	CLASS	NAME OF STUDENT	FATHER'S NAME	STUDENT ID	SCHOOL NAME	SCHOOL CODE	NAME OF GUIDE TEACHER
1	X	RANJIT KUMAR	RAJENDER KUMAR MAHTO	20190319052	GBSSS BAPROLA	1617258	RAHUL YADAV
2	X	AADARSH KUMAR	RAJESH KUMAR SAHNI	20180003243	DBRA SOSE HARI NAGAR	1514116	RITIKA GUPTA
3	X	PRIYANSHU	NEERAJ KUMAR	20200166777	SBV A BLOCK VIKASPURI	1618002	DEVINDER SINGH

REGION NORTH (4TH POSITION)

S. No.	CLASS	NAME OF STUDENT	FATHER'S NAME	STUDENT ID	SCHOOL NAME	SCHOOL CODE	NAME OF GUIDE TEACHER
1	X	RUPESH KUMAR	RAM KUMAR	20180077536	SOSE SEC 23 ROHINI	1413345	DEEPAK
2	X	ANSH BANSAL	DEEPAK KUMAR	20210524837	SOSE BT BLOCK SHALIMAR BAGH	1309305	ANURADHA
3	X	LAKSHAY SINGH	SURENDER SINGH	20130207409	SOSE BT BLOCK SHALIMAR BAGH	1309305	ANURADHA

REGION CENTRAL (5TH POSITION)

S. No.	CLASS	NAME OF STUDENT	FATHER'S NAME	STUDENT ID	SCHOOL NAME	SCHOOL CODE	NAME OF GUIDE TEACHER
1	X	ANSH	AKHILESH KUMAR GAUR	20160276189	DBRA SOSE CIVIL LINES	1207259	MANEETA SHARMA
2	X	SHUBHAM KUMAR BHARADWAJ	AJAY KUMAR THAKUR	20130256181	DBRA SOSE CIVIL LINES	1207259	MANEETA SHARMA
3	X	VISHAL SINGH	LAXMAN SINGH	20170190098	SBV ROUSE AVENUE	2127001	KAMLESH

STATE LEVEL MENTAL MATH QUIZ COMPETITION RESULT 2023-2024

LEVEL-3

REGION SOUTH (1st POSITION)

S. No.	CLASS	NAME OF STUDENT	FATHER'S NAME	STUDENT ID	SCHOOL NAME	SCHOOL CODE	NAME OF GUIDE TEACHER
1	X	MD. REHAN AHMAD	HASNAIN AHMAD	20190222048	SBV DEENDAR PUR	1822247	LOKESH CHAUHAN
2	X	RITIK	BHASKAR	20220250638	SBV DEENDAR PUR	1822247	LOKESH CHAUHAN
3	X	LAKSHITA	RAGHUVINDER SINGH	20220284215	DBRA SOSE SEC 10 DWARKA	1821291	KAMAL YADAV

REGION CENTRAL (2nd POSITION)

S. No.	CLASS	NAME OF STUDENT	FATHER'S NAME	STUDENT ID	SCHOOL NAME	SCHOOL CODE	NAME OF GUIDE TEACHER
1	X	NIRMAL	MAHENDER PRATAP SINGH	20130262351	DBRA SOSE LINK ROAD	2128140	SANTOSH KUMAR
2	X	PIYUSH	RAM BAHADUR	20190035435	DBRA SOSE CIVIL LINES	1207259	MANEETA SHARMA
3	X	KARISHMA	SHANKER KUMAR SHARMA	20210362771	GGSSS BURARI	1207117	ARTI CHAUHAN

REGION WEST (3rd POSITION)

S. No.	CLASS	NAME OF STUDENT	FATHER'S NAME	STUDENT ID	SCHOOL NAME	SCHOOL CODE	NAME OF GUIDE TEACHER
1	X	HARSH KUMAR SINGH	NAND KUMAR SINGH	20130255505	GBSSS NO 1, PUNJABI BAGH	1515010	SANJEEV
2	X	NEEV AGGARWAL	SACHIN AGGARWAL	20190176911	AES NT RR MEMORIAL SR SEC SCHOOL JANAKPURI	1618080	P MALLESWARI
3	X	PRINCE KUMAR	DASHRATH PRASAD	20160111348	SBV NO 1 TILAK NAGAR	1514005	TARUN KUMAR

REGION- EAST (4th POSITION)

S. No.	CLASS	NAME OF STUDENT	FATHER'S NAME	STUDENT ID	SCHOOL NAME	SCHOOL CODE	NAME OF GUIDE TEACHER
1	X	SIDDHANT KUSHWAHA	SANTOSH KUSHWAHA	20190034262	DBRA SOSE KAKAJI	1925438	AJAY VIR SINGH
2	X	AVIN JANGID	VINOD KUMAR	20170290248	DBRA SOSE KHICHRIPUR	1002401	KAMAL JEET SINGH
3	X	ANSH KUMAR TIWARI	MANJAY KISHOR TIWARI	20190063912	SBV KALYANVAS	1002003	AJAY KUMAR SHARMA

REGION NORTH (5th POSITION)

S. No.	CLASS	NAME OF STUDENT	FATHER'S NAME	STUDENT ID	SCHOOL NAME	SCHOOL CODE	NAME OF GUIDE TEACHER
1	X	ARYAN THAKUR	MANOJ KUMAR THAKUR	20180195029	DBRA SOSE SEC 18, ROHINI	1310469	AJAY SAHA
2	X	HIMANSHU	KASHMIRI LAL	20210184012	GBSS NITHARI	1412259	RAJESH SHARMA
3	X	SAMYAK CHOUDHARY	SANJEEV KUMAR CHAUDHARY	20220246120	DBRA SOSE SEC 23, ROHINI	1413345	DEEPAK

भारत का संविधान

[1][भाग 4 क

नागरिकों के मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51क. मूल कर्तव्य - भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह -

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे ;

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे ;

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण रखे ;

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे ;

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभाव से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो स्त्रियों के सम्मान के विरुद्ध है ;

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्व समझे और उसका परिरक्षण करे ;

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणि मात्र के प्रति दयाभाव रखे ;

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे ;

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे ;

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊंचाइयों को छू ले ;]

[2][(ट) यदि माता-पिता या संरक्षक है, छह वर्ष से चौदह वर्ष तक की आयु वाले अपने, यथास्थिति, बालक या प्रतिपाल्य के लिए शिक्षा के अवसर प्रदान करे ।]

---

1. संविधान (बयालीसवा संशोधन) अधिनियम 1976 की धारा 11 द्वारा (3-1-1977 से) अंत: स्थापित |
2. संविधान (छियासीवा संशोधन) अधिनियम 2002 की धारा 4 द्वारा (1-4-2010 से) अंत: स्थापित |

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग**,** भारत को एक [1]**[संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य]** बनाने के लिए**,** तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार**,** अभिव्यक्ति**,** विश्वास**,** धर्म

और उपासना की **स्वतंत्रता**,

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए**,**

तथा उन सब में

व्यक्ति की गरिमा और [2][राष्ट्र की एकता और अखंडता] सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हज़ार छह विक्रमी) को **एतदद्वारा इस संविधान** को **अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

---

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) "प्रभुत्व-सपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य" के स्थान पर प्रतिस्थापित |

2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) "राष्ट्र की एकता" के स्थान पर प्रतिस्थापित |

SCHEDULE OF MENTAL MATHS QUIZ COMPETITIONS

FOR THE YEAR 2024-2025

DIRECTORATE OF EDUCATION

GOVT OF NCT OF DELHI

❖ Practice to students from Question Bank	:	01.04.2024 to 19.10.2024
❖ School Level Quiz Competitions	:	21.10.2024 to 30.10.2024
❖ Cluster Level Quiz Competition	:	14.11.2024 to 20.11.2024
❖ Zonal Level Quiz Competition	:	25.11.2024 to 30.11.2024
❖ District Level Quiz Competition	:	07.12.2024 to 13.12.2024
❖ Regional Level Quiz Competition	:	26.12.2024 to 31.12.2024
❖ State Level Quiz Competition	:	18.01.2025 to 31.01.2025

विषय सूची

क्रमांक	अध्याय	पृष्ठ संख्या
1	वास्तविक संख्याएँ	1
2	बहुपद	8
3	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	18
4	द्विघात समीकरण	28
5	समान्तर श्रेढ़ियाँ	35
6	त्रिभुज	42
7	निर्देशांक ज्यामिति	58
8	त्रिकोणमिति तथा इसके अनुप्रयोग	67
9	वृत्त	76
10	वृत्तों से सम्बंधित क्षेत्रफल	93
11	पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	106
12	सांख्यिकी	115
13	प्रायिकता	123

अध्याय – 1

वास्तविक संख्याएँ

याद रखने योग्य बिंदु

i. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका

किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए, जहाँ $a \geq b$ है, ऐसी अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ q और r विद्यमान होती हैं कि $a = bq + r$, जहाँ $0 \leq r < b$ है |

ii. यदि p एक अभाज्य संख्या है और p, a^n को विभाजित करता है, तो p, a को भी विभाजित करेगा, जहाँ a कोई धनात्मक पूर्णांक है |

iii. यदि p एक अभाज्य संख्या है, तो $\sqrt{p}$ एक अपरिमेय संख्या है |

iv. यदि $x = \frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है, जहाँ p और q सह-अभाज्य पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। तब,

a. x का दशमलव प्रसार सांत होगा होगा, यदि q का अभाज्य गुणनखंड $(2^m \times 5^n)$ के रूप में हैं, जहाँ m और n धनात्मक पूर्णांक हैं |

b. x का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा, यदि $q \neq (2^m \times 5^n)$|

c. यदि एक परिमेय संख्या का हर $(2^m \times 5^n)$ के रूप का है, तो यह m स्थानों के बाद सांत होगा यदि $m \geq n$ या n स्थानों के बाद सांत होगा यदि $n > m$ है |

v. यदि a और b दो धनात्मक पूर्णांक हैं, तो

म.स. $(a, b) \times$ ल.स. $(a, b) = a \times b$.

vi. धनात्मक संख्याओं का म.स. हमेशा उसके ल.स. का गुणनखंड होता है |

प्रश्नावली

1. 3125 के अभाज्य गुणनखंड में 5 का घातांक बताइए |
2. 98 के अभाज्य गुणनखंड में अभाज्य गुणनखंडों के घातांकों का योग बताइए |
3. $0.\overline{6}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में बताइए |
4. यदि किसी प्राकृत संख्या n का अभाज्य गुणनखण्ड $2^5 \times 3^6 \times 5^4 \times 7$ है, तो n में क्रमागत शून्यों की संख्या बताइए |
5. यदि $a = p^2q^3r$, $b = p^4q^5r^3$, $c = p^2q^2r^2$, जहाँ p, q और r अभाज्य संख्याएँ हैं, तो म.स. (a, b, c) बताइए |
6. यदि $a = p^2q^3r$, $b = p^4q^5r^3$, $c = p^2q^2r^2$, जहाँ p, q और r अभाज्य संख्याएँ हैं, तो ल.स. (a, b, c) बताइए |
7. बताइए कि परिमेय संख्या $\frac{1237}{1250}$ का दशमलव प्रसार कितने स्थानों के बाद समाप्त होगा ?
8. बताइए कि परिमेय संख्या $\frac{116}{2^5 \times 5^1}$ का दशमलव प्रसार कितने स्थानों के बाद समाप्त होगा ?
9. वह सबसे छोटी धनात्मक संख्या बताइए, जिससे $\sqrt{125}$ को विभाजित करने पर परिमेय संख्या प्राप्त हो जाए |
10. वह छोटी से छोटी धनात्मक संख्या बताइए, जिससे $\sqrt[3]{81}$ को गुणा करने पर परिमेय संख्या प्राप्त हो जाए |
11. यदि m और n दो अभाज्य संख्याएँ हैं, तो म.स. (m, n) बताइए |
12. यदि m और n दो अभाज्य संख्याएँ हैं, तो ल.स. (m, n) बताइए |

13. सबसे छोटी भाज्य संख्या और एक अंक की सबसे बड़ी अभाज्य संख्या का म.स. और ल.स. बताइए |

14. $\sqrt{(199)(201)+1}$ का मान बताइए |

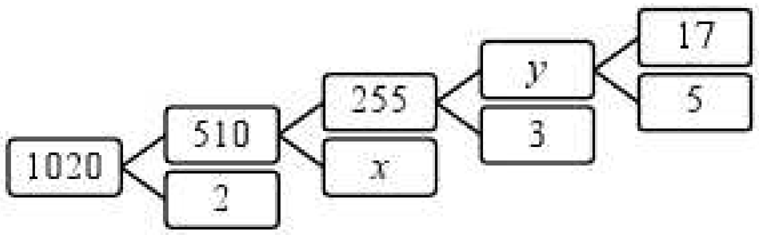
15. $\sqrt{(999)(1001)+1}$ का मान बताइए |

16. संख्या $7^{2019} \times 3^{2019}$ के इकाई के स्थान पर अंक बताइए |

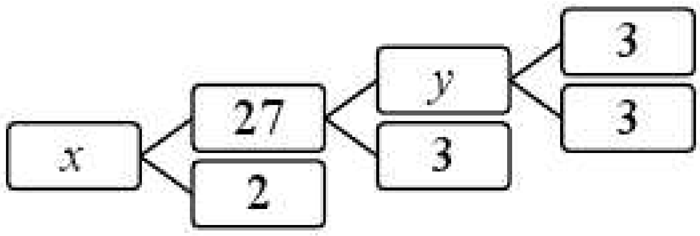
17. संख्या $44^{11} \times 66^{11} \times 99^{11} + 11^{11}$ के इकाई के स्थान पर अंक बताइए |

18. संख्या $4^1 \times 9^2 \times 4^3 \times 9^4 \times 4^5 \times 9^6 \ldots \times 4^{99} \times 9^{100}$ के इकाई के स्थान पर अंक बताइए |

19. नीचे दिए गए गुणनखंड वृक्ष की सहायता से 2xy का मान बताइए |



20. नीचे दिए गए गुणनखंड वृक्ष की सहायता से $(x \div y)^2$ का मान बताइए |



21. a का मान बताइए जिसके लिए $p^n = (a \times 5)^n$ अंक 0 पर समाप्त होता है|

22. सबसे छोटी धनात्मक परिमेय संख्या बताइए जिसे $\frac{1}{3}$ से गुणा करने पर इसका दशमलव प्रसार दशमलव के एक स्थान के बाद समाप्त हो जाए|

23. दो अंकों की सबसे बड़ी अभाज्य संख्या और तीन अंकों की सबसे छोटी अभाज्य संख्या का अंतर बताइए |

24. $n + q$ का मान बताइए यदि $7560 = 2^3 \times 3^n \times q \times 7$ हो |

25. $1 \times 13 \times 19 \times 23 + 23$ का सबसे छोटा अभाज्य गुणनखंड बताइए |

26. यदि $\left(\frac{15}{2^3} \times 5^2 \times 3^\beta \times 7^n\right)$ का दशमलव प्रसार सांत है, तो n और β के न्यूनतम सम्भव मान बताइए |

27. दो संख्याएँ 17:13 के अनुपात में हैं | यदि उनका म.स. 15 है, तो संख्याओं का योग बताइए |

28. $(2^{125} - 1)$ तथा $(2^{15} - 1)$ का म.स. बताइए |

(संकेत: म.स. $[(a^m - 1), (a^n - 1)] = a^{\text{म.स.}(m,n)} - 1$)

29. दो संख्याओं का म.स. और ल.स. क्रमशः 33 और 264 है| यदि पहली संख्या को दो से विभाजित करने पर भागफल 33 आता है, तो दूसरी संख्या बताइए |

30. दो संख्याओं का ल. स. 1890 है और उनका म.स. 30 है| यदि संख्याओं में से एक संख्या 270 है, तो दूसरी संख्या बताइए |

31. दो संख्याओं का म.स. 11 है और उनका ल.स. 616 है| यदि संख्याओं में से एक संख्या 88 है, तो दूसरी संख्या बताइए |

32. यदि म.स. (2730, 4400) = 110 और ल.स. (2730, 4400) = 273k हो, तो k का मान बताइए |

33. यदि म.स. (144, 180) = 13m − 3, तो m का मान बताइए |

34. यदि म.स. (a, b) = 29 है, जहाँ a, b > 29 और ल.स. (a, b) = 4147 है, तो |a − b| का मान बताइए |

35. दो संख्याओं का ल. स. उनके म.स. का 45 गुना है | यदि संख्याओं में से एक संख्या 125 है तथा म.स. और ल.स. का योग 1150 है, तो दूसरी संख्या बताइए |

36. तीन संख्याओं का अनुपात 3 : 4 : 5 है और उनका ल. स. 2400 है, तो उनका म.स. बताइए |

37. तीन विभिन्न अंकों से बनी तीन अंकों की सबसे छोटी धनात्मक संख्या और दो अंकों की सबसे बड़ी भाज्य संख्या का म.स. बताइए |

38. यदि म.स. (a, b) = ल.स. (a, b) है , तो a और b के बीच संबंध बताइए |

39. यदि म.स. (20, p) = 2 और ल.स. (20, p) = 60 है, तो p का मान बताइए |

40. एक सम अभाज्य संख्या के गुणनखंडों की कुल संख्या बताइए |

41. यदि $(-1)^n + (-1)^{8n} = 0$ हो, तो n का न्यूनतम मान बताइए |

42. $(a - r)$ के संभावित गुणनखण्ड बताइए जब $a = bq + r$ हो |

43. वह छोटी से छोटी धनात्मक पूर्णांक बताइए जो प्रथम पाँच प्राकृत संख्याओं से विभाज्य हो |

44. यदि किसी आयत की आसन्न भुजाएँ 'a' और 'b', 3 : 5 के अनुपात में हैं तथा म.स.(a, b) = 11 है, तो आयत का परिमाप बताइए |

45. एक आयत की लंबाई ल.स. (a, b) है और चौड़ाई म.स. (a, b) है, तो आयत का क्षेत्रफल बताइए |

46. यदि संख्या $(5m + 1)(5m + 3)(5m + 4)$ को 5 से भाग देने पर शेषफल r प्राप्त हो, तो r का संभव मान बताइए, जहाँ r एक प्राकृत संख्या हो |

47. दो समबाहु त्रिभुजों की भुजाओं की लंबाई क्रमशः 51 सेमी और 85 सेमी है, तो टेप की सबसे बड़ी लंबाई बताइए जो दोनों को सटीक रूप से माप सके|

48. छः घंटियां एक साथ बजने लगती हैं | वे क्रमशः 2, 4, 6, 8, 10 और 12 सेकंड के अंतराल पर बजती हैं| बताइए कि 30 मिनट में वे एक साथ कितनी बार बजेंगी ?

49. एक सेमिनार में हिंदी, अंग्रेजी और गणित के प्रतिभागियों की संख्या क्रमशः 60, 84 और 108 है | आवश्यक कमरों की न्यूनतम संख्या बताइए जहाँ प्रत्येक कमरे में समान संख्या में प्रतिभागियों को बैठाना है और वे सभी एक ही विषय के हैं |

50. एक रेजिमेंट में सैनिकों की न्यूनतम संख्या बताइए जिससे वे 15, 20, 25 की पंक्तियों में खड़े हों और एक पूर्ण वर्ग का निर्माण करें |

उत्तर:

प्र. सं.	उत्तर	प्र. सं.	उत्तर
1	5	26	$n = 0, \beta = 0$
2	3	27	450
3	$\frac{2}{3}$	28	31
4	4	29	132
5	p^2q^2r	30	210
6	$p^4q^5r^3$	31	77
7	4 स्थान	32	400
8	3 स्थान	33	3
9	$\sqrt{5}$	34	58
10	$\sqrt[3]{9}$	35	225
11	1	36	40
12	$m \times n$	37	3
13	म.स. = 1, ल. स. = 28	38	$a = b$
14	200	39	6
15	1000	40	2
16	1	41	1
17	7	42	1, b, q, bq
18	6	43	60
19	340	44	176 इकाई
20	36	45	ab वर्ग इकाई
21	2	46	2
22	$\frac{3}{10}$	47	17 सेमी
23	-4	48	16
24	8	49	21
25	2	50	900 सैनिक

अध्याय - 2

बहुपद

याद रखने योग्य बिंदु

i. बीजीय व्यंजक जिनमें प्रत्येक पद के चर की घात (या घातांक) एक पूर्ण संख्या होती है, बहुपद कहलाते हैं, जैसे $2x + 3$, $5t^2 + 7t + 8$ बहुपद के उदाहरण हैं |

ii. एक चर में बहुपद की घातांक दिए हुए बहुपद में किसी पद के चर की उच्चतम घात उस बहुपद का घातांक कहलाती है |

iii. निम्न तालिका विभिन्न बहुपदों की घात को दर्शाती है:

उदाहरण	बहुपद का नाम	बहुपद की घात
5	अचर बहुपद	0
2x+3	रैखिक बहुपद	1
$5x^2 + 7x + 8$	द्विघात बहुपद	2
$3x^3 + 2x^2 + 5x + 7$	त्रिघात बहुपद	3
$t^4 + 8t^3 + 7t^2 + 4t + 5$	चतुर्घात बहुपद	4
0	शून्य बहुपद	अपरिभाषित

iv. यदि एक बहुपद $p(x)$ है तथा $p(\alpha) = 0$, तो $x = \alpha$ को बहुपद $p(x)$ का शून्यक कहा जाता है |

v. घात 'n' वाले बहुपद के अधिक से अधिक 'n' शून्यक होते हैं |

vi. यदि α और β बहुपद $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ के शून्यक हैं, तब

शून्यकों का योगफल($\alpha + \beta$) $= -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल($\alpha\beta$) $= \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

vii. यदि α और β द्विघात बहुपद $p(x)$ के शून्यक हैं, तब

$$p(x) = k[x^2 - (\text{शून्यकों का योगफल})x + \text{शून्यकों का गुणनफल}]$$

$$p(x) = k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$

जहाँ k कोई शून्येतर वास्तविक संख्या है|

viii. यदि α, β और γ त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ के शून्यक हैं, तब

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = -\frac{x^2 \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} = -\frac{\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

ix. यदि α, β और γ त्रिघात बहुपद $p(x)$ के शून्यक हैं, तो

$$p(x) = k[x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma]$$

जहाँ k कोई शून्येतर वास्तविक संख्या है|

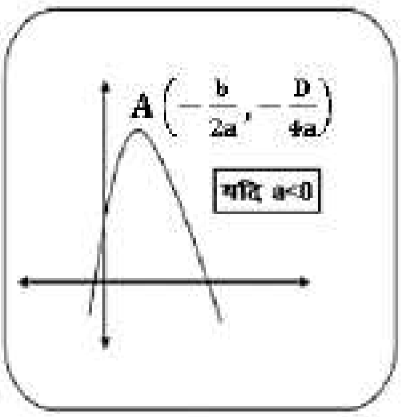
x. आलेखीय रूप से, बहुपद $p(x)$ के शून्यक उन बिंदुओं के x-निर्देशांक होते हैं जहाँ $y = p(x)$ का आलेख x-अक्ष को प्रतिच्छेद करता है|

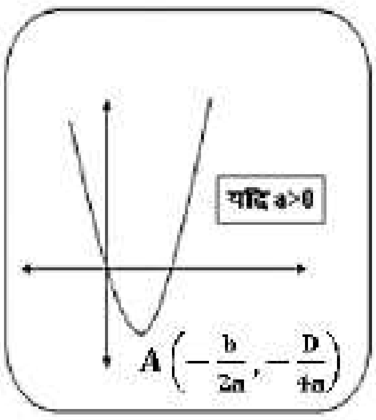
xi. आलेख $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ के शीर्ष A के निर्देशांक हैं, जहाँ:

$A\left(-\frac{b}{1a}, -\frac{D}{4a}\right)$ अथवा $A\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ जहाँ $D = b^2 - 4ac$ है|

उदाहरण: यदि $y = x^2 - 2x + 4$ है तो इसके शीर्ष के निर्देशांक =

$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right) = (1, 3)$





xii. बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथम के अनुसार:

'यदि $p(x)$ और $g(x)$ कोई दो बहुपद हैं, जहाँ $g(x) \neq 0$ तथा

$p(x)$ की घात $\geq g(x)$ की घात, तो हम बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ ऐसे प्राप्त कर सकते हैं कि, $p(x) = g(x)q(x) + r(x)$, जहाँ $r(x) = 0$ अथवा $r(x)$ की घात $< g(x)$ की घात'

प्रश्नावली

1. $y^2 - 8 - 2y$ के शून्यक बताइए |
2. $f(t) = t^2 - 27$ के शून्यक बताइए |
3. $p(y) = 6y^2 - 3$ के शून्यक बताइए |
4. $(z^4 - 2 + z^2)^2$ की घात बताइए |
5. $(x^2 - 1)^2(x^3 + x^2 + x + 1)$ की घात बताइए |
6. उस बिंदु के निर्देशांक बताइए जहाँ बहुपद $f(x) = 3x + 2$ का आलेख x-अक्ष को प्रतिच्छेद करता है|
7. 'a' का वह मान बताइए जिसके लिए बहुपद $ax^2 + bx + c, a \neq 0$का आलेख ऊपर की ओर परवलय है|
8. यदि $m - n, m$ और $m + n$ बहुपद $p(y) = 2y^3 - 6y^2 + 5y - 7$ के शून्यक हैं, तो m का मान बताइए |
9. द्विघात बहुपद $3y^2 + 1 - 3\sqrt{3}y$ के शून्यकों का योग और गुणनफल बताइए |
10. एक द्विघात बहुपद बताइए जिसके शून्यक $4\sqrt{2}$ and $-2\sqrt{2}$ हैं |

11. एक द्विघात बहुपद बताइए जिसके शून्यक $5 + \sqrt{2}$ and $5 - \sqrt{2}$ हैं |

12. एक द्विघात बहुपद बताइए जिसके शून्यक $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ और $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$ हैं |

13. वह द्विघात बहुपद बताइए जिसके शून्यकों का योग 0 है और एक शून्यक 5 है |

14. एक द्विघात बहुपद बताइए जिसका एक शून्यक $(2 + \sqrt{5})$ है और शून्यकों का योग 4 है |

15. एक द्विघात बहुपद बताइए जिसके शून्यक $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ के शून्यकों के व्युत्क्रमानुपाती हैं |

16. यदि α, β बहुपद $x^2 - 3x + 2$ के शून्यक हैं, तो वह बहुपद बताइए जिसके शून्यक $(\alpha + \beta)^2$ और $(\alpha - \beta)^2$ हैं |

17. यदि α, β बहुपद $y^2 - 2y - 2$ के शून्यक हैं, तो वह बहुपद बताइए जिसके शून्यक $(2\alpha + 1)$ और $(2\beta + 1)$ हैं |

18. एक त्रिघात बहुपद बताइए जिसके शून्यक $-5, 0$ और 5 हैं |

19. यदि α, β बहुपद $2x^2 + 5x + 1$ के शून्यक हैं, तो $(\alpha + \beta + \alpha\beta)$ का मान बताइए |

20. यदि α, β बहुपद $2x^2 - 5x + 8$ के शून्यक हैं, तो $(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha})$ का मान बताइए |

21. यदि α, β बहुपद $p(t) = t^2 + t - 2$ के शून्यक हैं, तो $(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta})$ का मान बताइए |

22. यदि α, β बहुपद $f(y) = 6y^2 + y - 2$ के शून्यक हैं, तो $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha$ का मान बताइए |

23. यदि α, β तथा γ बहुपद $x^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हैं, तो $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ का मान बताइए |

24. यदि α, β तथा γ बहुपद $x^3 - px^2 + qx - r$ के शून्यक हैं, तो $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}$ का मान बताइए |

25. यदि $x = 1$ बहुपद $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ का शून्यक है, तो $\frac{b+c}{a}$ का मान बताइए |

26. यदि $(a+1)x^2 + (2a+3)x + (3a+4), a \neq -1$ के शून्यकों का योग -1 हो, तो a का मान बताइए |

27. यदि द्विघात बहुपद $3x^2 - kx + 6$ के शून्यकों का योग 3 है, तो k का मान बताइए|

28. यदि बहुपद $z^2 + 13z - p$ का एक शून्यक दूसरे का व्युत्क्रम है, तो p का मान बताइए |

29. p का मान बताइए जिसके लिए -4 बहुपद $x^2 - 2x - (7p + 3)$ का शून्यक है |

30. यदि बहुपद $ax^2 - 3(a-1)x - 1, a \neq 0,$ का एक शून्यक 1 है, तो a का मान बताइए |

31. यदि $ax^2 - 5x + c, a \neq 0$ के शून्यकों का योग और गुणनफल प्रत्येक 10 के बराबर है, तो $a + c$ का मान बताइए |

32. यदि α, β बहुपद $x^2 - 3x + p$ के शून्यक हैं, तो p का मान बताइए |

33. यदि $x + 2$ बहुपद $x^2 + ax + 2b$ का एक गुणनखंड है तथा $a + b = 4$, तो a और b का मान बताइए |

34. यदि α और β बहुपद $p(y) = 2y^2 + 5y + m$ के शून्यक हैं, तथा $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = \frac{17}{4}$, तो m का मान बताइए |

35. यदि α और β बहुपद $f(t) = t^2 - k(t+1) - c$ के शून्यक हैं, तथा $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 0$, तो c का मान बताइए |

36. यदि $5x^2 + (p+q+r)x + pqr$ के शून्यकों का योग 0 हो, तो $p^3 + q^3 + r^3$ का मान बताइए |

37. यदि बहुपद $x^2 - 9x + (7k + 4)$ का एक शून्यक दूसरे शून्यक का दोगुना हो, तो k का मान बताइए |

38. यदि $f(y) = y^3 - 2y^2 - y + 2 = (y + 1)(y - 2)(y - k)$, तो k का मान बताइए|

39. $(x^2 - 1), (x^4 - 1)$ तथा $(x - 1)^2$ का सार्व गुणनखण्ड बताइए |

40. $(x^2 + 2x + 1), (x^2 - 1)$ तथा $(x^3 + 1)$ का सार्व शून्यक बताइए |

41. यदि $(x + a)$ बहुपद $(x^2 - 3x - 10)$ तथा $(x^2 - 8x + 15)$ का सार्व गुणनखण्ड हो, तो a का मान बताइए |

42. बहुपद $(x^2 + x - 12)$ तथा $(x^2 + 9x + 20)$ के सार्व गुणनखण्ड बताइए |

43. x का मान बताइए जिसके लिए दोनों बहुपद $(2x^2 + 8x + 8)$ और $(x^2 - 3x - 10)$, शून्य हो जाते हैं |

44. यदि 5 घातांक वाले एक बहुपद को एक द्विघात बहुपद से विभाजित किया जाए, तो शेषफल बहुपद की घात बताइए |

45. भागफल बताइए यदि $(x^2 - 9x + 20)$ को $(x - 5)$ से विभाजित किया जाता है|

46. यदि $(x^3 + x^2 - ax + b), (x^2 - x)$ से पूरी तरह से विभाजित हो जाता है, तो a और b का मान बताइए |

47. बताइए कि बहुपद $(x^2 - 8x + 6)$ में क्या जोड़ा जाए जिससे 4 बहुपद का शून्यक बन जाए?

48. बताइए कि बहुपद$(x^3 - 3x^2 + 6x - 15)$ से क्या घटाया जाए जिससे यह $(x - 3)$ से पूरी तरह से विभाज्य हो?

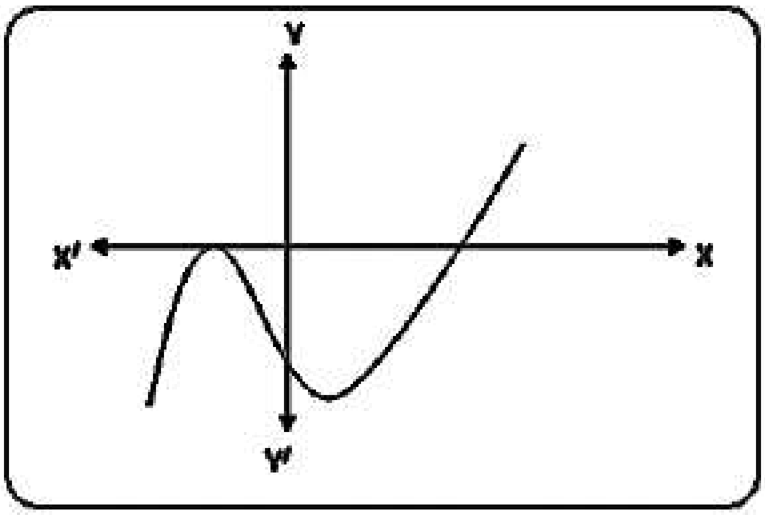
49. यदि बहुपद $(x^3 - 4x^2 - 3x + 12)$ के दो शून्यक $\sqrt{3}$ और $-\sqrt{3}$ हैं, तो इसका तीसरा शून्यक बताइए |

50. यदि $px^3 + qx^2 + rx + s, p \neq 0$ के दो शून्यको का मान 0 हैं, तो इसका तीसरा शून्यक बताइए।

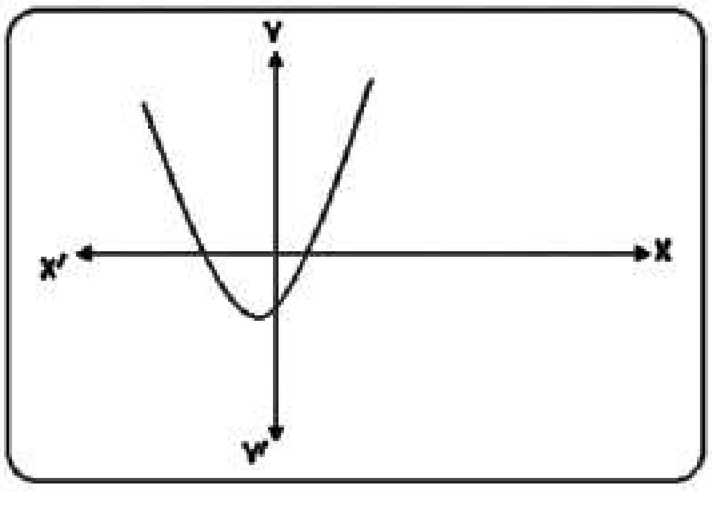
51. बहुपद $(x^3 - 5x^2 - 16x + 80)$ के शून्यक बताइए, यदि दो शून्यक बराबर हैं लेकिन विपरीत चिन्हों के हैं।

52. $(2x^2 - 4x + 5)$ के ग्राफ से प्राप्त आकृति के शीर्ष के निर्देशांक बताइए।

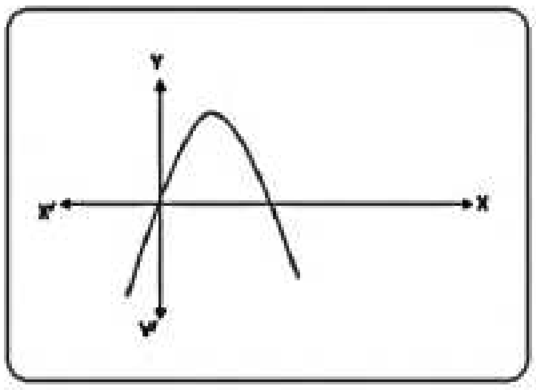
53. नीचे दिए गए ग्राफ को निरुपित करने वाले बहुपद p(x) के शून्यकों की संख्या बताइए:



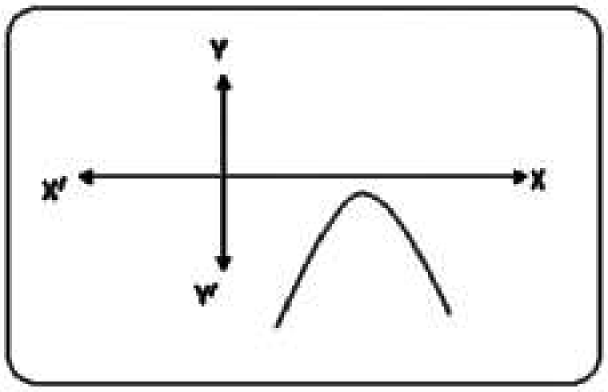
54. नीचे दिए गए ग्राफ को निरुपित करने वाले बहुपद p(x) के शून्यकों की संख्या बताइए:



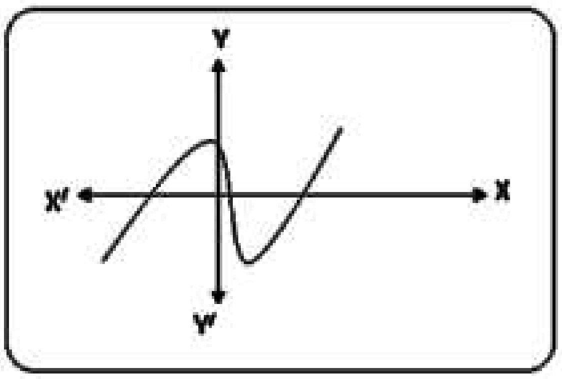
55. दिए गए ग्राफ को निरुपित करने वाले बहुपद p(x) के शून्यकों की संख्या बताइए:



56. नीचे दिए गए ग्राफ को निरूपित करने वाले बहुपद p(x) के शून्यकों की संख्या बताइए:



57. नीचे दिए गए ग्राफ को निरूपित करने वाले बहुपद p(x) के शून्यकों की संख्या बताइए:



58. यदि $(y+k)$ बहुपद $2y^2+2ky+5y+10$ का एक गुणनखंड है, तो k का मान बताइए ।

59. यदि बहुपद t^2-4t+1 का एक शून्यक $2+\sqrt{3}$ है, तो दूसरा शून्यक बताइए ।

60. अगर $p(t)=t^2+5t+10$ है, तो $p(20)+p(10)$ का मान बताइए ।

उत्तर

प्र. सं.	उत्तर	प्र. सं.	उत्तर
1.	y = -2, 4	21.	$\pm\frac{3}{2}$
2.	$t = \pm 3\sqrt{3}$	22.	$\frac{1}{18}$
3.	$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	23.	$-\frac{c}{d}$
4.	8	24.	$\frac{p}{r}$
5.	7	25.	-1
6.	$\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$	26.	$a = -2$
7.	$a > 0$	27.	$k = 9$
8.	$m = 1$	28.	-1
9.	$\sqrt{3}, \frac{1}{3}$	29.	3
10.	$k(x^2 - 2\sqrt{2}x - 16), k \neq 0$	30.	1
11.	$k(x^2 - 10x + 23), k \neq 0$	31.	$5\frac{1}{2}$
12.	$k\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{9}\right), k \neq 0$	32.	2
13.	$k(x^2 - 25), k \neq 0$	33.	$a = 3, b = 1$
14.	$k(x^2 - 4x - 1), k \neq 0$	34.	$m = 4$
15.	$k\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right), k \neq 0$	35.	$c = 1$
16.	$k(x^2 - 10x + 9), k \neq 0$	36.	$3pqr$
17.	$k(y^2 - 6y - 3), k \neq 0$	37.	$k = 2$
18.	$k(x^3 - 25x), k \neq 0$	38.	$k = 1$
19.	-2	39.	$x - 1$
20.	$-\frac{7}{16}$	40.	$x = -1$

प्र. सं.	उत्तर	प्र. सं.	उत्तर
41.	$a = -5$	51.	4, -4 and 5
42.	$x + 4$	52.	(1, 3)
43.	$x = -2$	53.	2
44.	*1 या 0 या परिभाषित नहीं*	54.	2
45.	$x - 4$	55.	2
46.	$a = 2, b = 0$	56.	0
47.	10	57.	3
48.	3	58.	k = 2
49.	4	59.	$2 - \sqrt{3}$
50.	$-\frac{q}{p}$	60.	670

अध्याय - 3

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

याद रखने योग्य बिंदु

i. दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म का मानक रूप

$a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$

जहाँ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ वास्तविक संख्याएँ हैं और $(a_1)^2 + (b_1)^2 \neq 0$ तथा $(a_2)^2 + (b_2)^2 \neq 0$ है|

ii. दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के युग्म को हल करने की विधियाँ हैं:

a) ग्राफीय विधि

b) बीजगणितीय विधि

1) प्रतिस्थापन विधि

2) विलोपन विधि

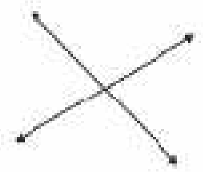
3) वज्र-गुणन विधि

iii. माना दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के युग्म है: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

यदि $\frac{a_1}{a_1} \neq \frac{b_1}{b_1}$, तब

- रैखिक समीकरणों का युग्म संगत होगा,
- रैखिक समीकरणों के युग्म से बना आलेख प्रतिच्छेदी रेखाओं को दर्शायेगा,



- रैखिक समीकरणों के युग्म का एक अद्वितीय हल होगा|

यदि $\frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{b_1} = \frac{c_1}{c_1}$, तब

- रैखिक समीकरणों का युग्म आश्रित और संगत होगा,
- रैखिक समीकरणों के युग्म से बना आलेख संपाती रेखाओं को दर्शायेगा,
- रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे|

यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, तब

- रैखिक समीकरणों का युग्म असंगत होगा,
- रैखिक समीकरणों के युग्म से बना आलेख समांतर रेखाओं को दर्शायेगा,

- रैखिक समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं होगा |

iv. यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य है, तो त्रिभुज के शीर्ष संरेखी होते हैं | यदि त्रिभुज के शीर्ष संरेखी हैं, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा |

v. विशेष स्थिति: यदि $a_1x + b_1y = 0$, $a_2x + b_2y = 0$ है तथा $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, तब $x = 0$ और $y = 0$ होगा |

vi. विशेष स्थिति: यदि $ax + by = c$, $bx + ay = d$ है, तब $x + y = \frac{c+d}{a+b}$ और $x - y = \frac{c-d}{a-b}$ होगा | इन दो समीकरणों को हल करके x और y का मान आसानी से प्राप्त किया जा सकता है |

प्रश्नावली

1. $3x + 4y = 12$ के लिए, x के संदर्भ में y का मान बताइए |
2. निर्देशांक अक्षों के साथ $px + qy = r$ के प्रतिच्छेदन बिन्दुओं के निर्देशांक बताइए|
3. वह बिंदु बताइए जहाँ रैखिक समीकरण $2x + 3y = -7$, x - अक्ष को प्रतिच्छेद करता है |
4. वह बिंदु बताइए जहाँ रैखिक समीकरण $3x - 7y = 5$, y - अक्ष को प्रतिच्छेद करता है |

5. निम्नलिखित रैखिक समीकरण युग्म के हलों की संख्या बताइए |

$2x + 4y - 16 = 0, 6x + 12y = 48$

6. निम्नलिखित रैखिक समीकरण युग्म के हलों की संख्या बताइए |

$5x + 15y = 20, 4x + 12y - 14 = 0$

7. यदि $3^{x+y} = 3^{x-y} = \sqrt{27}$ है, तो x का मान बताइए |

8. यदि दो चरों में रैखिक समीकरणों का युग्म असंगत है, तो उनके आलेख की प्रकृति बताइए |

9. समीकरणों के युग्म $x = 0$ और $x = 5$ के हलों की संख्या बताइए |

10. बताइए $y = 5$ का आलेख किस अक्ष के समांतर है?

11. निर्देशांक अक्षों पर $5x + 10y = 20$ रेखा द्वारा काटे गए अंतः खंडों का योग बताइए|

12. निर्देशांक अक्षों पर $3x + 2y = 5$ रेखा द्वारा काटे गए अंतः खंडों का योग बताइए|

13. k का वह मान बताइए जिसके लिए (6, k) समीकरण $3x + y = 22$ का एक हल है|

14. यदि $x = 4$ और $y = 3p - 1$ समीकरण $x + y = 6$ का एक हल है, तो $\frac{p+y}{2}$ का मान बताइए |

15. यदि $x = a$ और $y = b$ समीकरण $x + y = 8$ और $x - y = 2$ का एक हल है, तो a और b का मान बताइए |

16. $y = 2$ और $2x + 3y = 5$ के प्रतिच्छेदन बिंदु के निर्देशांक बताइए |

17. $x - y$ का मान बताइए यदि $x + 2y = 9$ और $x - 2y = 1$ हो |

18. यदि $2x + 3y = 0$ तथा $4x - 3y = 0$, तो $x + y$ का मान बताइए |

19. x और y का मान बताइए यदि $\sqrt{5}x + \sqrt{7}y = 0$ तथा $\sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 0$ हो |

20. $x\,y$ का मान बताइए यदि $\sqrt{a}x - \sqrt{b}y = 0$ तथा $\sqrt{b}\,x - \sqrt{a}y = 0$ हो |

21. यदि $2^x = 8^{y-1}, 9^y = 3^{x-6}$ हो, तब $x - y$ का मान बताइए |

22. $x + y$ का मान बताइए यदि $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7$ तथा $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$ हैं |

23. x और y का मान बताइए यदि $\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ तथा $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 4$ हैं |

24. x और y का मान बताइए यदि $x - y = 0.9$ तथा $\frac{11}{2(x+y)} = 11$ हैं |

25. x और y का मान बताइए यदि $31x + 29y = 89$ तथा $29x + 31y = 91$ हैं |

26. $x + y$ का मान बताइए यदि $152x - 378y = -74$ तथा

$-378x + 152y = -604$ हैं |

27. रेखाओं $x = y, y = 4$ और y - अक्ष से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल बताइए |

28. रेखाओं $x = y, x = a$ और $y = b$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल बताइए |

29. रेखा $x + y = 6$ और निर्देशांक अक्षों से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल बताइए |

30. त्रिभुज का क्षेत्रफल बताइए यदि इसके शीर्ष (3, 2), (5, 2) और (−7, 2) हैं |

31. त्रिभुज का क्षेत्रफल बताइए यदि इसके शीर्ष (3, 5), (3, −7) और (3, 0) हैं |

32. त्रिभुज का क्षेत्रफल बताइए यदि इसके शीर्ष (0, 0), (2, 2) और (4, 0) हैं |

33. त्रिभुज का क्षेत्रफल बताइए यदि इसके शीर्ष (2, 2), (4, 4) और (6, 2) हैं |

34. k का वह मान बताइए जिसके लिए निम्नलिखित समीकरण युग्म का कोई हल नहीं है : $kx + 2y - 1 = 0$ तथा $5x - 3y + 2 = 0$

35. k का वह मान बताइए जिसके लिए निम्नलिखित समीकरण युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं:

$2x + 3y - 7 = 0$ तथा $(k + 2)x - (2k + 1)y = 3(2k - 1)$

36. m का वह मान बताइए जिसके लिए निम्नलिखित समीकरण युग्म का कोई हल नहीं है: $2x + 3y - 5 = 0$ *तथा* $mx - 6y = 8$

37. उस त्रिभुज का प्रकार बताइए जिसमें $\angle A = x, \angle B = y, \angle C = y + 20°$ तथा

$y - x = 50°$ हैं |

38. $x + y$ के मान बताइए जहाँ चक्रीय चतुर्भुज ABCD के कोण हैं:

$\angle A = (6x + 10)^\circ$, $\angle B = (5x)^\circ$, $\angle C = (x + y)^\circ$, $\angle D = (3y - 10)^\circ$

39. एक त्रिभुज के कोण x, y और 40° हैं तथा $x - y = 30^\circ$ है| x और y का मान बताइए|

40. दो संपूरक कोणों में से बड़ा कोण छोटे कोण से 18° अधिक है| दोनो कोणों की माप बताइए |

41. मेघा के पर्स में केवल एक रुपये और दो रुपये के सिक्के हैं | यदि उसके पास कुल सिक्कों की संख्या 50 है और उसके पास कुल धनराशि ₹75 है, तो उसके पर्स में ₹1 और ₹2 के सिक्कों की संख्या बताइए |

42. मीना ₹2000 निकालने के लिए बैंक गई| वह कैशियर से ₹50 और ₹100 के नोट ही देने को कहती है | उसे कुल 25 नोट मिलते हैं, बताइए कि उसे ₹50 और ₹100 के कितने नोट मिले ?

43. दो अंकों की एक संख्या के अंकों का योग 9 है | यदि संख्या में 27 जोड़ दिया जाए तो संख्या के अंकों का स्थान बदल जाता है, संख्या बताइए |

44. दो संख्याओं का योग 35 है और उनका अंतर 13 है | छोटी संख्या बताइए |

45. यदि एक संख्या दूसरी संख्या की दोगुनी है और संख्याओं का योग 117 है, तो बड़ी संख्या बताइए |

46. दो संख्याओं का योग 20 है और उनका गुणनफल 75 है | उनके व्युत्क्रमों का योग बताइए |

47. दो संख्याओं का योग 20 है और उनका गुणनफल 19 है | उनका अंतर बताइए |

48. एक भिन्न के अंश और हर का योग 12 है | यदि हर में 3 जोड़ दिया जाए, तो भिन्न $\frac{1}{2}$ हो जाती है | भिन्न बताइए |

49. यदि किसी भिन्न के अंश में 2 जोड़ दिया जाए तो वह $\frac{1}{2}$ हो जाती है और यदि हर में से 1 घटा दिया जाए तो वह $\frac{1}{3}$ हो जाती है| भिन्न बताइए |

50. एक भिन्न का हर उसके अंश के दोगुने से 4 अधिक है| जब अंश और हर दोनों में से 6 घटा दिया जाता है, तो हर, अंश का 12 गुना हो जाता है| भिन्न बताइए |

51. दो संख्याएँ 3:4 के अनुपात में हैं | यदि प्रत्येक संख्या में 8 जोड़ दिया जाए, तो अनुपात 4: 5 हो जाता है| दोनों संख्याओं का योगफल बताइए |

52. 3 पुस्तकों और 4 कलमों का कुल मूल्य ₹257 है और 4 पुस्तकों और 3 कलमों का कुल मूल्य ₹324 है| दो पुस्तकों और दो कलमों का कुल मूल्य बताइए |

53. 37 मार्कर और 53 फाउंटेन पेन का कुल मूल्य ₹3200 है, जबकि 53 मार्कर और 37 फाउंटेन पेन का कुल मूल्य ₹4000 है | एक मार्कर और तीन फाउंटेन पेन का कुल मूल्य बताइए |

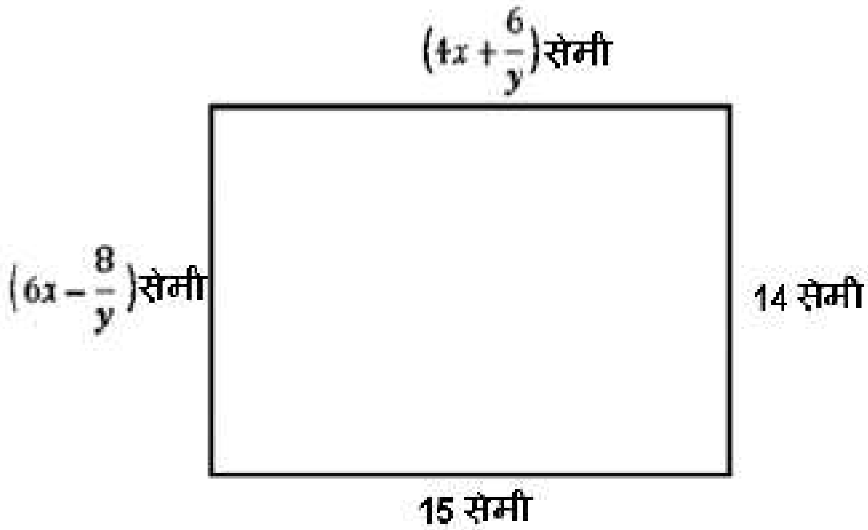
54. एक पिता की आयु उसके पुत्र की आयु की तीन गुनी है| 12 वर्ष बाद उसकी आयु अपने पुत्र की आयु की दोगुनी हो जाएगी | उनकी वर्तमान आयु बताइए |

55. एक पिता की आयु उसके दो बच्चों की आयु के योग की तीन गुनी है| 6 वर्ष बाद, उसकी आयु उसके दो बच्चों की आयु के योग की दोगुनी हो जाएगी| पिता की वर्तमान आयु बताइए |

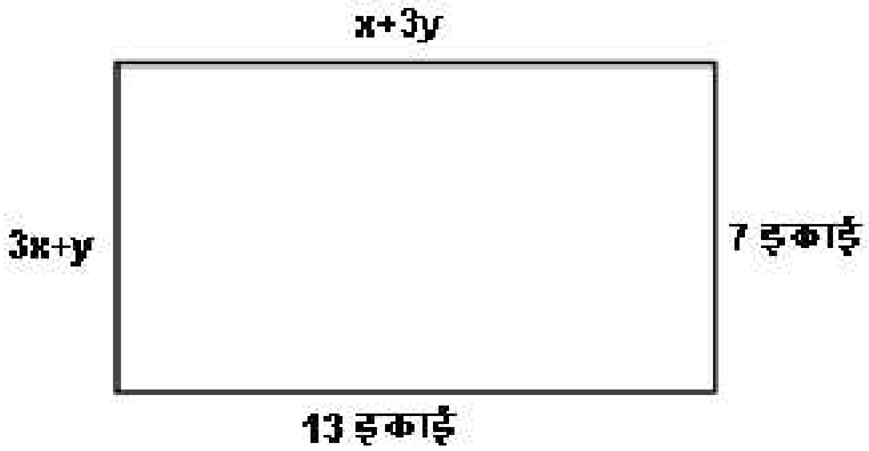
56. A और B की मासिक आय 9:7 के अनुपात में है और उनका मासिक व्यय 4:3 के अनुपात में है| यदि उनमें से प्रत्येक प्रति माह ₹1600 बचाता है, तो प्रत्येक की मासिक आय बताइए |

57. एक आयताकार बगीचे का अर्ध परिमाप 60 मीटर है| यदि इसकी लंबाई इसकी चौड़ाई से 12 मीटर अधिक है, तो बगीचे की लंबाई बताइए |

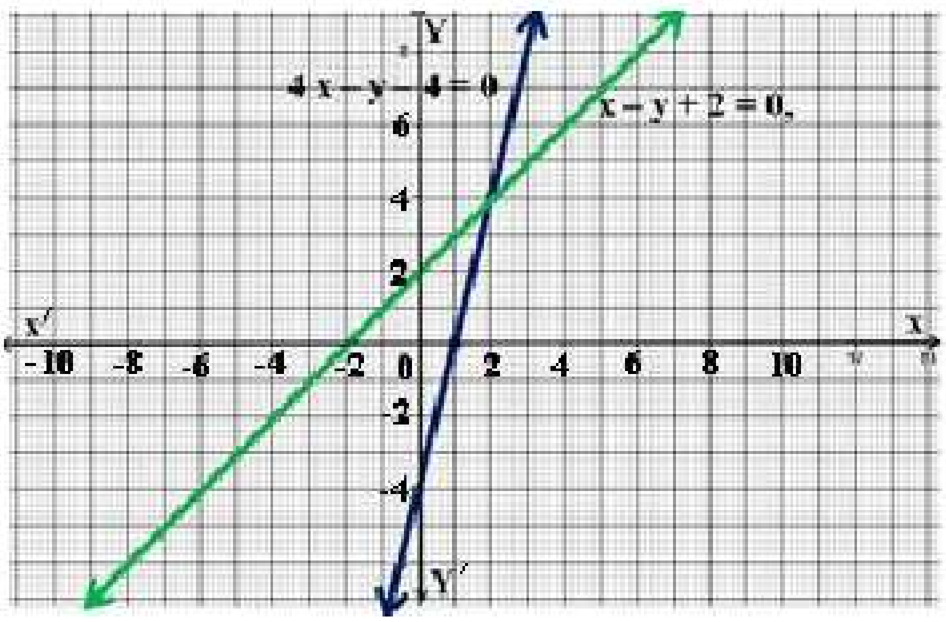
58. x और y का मान बताइए, यदि निम्न आकृति एक आयत को प्रदर्शित करती है|



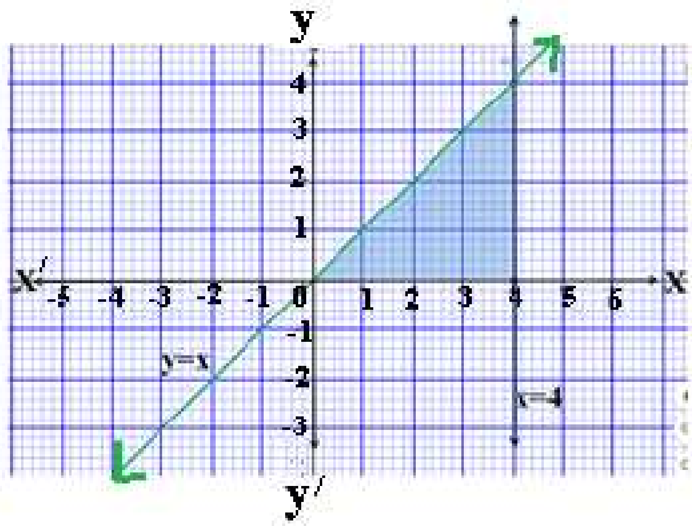
59. x और y का मान बताइए, यदि निम्न आकृति एक आयत को प्रदर्शित करती है |



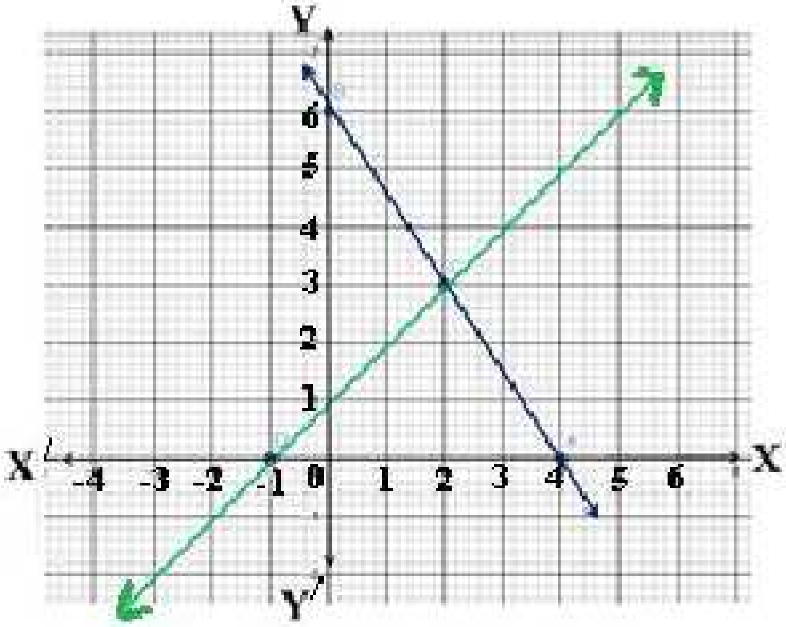
60. निम्नलिखित आकृति की सहायता से दी गई रेखाओं $x-y+2=0$, $4x-y-4=0$ और x -अक्ष द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल बताइए:



61. निम्नलिखित आकृति की सहायता से छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए |



62. निम्नलिखित आकृति की सहायता से दिए गए रैखिक समीकरणों का x - अक्ष तथा y - अक्ष के साथ बने त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात बताइए:



उत्तर

प्र.सं.	उत्तर	प्र.सं.	उत्तर
1.	$y = \frac{12-3x}{4}$	21.	15
2.	$\left(\frac{r}{p},0\right),\left(0,\frac{r}{q}\right)$	22.	25
3.	$\left(-\frac{7}{2},0\right)$	23.	$x = 2a, y = -2b$
4.	$\left(0,-\frac{5}{7}\right)$	24.	$x = 3.2, y = 2.3$
5.	अपरिमित रूप से अनेक हल	25.	$x = 1, y = 2$
6.	कोई हल नहीं	26.	$x + y = 3$
7.	$x = 1\frac{1}{2}$	27.	8 वर्ग इकाई
8.	समांतर रेखाएं	28.	$\frac{1}{2}(a-b)^2$ वर्ग इकाई
9.	कोई हल नहीं	29.	18 वर्ग इकाई
10.	x अक्ष	30.	0
11.	6 इकाई	31.	0
12.	$4\frac{1}{6}$ इकाई	32.	4 वर्ग इकाई
13.	$k = 4$	33.	4 वर्ग इकाई
14.	$1\frac{1}{2}$	34.	$k = -3\frac{1}{3}$
15.	$a = 5, b = 3$	35.	$k = 4$
16.	$\left(-\frac{1}{2},2\right)$	36.	$m \neq -4$ (m एक वास्तविक संख्या है)
17.	3	37.	सम कोण त्रिभुज
18.	0	38.	$x + y = 50$
19.	$x = 0, y = 0$	39.	$x = 85°, y = 55°$
20.	0	40.	99° और 81°

प्र.सं.	उत्तर	प्र.सं.	उत्तर
41.	₹ 1 के सिक्कों की संख्या = 25 ₹ 2 के सिक्कों की संख्या = 25	52.	₹166
42.	₹50 के 10 नोट ₹100 के 15 नोट	53.	₹110
43.	36	54.	12 वर्ष
44.	11	55.	54 वर्ष
45.	78	56.	A = ₹14,400 B = ₹11,200
46.	$\frac{4}{15}$	57.	36 मीटर
47.	18	58.	$x = 3, y = 2$
48.	$\frac{5}{7}$	59.	$x = 1$ *इकाई*, $y = 4$ *इकाई*
49.	$\frac{3}{10}$	60.	6 वर्ग इकाई
50.	$\frac{7}{18}$	61.	8 वर्ग इकाई
51.	56	62.	3 : 2

अध्याय -4

द्विघात समीकरण

याद रखने योग्य बिंदु

- द्विघात समीकरण :

  वह समीकरण जिसकी घात 2 हो द्विघात समीकरण कहलाता है |द्विघात समीकरण को एक चर x के मानक रूप में निम्न प्रकार से दर्शाया जाता है:

  $ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ है तथा $a \neq 0$|

- द्विघात समीकरण को हल करने की विधियाँ:

  i. गुणनखंड विधि

  ii. पूर्ण वर्ग बनाने की विधि

  iii. द्विघाती सूत्र

  - विविक्तकर: द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ $a \neq 0$ के लिए व्यंजक

    $D = b^2 - 4ac$ विविक्तकर कहलाता है | इसे D द्वारा दर्शाया जाता है |

  - मूलों की प्रकृति

    यदि $D = 0$ है , तो दो वास्तविक व बराबर मूल होते हैं |

    यदि $D > 0$ है , तो दो वास्तविक व भिन्न मूल होते हैं |

    यदि $D < 0$ है , तो कोई वास्तविक मूल नहीं होता|

- यदि $D \geq 0$ हो तो द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के वास्तविक मूल α, β का मान निम्न होता है

  $\alpha = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ और $\beta = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ जहाँ $a \neq 0$

- **मूलों और गुणांकों के बीच सम्बन्ध :**

  यदि α और β द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, के दो मूल है तो

  मूलों का योगफल $= \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

  मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{c}{a}$

- द्विघात समीकरण : $x^2 -$ (मूलों का योगफल) $x +$ मूलों का गुणनफल $= 0$
- यदि $x^2 - a^2 \le 0$ तो $-a \le x \le a$

  यदि $x^2 - a^2 \ge 0$ तो $x \le -a$ or $x \ge a$

प्रश्नावली

1. द्विघात समीकरण $3\sqrt{3}x^2 + 10x + \sqrt{3} = 0$ का विविक्तकर बताइए |
2. यदि समीकरण $x^2 - (k+6)x + 2(2k-3) = 0$ के मूलों का योग उनके गुणनफल के आधे के बराबर हो, तो k का मान बताइए |
3. x के मान बताइए: $x + \frac{1}{x} = 11\frac{1}{11}$
4. यदि $x^2 - x - 56 = (x+k)(x+7)$, तो k का मान बताइए |
5. k का वह मान बताइए जिसके लिए द्विघात समीकरण $kx(x-3) + 9 = 0$ के मूल समान हैं |
6. k का वह मान बताइए जिसके लिए दिए गए समीकरण के वास्तविक मूल हैं:

   $$4x^2 - 3kx + 9 = 0$$

7. k का वह मान बताइए जिसके लिए दिए गए समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है:

   $$x^2 - kx + 9 = 0$$

8. यदि $2x^2 + 3px + 4 = 0$, $x - 2$ से पूर्णतः विभाज्य है, तो p का मान बताइए|

9. k के किस मान के लिए समीकरण $3x^2 - 10x + k = 0$ के मूल एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे ?

10. z के मान बताइए यदि $z^2 + \frac{1}{z^1} = 1, z \neq 0$

11. x का मान बताइए जो समीकरण $\frac{x}{17} + 1 = \sqrt{1 + \frac{35}{289}}$ को संतुष्ट करता हो |

12. समीकरण $x^2 - 12x + p = 0$ के मूल 1:2 के अनुपात में हैं, तो p का मान बताइए |

13. यदि समीकरण $kx^2 + 6x + 4k = 0$ के मूलों का योगफल ,मूलों के गुणनफल के बराबर हो, तो k का मान बताइए |

14. k का मान बताइए, यदि दिए गए समीकरणों का एक उभयनिष्ठ मूल है:
$3x^2 + 4kx + 2 = 0$ और $x^2 + 2x + 1 = 0$

15. यदि दिए गए समीकरणों के दोनों मूल उभयनिष्ठ हैं, तो a और b का मान बताइए|

$4x^2 + 6x + b = 0$ और $2x^2 + ax - 4 = 0$

16. यदि समीकरणों $ax^2 + ax + 3 = 0$ *तथा* $x^2 + x + b = 0$ का उभयनिष्ठ मूल $x = 1$ हो, तो ab का मान बताइए |

17. यदि समीकरण $x^2 - x = \lambda(2x - 1)$ के मूलों का योगफल शून्य हो ,तो λ का मान बताइए |

18. वह स्थिति बताइए जिसके लिए समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ का एक मूल दूसरे का दुगुना है |

19. एक द्विघात समीकरण बनाइये जिसके मूल समीकरण $x^2 - 3x - 10 = 0$ के मूलों के आधे हों |

20. यदि α और β, $2x^2 + x - 6 = 0$ के मूल हैं, तो एक द्विघात समीकरण बताइए जिसके मूल 3α और 3β हैं |

21. द्विघात समीकरण बताइए जिसका एक मूल $(2 + \sqrt{7})$ है |

22. निम्न का मान बताइए:

$$\sqrt{10 + 3\sqrt{10 + 3\sqrt{10 + 3\sqrt{10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}}}}$$

23. x का मान बताइए:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 \ldots\ldots\ldots\ldots}}}}$$

24. x का मान बताइए : $\sqrt{13 - x^2} = x + 5$

25. यदि द्विघात समीकरण का एक मूल दूसरे का ऋणात्मक है ,तो समीकरण के मध्य पद का गुणांक बताइए |

26. 'p' के किस मान के लिए द्विघात समीकरण $9x^2 - 12x + p = 0$ पूर्ण वर्ग के रूप में होगा?

27. x का वह मान बताइए जो समीकरण $x + \frac{4}{x} = -4, x \neq 0$ को संतुष्ट करता हो |

28. यदि $2x^2 + (4m + 1)x + 2(2m - 1) = 0$ के मूल एक दूसरे के व्युत्क्रम हों, तो m का मान बताइए |

29. द्विघात समीकरण $5x^2 - 18x + 12 = 0$ के मूलों के गुणनफल तथा मूलों के योगफल का अनुपात बताइए |

30. द्विघात समीकरण $x^2 - 7x + 12 = 0$ के मूलों के व्युत्क्रमों का योगफल बताइए |

31. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $5 \pm \sqrt{5}$ हों ,तो a : c का मान बताइए |

32. यदि α और β, समीकरण $x^2 - 4x + k = 0$ के मूल हैं तथा $\alpha^2 + \beta^2 = 40$ है तो k का मान बताइए |

33. x के मान बताइए: $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

34. k का धनात्मक मान बताइए जिससे समीकरण $x^2 + kx + 64 = 0$ और $x^2 - 8x + k = 0$ के वास्तविक मूल हों |

35. यदि -4 द्विघात समीकरण $x^2 + px - 4 = 0$ का एक मूल है तथा द्विघात समीकरण $x^2 + px + k = 0$ के मूल समान हैं ,तो k का मान बताइए |

36. एक द्विघात समीकरण बनाइये जिसके मूल समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ के मूलों के व्युत्क्रम हों |

37. यदि द्विघात समीकरण $kx^2 - 14x + 8 = 0$ का एक मूल ,दूसरे मूल का छः गुणा हो , तो k का मान बताइए |

38. यदि α और β द्विघात समीकरण $x^2 - 4x + 3 = 0$ के मूल हो ,तो $\alpha^4\beta^2 + \alpha^2\beta^4$ का मान बताइए |

39. यदि द्विघात समीकरण $2x^2 + kx + 4 = 0$ का एक मूल 2 है ,तो दूसरा मूल बताइए |

40. यदि समीकरण $kx^2 - 3x + 9 = 0$ के मूलों का योग $-\frac{3}{7}$ है, तो इस समीकरण के मूलों का गुणनफल बताइए |

41. यदि प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग $S = \frac{n(n+1)}{2} = 66$ हो, तो n का मान बताइए |

42. यदि द्विघात समीकरण $x^2 - 5x + (3k - 3) = 0$ के मूलों का अंतर 11 हो, तो k का मान बताइए |

43. x के लिए हल कीजिये यदि $x = \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots\infty}}}$

44. एक लड़का और उसके भाई की वर्तमान आयु का योग 15 वर्ष है और उनकी वर्तमान आयु का गुणनफल 56 है, उनकी वर्तमान आयु बताइए |

45. एक प्राकृत संख्या तथा उसके व्युत्क्रम का योग $\frac{37}{6}$ है, संख्या का मान बताइए |

46. 29 को दो भागों में ऐसे बांटिये की दोनों का गुणनफल 198 हो |

47. दो संख्याओं का योग 15 है , यदि उनके व्युत्क्रमों का योग $\frac{3}{10}$ हो, तो संख्याएँ बताइए |

48. दो क्रमागत सम पूर्णांक बताइए, जिनके वर्गों का योग 340 हो |

49. एक दो अंको की संख्या, अंकों के योग के चार गुणा तथा अंकों के गुणनफल के दोगुने के बराबर हैं | संख्या बताइए |

50. यदि प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग 324 है, तो n का मान बताइए |

51. यदि किसी पूर्णांक को उसके वर्ग में जोड़ने पर 90 प्राप्त हो, तो पूर्णांक बताइए|

52. द्विघात समीकरण $ax^2 + 2bx + c = 0$ *तथा* $bx^2 - 2\sqrt{ac}x + b = 0$ के मूल समान होने की शर्त क्या होगी?

53. x के लिए हल कीजिये: $12abx^2 - (9a^2 - 8b^2)x - 6ab = 0$

54. x का मान बताइए: $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$; $x \neq 3, -5$

55. यदि समीकरण $(1 + m^2)x^2 + 2mcx + (c^2 - a^2) = 0$ के मूल बराबर हैं, तो $(1 + m^2)$ का मान बताइए |

उत्तर

प्र.सं.	उत्तर	प्र.सं.	उत्तर
1	64	28	1
2	9	29	$2:3$
3	$11, \frac{1}{11}$	30	$\frac{7}{12}$
4	-8	31	$1:20$
5	$k = 4$	32	$k = -12$
6	$k \geq 4$ या $k \leq -4$	33	$a + b, a - b$
7	$-6 < k < 6$	34	16
8	$p = -2$	35	$2\frac{1}{4}$
9	$k = 3$	36	$x^2 - 3x + 2 = 0$
10	$1, -1$	37	3
11	1	38	90
12	32	39	1
13	$-1\frac{1}{2}$	40	$-1\frac{2}{7}$
14	$1\frac{1}{4}$	41	11
15	$a = 3, b = -8$	42	-7
16	3	43	$\sqrt{2} - 1$
17	$-\frac{1}{2}$	44	7 वर्ष और 8 वर्ष
18	$2b^2 = 9ac$	45	6
19	$2x^2 - 3x - 5 = 0$	46	11, 18
20	$2x^2 + 3x - 54 = 0$	47	5, 10
21	$x^2 - 4x - 3 = 0$	48	12, 14
22	5	49	36
23	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	50	18
24	$-3, -2$	51	$-10, 9$
25	0	52	$b^2 = ac$
26	4	53	$-\frac{2b}{3a}, \frac{3a}{4b}$
27	-2	54	$-9, 7$
		55	$\frac{c^2}{a^2}$

अध्याय -5

समांतर श्रेढ़ियाँ

याद रखने योग्य बिंदु

- n पदों वाली समांतर श्रेढ़ी (A.P.) का मानक रूप

  $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ जहाँ a = प्रथम पद, d = सार्व अंतर

- समांतर श्रेढ़ी (A.P.) का nवां पद

  $$a_n \text{ या } t_n = a+(n-1)d$$

- समांतर श्रेढ़ी (A.P.) के n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

  अथवा

  $$S_n = \frac{n}{2}[a+l] \text{ जहाँ } l \text{ अंतिम पद है}$$

- एक n पदों वाली A.P. के अंत से r वां पद = आरम्भ से $(n-r+1)^{\text{वां}}$ पद

  $= a+(n-r+1-1)d = a+(n-r)d$

- अंत से r वां पद $t_r = a_n-(r-1)d$ जहाँ a_n अंतिम पद है

- यदि a, b और c A.P. में हो तो $2b = a+c$

- यदि A.P. के प्रथम तीन पदों का योगफल दिया गया हो तो हम प्रथम तीन पदों को $a-d, a, a+d$ ले सकते हैं |

- यदि A.P. के प्रथम चार पदों का योगफल दिया गया हो तो हम प्रथम चार पदों को $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ ले सकते हैं |

- यदि A.P. के प्रथम पाँच पदों का योगफल दिया गया हो तो हम प्रथम पाँच पदों को $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ ले सकते हैं |

- $n^{वाँ}$ पद (a_n) ज्ञात करना, यदि n पदों का योगफल (S_n) दिया गया हो

  $a_n = S_n - S_{n-1}$
- सार्व अंतर $d = a_{n+1} - a_n$
- यदि $a : b :: c : d$, तो a और d चरम पद तथा b और c मध्य पद कहलाते हैं और $ad = bc$ होता है|

प्रश्नावली

1. प्रथम 10 विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए|
2. समांतर श्रेढ़ी $8\frac{1}{8}, 8\frac{2}{8}, 8\frac{3}{8}, \ldots$ का सार्व अंतर बताइए |
3. समांतर श्रेढ़ी 6, 9, 12, 15,... के लिए $a_{25} - a_{15}$ का मान बताइए |
4. समांतर श्रेढ़ी 4,9,14,...का सार्व अंतर बताइए | यदि पहला पद बदल कर 6 हो जाता है और सार्व अंतर वही रहता है, तो नई समांतर श्रेढ़ी का तीसरा पद बताइए |
5. यदि $8x + 9, 6x - 2, 2x - 7$ समांतर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद हों, तो x का मान बताइए |
6. एक समांतर श्रेढ़ी 5, 8, 11,... में 40 पद हैं | अंतिम 10 पदों का योग बताइए |
7. k के किस मान के लिए $k + 9, 2k - 1$ और $2k + 7$ एक समांतर श्रेढ़ी के क्रमागत पद हैं |
8. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग $S_n = 5n^2 + 2n$ हो ,तो दूसरा पद बताइए |
9. समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर बताइए

$$\frac{1}{p}, \frac{1-p}{p}, \frac{1-2p}{p}, \ldots$$

10. समांतर श्रेढ़ी 6, 13, 20,...,216 का मध्य पद बताइए |

11. यदि $\frac{1}{x+2}, \frac{1}{x+3}, \frac{1}{x+5}$ समांतर श्रेढ़ी में हों ,तो x का मान बताइए |

12. यदि x, 13, y, 3 समांतर श्रेढ़ी में हों , तो $x + 2y$ का मान बताइए |

13. उस समांतर श्रेढ़ी का 5वाँ पद बताइए जिसका nवाँ पद $3n - 5$ है|

14. p के किस मान के लिए $\frac{4}{5}$, p और 2 एक समांतर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद हैं |

15. प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं का योग बताइए |

16. यदि प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं का योग प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं के योग का k गुना हो, तो k का मान बताइए |

17. यदि 18, a, b, -3 समांतर श्रेढ़ी में हों, तो a+b का मान बताइए |

18. यदि 4, a_2, a_3, a_4, 28 समांतर श्रेढ़ी में हों, तो a_4 का मान बताइए |

19. किसी समांतर श्रेढ़ी का चौथा पद 11 है| समांतर श्रेढ़ी के पांचवें और सातवें पदों का योग 34 है| इसका सार्व अंतर बताइए |

20. यदि संख्याएँ a, b, c, d और e समांतर श्रेढ़ी में हो तो $a - 4b + 6c - 4d + e$ का मान बताइए |

21. यदि समांतर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद a-d, a, a + d हों, जिनका योग 33 तथा सार्व अंतर 5 हो ,तो तीनों पद बताइए |

22. यदि a, b, c समांतर श्रेढ़ी में हों, तो $(a + 2b - c)(2b + c - a)(c + a - b)$ का मान बताइए |

23. यदि एक समकोण त्रिभुज की भुजाएं समांतर श्रेढ़ी में हों, तो उसकी भुजाओं का अनुपात बताइए |

24. एक समांतर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पदों का योग 24 हो, तो उसका मध्य पद बताइए |

25. यदि समांतर श्रेढ़ी के प्रथम पाँच क्रमागत पदों का योग 115 हो, तो उसका तीसरा पद बताइए |

26. एक त्रिभुज के कोण समांतर श्रेढ़ी में हैं ,यदि सबसे छोटा कोण $40°$ का हो तो सबसे बड़े कोण का माप बताइए |

27. एक चतुर्भुज के कोण समांतर श्रेढ़ी में हैं, जिनका सार्व अंतर $10°$ है| सबसे छोटे और सबसे बड़े कोण का योग बताइए |

28. दी गई श्रृंखला के n पदों का योग बताइए:

$$\left(4-\frac{1}{n}\right)+\left(4-\frac{2}{n}\right)+\left(4-\frac{3}{n}\right)+\cdots$$

29. a, b और c का मान बताइए यदि a, 7, b, 23, c समांतर श्रेढ़ी में हों |

30. 16 को चार भागों में इस प्रकार बाँटिए कि वह समांतर श्रेढ़ी में हों तथा इस श्रेढ़ी के चरम पदों का गुणनफल इसके मध्य पदों के योग से एक कम हो |

31. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 7 पदों का योग 49 है तथा 17 पदों का योग 289 है, तो इस समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग बताइए |

32. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 3 पद b, c और 2b हो तो b और c का अनुपात बताइए |

33. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम m और n पदों के योग का अनुपात $m^2:n^2$ है, तो इसके m वें और n वें पदों का अनुपात बताइए |

34. यदि समांतर श्रेढ़ी के 3 क्रमागत पदों का योग 12 है और उनके घनों का योग 288 है, तो उन तीन पदों का मान बताइए |

35. दो अंको की कितनी प्राकृत संख्याएँ हैं जिन्हें 3 से भाग देने पर शेषफल 1 आएगा ?

36. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी में m पदों का योग n पदों के योग के बराबर हो, तो इसके $(m + n)$ पदों का योग बताइए |

37. यदि $X = 1 - 6 + 2 - 7 + 3 - 8 + \cdots 100$ पदों तक, तो X का मान बताइए |

38. समांतर श्रेढ़ी $52, 48, 44, \ldots$ का कौन सा पहला पद ऋणात्मक होगा?

39. यदि आप अपने जेब खर्च में से पहले दिन ₹ 1, दूसरे दिन ₹ 2, तीसरे दिन ₹ 3 इसी क्रम में रुपए बचाते हो ,तो फरवरी 2024 में आप कुल कितने रुपए की बचत करेंगे?

40. 3 अंकों की एक धनात्मक संख्या के अंक समांतर श्रेढ़ी में हैं और उनका योग 15 है | अंकों को उलटने से प्राप्त संख्या मूल संख्या से 594 कम है | मूल संख्या बताइए |

41. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद q तथा q वाँ पद p हो तो इस श्रेढ़ी का n वाँ पद बताइए |

42. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का m वाँ पद $\frac{1}{n}$ तथा n वाँ पद $\frac{1}{m}$ हो ,तो इसका (mn) वाँ पद बताइए |

43. तीन समांतर श्रेढ़ी के पहले n पदों का योग क्रमशः S_1, S_2 और S_3 है| प्रत्येक समांतर श्रेढ़ी के पहले पद क्रमशः 1, 2 और 3 है | $S_1 + S_2 - S_3$ का मान बताइए|

44. समांतर श्रेढ़ी : 8, 10, 12.......में 60 पद हैं | अंतिम 10 पदों का योग बताइए |

45. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम पद और अंतिम पद क्रमशः 8 और 65 हैं | यदि इसके सभी पदों का योग 730 है, तो इसका सार्व अंतर बताइए |

46. किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग $5n - n^2$ है | इस समांतर श्रेढ़ी का $n^{वाँ}$ पद बताइए |

47. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का सातवाँ पद $\frac{1}{9}$ है और उसका नौवाँ पद $\frac{1}{7}$ है, तो उसका $63^{वाँ}$ पद बताइए |

48. 1 और 100 के बीच सभी विषम पूर्णांकों का योग बताइए जो 3 से विभाज्य हैं |

49. 101 और 999 के बीच उन प्राकृत संख्याओं की संख्या बताइए जो 2 और 5 दोनों से विभाज्य हैं |

50. एक विद्यालय के छात्रों को उनके शैक्षणिक प्रदर्शन के लिए 10 नकद पुरस्कार देने के लिए ₹1500 की राशि का उपयोग किया जाना है| यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने पिछले पुरस्कार से ₹20 कम है, तो प्रथम पुरस्कार का मूल्य बताइए |

उत्तरमाला

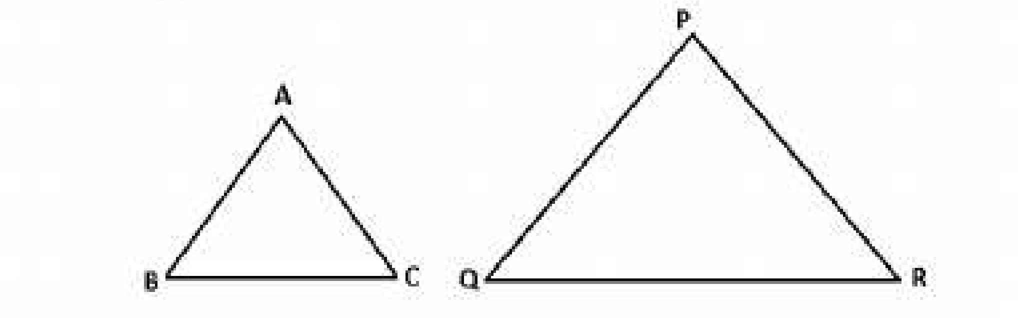
प्र.सं.	उत्तर	प्र.सं.	उत्तर
1	100	26	80°
2	$\frac{1}{8}$	27	180°
3	30	28	$\frac{1}{2}(7n-1)$
4	$d=5, a_3=16$	29	a = -1, b = 15, c = 31
5	3	30	1, 3, 5, 7
6	1085	31	n^2
7	18	32	2:3
8	17	33	$\frac{2m-1}{2n-1}$
9	-1	34	2,4,6
10	111	35	30
11	1	36	0
12	34	37	-250
13	10	38	15 वाँ पद
14	$1\frac{2}{5}$	39	₹ 435
15	$\frac{n(n+1)}{2}$	40	852
16	$\frac{n+1}{n}$	41	$p+q-n$
17	15	42	1
18	22	43	0
19	3	44	1170
20	0	45	3
21	6,11,16	46	6-2n
22	4abc	47	1
23	3:4:5	48	867
24	8	49	89
25	23	50	₹240

अध्याय-6

त्रिभुज

याद रखने योग्य बिंदु

- दो त्रिभुज समरूप होंगे यदि उनके संगत कोण बराबर और संगत भुजाएं समान अनुपात में हो |

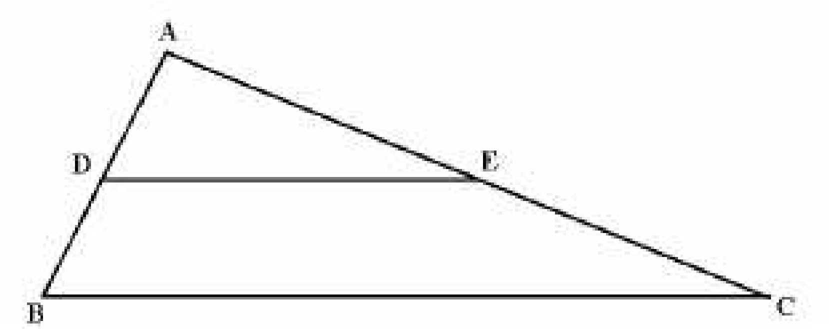


$\Delta ABC \sim \Delta PQR \Rightarrow \angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ और $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

- समरूपता की कसौटियाँ : (a) AAA या AA (b) SSS (c) SAS

- आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (BPT) या थेल्स प्रमेय:

यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर एक रेखा खींची जाए जो अन्य दो भुजाओं को भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर काटती हैं, तो ये अन्य भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं |

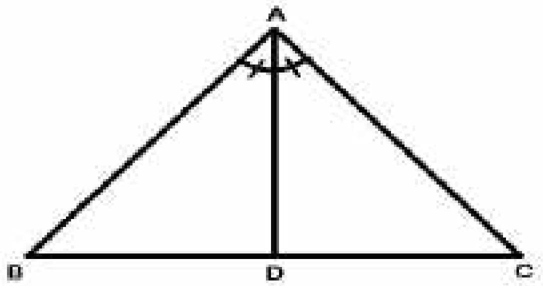


यदि ΔABC में $DE \parallel BC$ हो तो,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ या } \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC} \text{ या } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

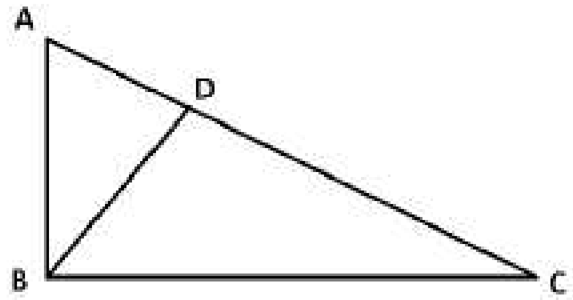
- **यदि** $\Delta ABC \sim \Delta PQR \Rightarrow \frac{\text{क्षेत्रफल}(\Delta ABC)}{\text{क्षेत्रफल}(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$

- ΔABC **में , यदि** AD **कोण समद्विभाजक है , तो** $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

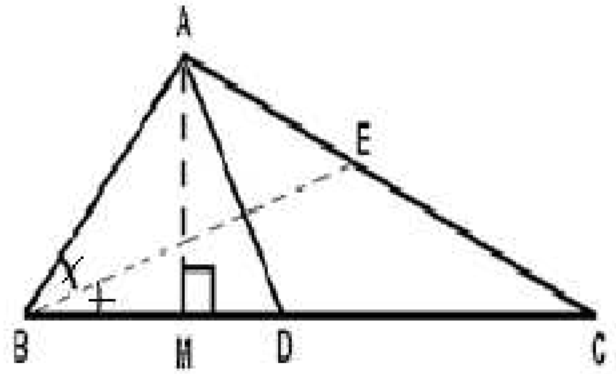


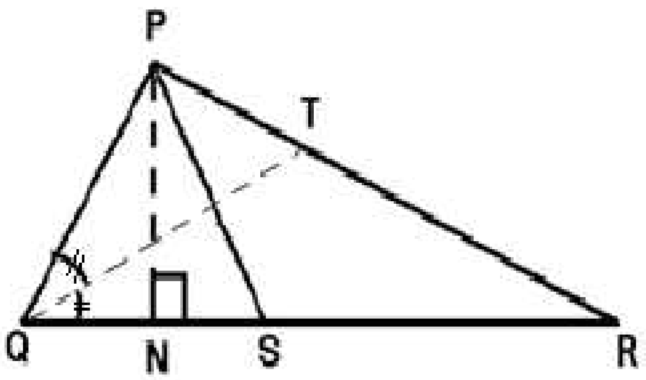
- ΔABC मे यदि, $\angle B = 90°$ हो तो $AC^2 = AB^2 + BC^2$(**पाइथागोरस प्रमेय)**

- ΔABC मे, $\angle B = 90°$ **और** $BD \perp AC$ हो तो, $\Delta ABD \sim \Delta ACB \sim \Delta BCD$



- **यदि दो त्रिभुज समरूप हो तो उनके परिमाप ,माध्यिका , शीर्ष लम्ब और कोण समद्विभाजक समान अनुपात में होंगे|**
- **दो समरूप त्रिभुजों का क्षेत्रफल उनकी संगत भुजाओं ,लम्ब ,माध्यिका , परिमाप और कोण समद्विभाजक के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है|**



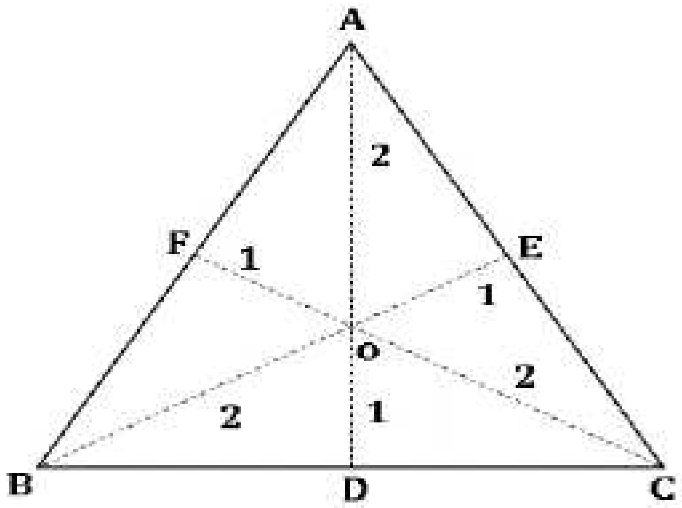


- **उदाहरण: यदि** $\Delta ABC \sim \Delta PQR \Rightarrow \frac{\text{परिमाप}(\Delta ABC)}{\text{परिमाप}(\Delta PQR)} = \frac{AD}{PS} = \frac{AM}{PN} = \frac{BE}{QT}$ **और**

$$\frac{\text{क्षेत्रफल}(\Delta ABC)}{\text{क्षेत्रफल}(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AD^2}{PS^2} = \frac{AM^2}{PN^2} = \frac{(\Delta ABC \text{ के परिमाप})^2}{(\Delta PQR \text{ के परिमाप})^2} = \frac{BE^2}{QT^2}$$

- **केन्द्रक ,माध्यिका को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है :**

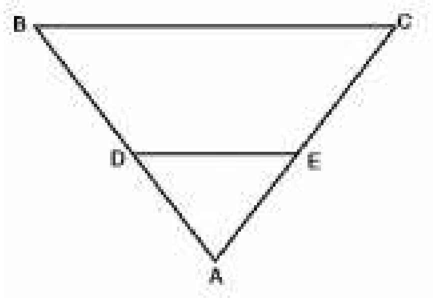
$$\frac{AO}{OD} = \frac{BO}{OE} = \frac{CO}{OF} = \frac{2}{1}$$



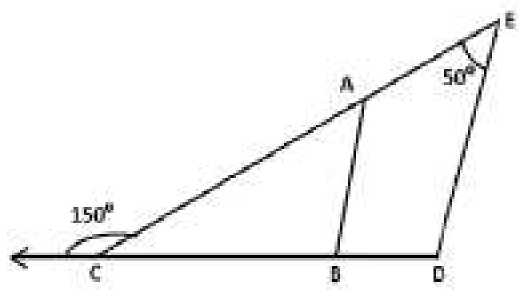
प्रश्नावली

1. त्रिभुज ABC में, DE ∥ BC है, BC=8 सेमी, AB=6 सेमी और DA=1.5 सेमी है |

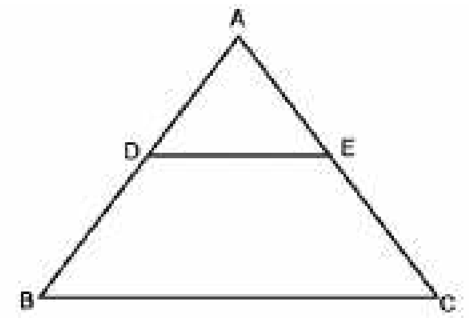
   DE की माप बताइए |



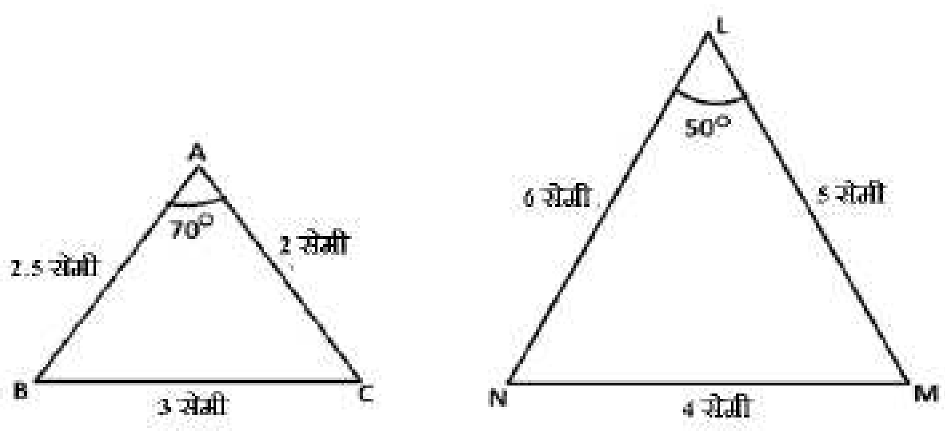
2. आकृति में, ΔACB~ΔECD, ∠ABC का माप बताइए |



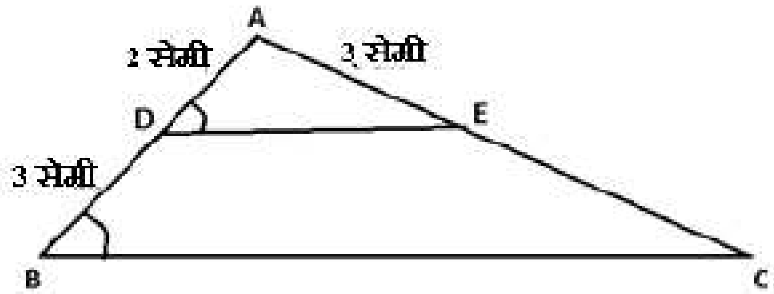
3. त्रिभुज ABC में, D और E क्रमशः AB और AC पर इस प्रकार स्थित हैं कि DE ∥ BC है| अगर $AD = \frac{1}{3}BD$ और AE= 4.5 सेमी, तो AC का मान बताइए |



4. आकृति में ∠M तथा ∠N का मान बताइए |



5. आकृति में, $\angle ADE = \angle ABC$ हो, तो CE का मान बताइए |



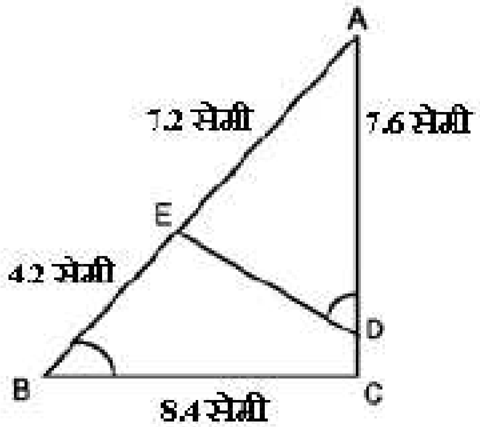
6. दो समरूप त्रिभुज ΔABC तथा ΔBDE इस प्रकार हैं कि D, BC का मध्य बिंदु है, ΔABC तथा ΔBDE के क्षेत्रफलों का अनुपात बताइए |

7. एक वर्ग का परिमाप बताइए जिसका विकर्ण 10 सेमी है|

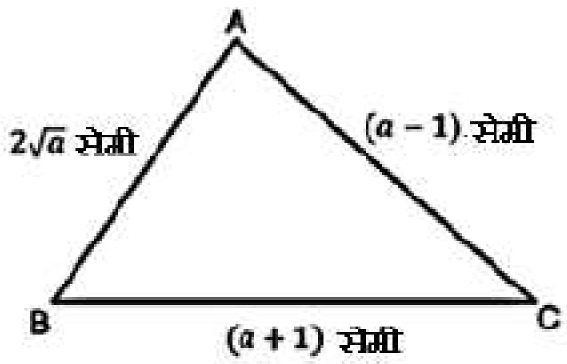
8. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, AB = 4 सेमी , DE = 6 सेमी, EF= 9 सेमी तथा FD = 12 सेमी हो, तो ΔABC का परिमाप बताइए |

9. 24 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के लम्ब का माप बताइए |

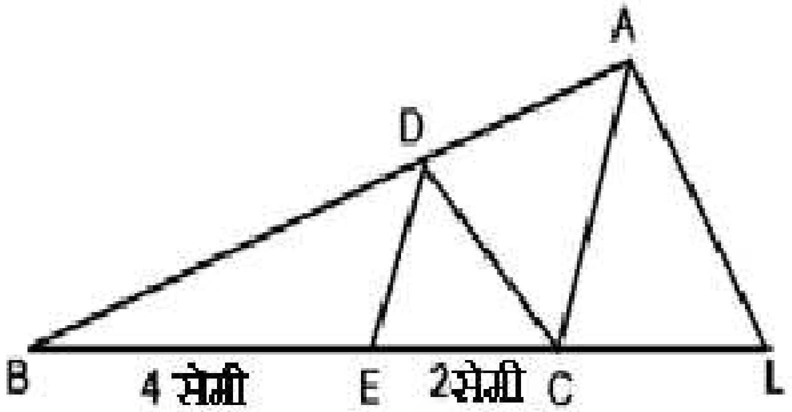
10. त्रिभुज ABC में, $\angle ADE = \angle ABC$, DE का मान बताइए |



11. त्रिभुज ABC में, $\angle BAC$ का मान बताइए |



12. दी गई आकृति में, CD || LA और DE || AC है| CL का मान बताइए |

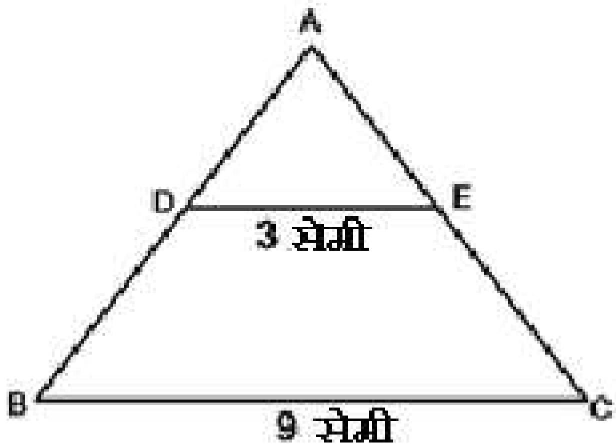


13. a का मान ज्ञात कीजिए यदि a सेमी , a−1 सेमी और a + 8 सेमी एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई है, जहाँ a एक प्राकृत संख्या है |

14. क्रमशः 55 मी और 34 मी उंचाई वाले एक टावर और एक ईमारत के बीच कि दूरी ज्ञात कीजिए, ताकि उनके शीर्ष के बीच कि दूरी 29 मी हो |

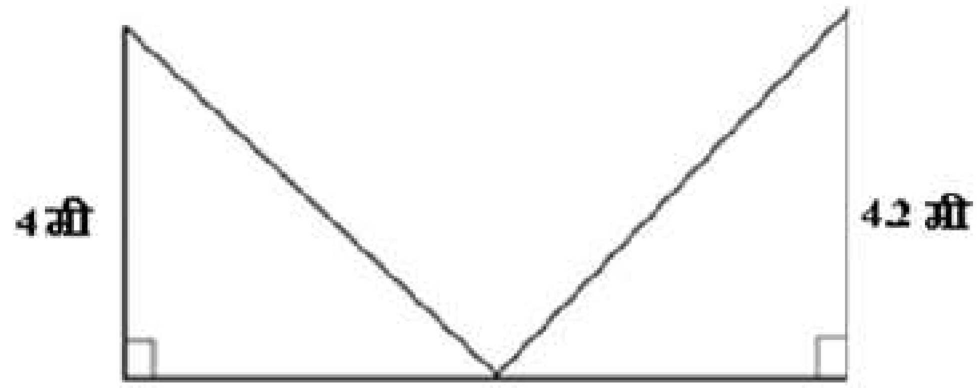
15. यदि $\Delta PQR \sim \Delta ABC$,PQ : AB = 3 : 4 तथा ΔPQR का क्षेत्रफल 216 वर्ग सेमी हो , तो ΔABC का क्षेत्रफल बताइए |

16. त्रिभुज ABC में, DE‖BC और क्षे.(ΔADE) = 30 वर्ग सेमी है, तो समलंब BCED का क्षेत्रफल बताइए |

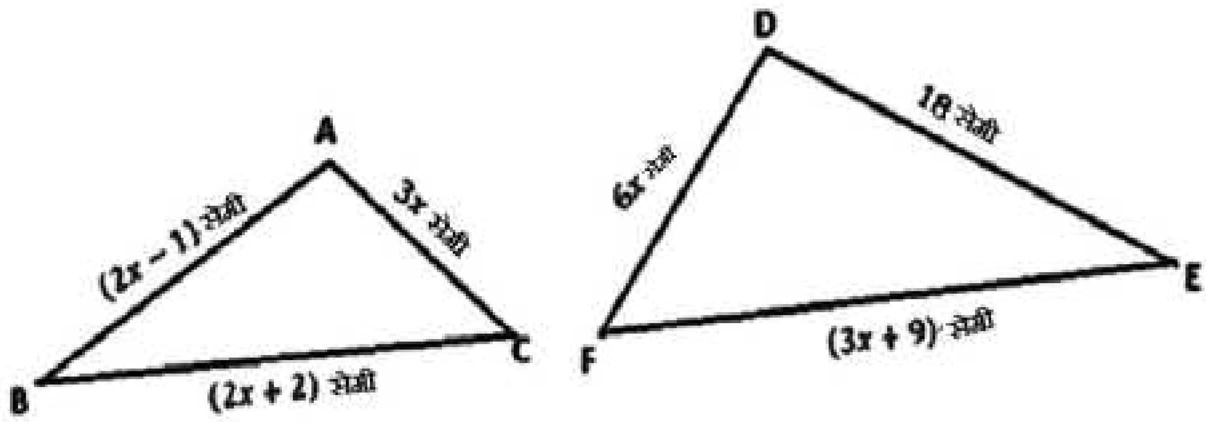


17. एक सड़क के दोनों ओर दो इमारतों की दीवारें एक दूसरे के समांतर हैं | 5.8 मी लम्बी एक सीढ़ी सड़क पर इस प्रकार रखी गई है कि इसका शीर्ष 4मी की ऊँचाई पर एक इमारत की खिड़की तक पहुँचती है| सीढ़ी को सड़क के दूसरी

ओर मोड़ने पर, इसका शीर्ष 4.2मी की ऊँचाई पर दूसरी इमारत की खिड़की को छूता है| सड़क की चौड़ाई बताइए |

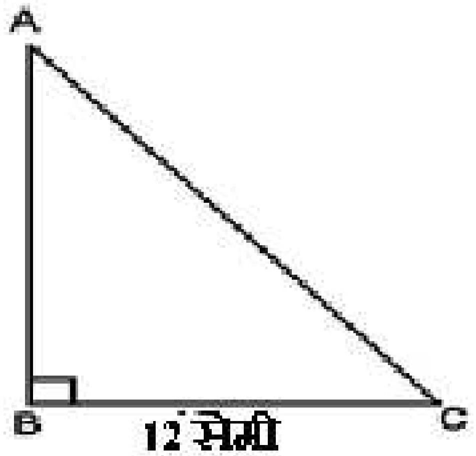


18. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ हो तो x का मान बताइए |

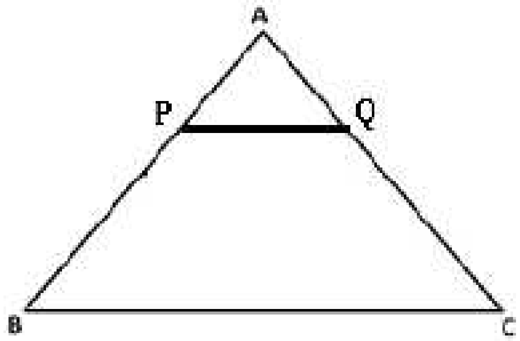


19. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज में कर्ण का माप $5\sqrt{2}$ सेमी हो तो त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई बताइए |

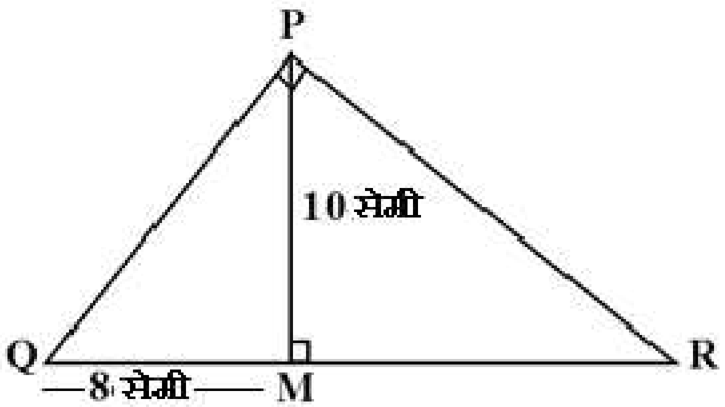
20. यदि क्षे.$(\Delta ABC) = 210$ वर्ग सेमी हो, तो AC का माप बताइए |



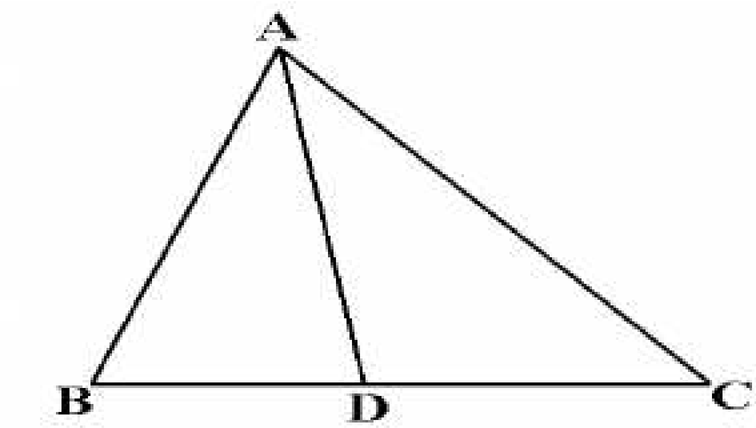
21. आकृति में ,PQ∥BC तथा $AP:PB = 1:2$ हो तो ΔAPQ तथा ΔABC के परिमापों का अनुपात बताइए |



22. त्रिभुज PQR में ,$\angle QPR = 90^\circ$, $PM \perp QR$ और QM=8 सेमी है| QR का मान बताइए |



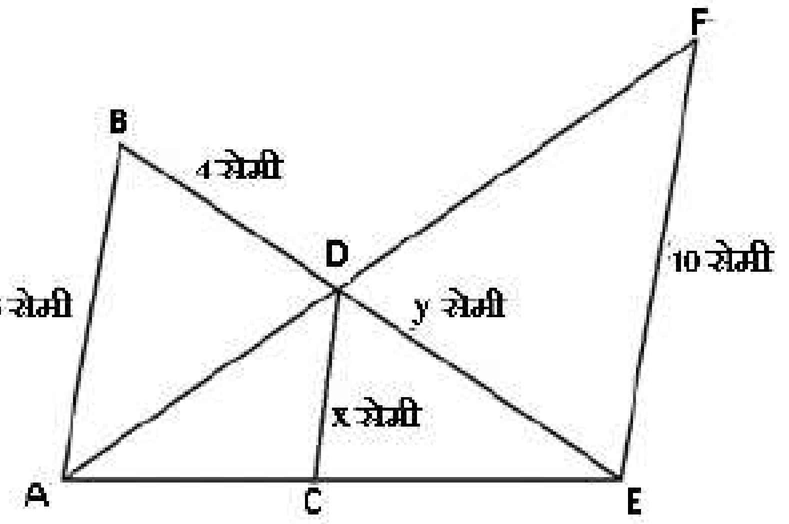
23. ΔABC में $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ है |यदि $\angle B = 70^\circ$ तथा $\angle C = 50^\circ$ हो, तो $\angle BAD$ का मान बताइए |



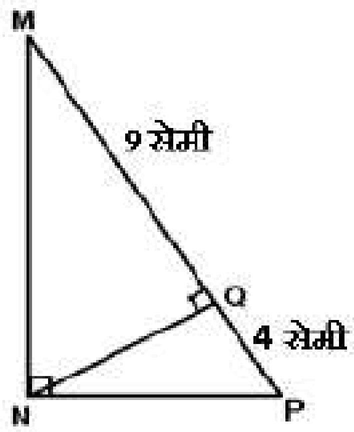
24. एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप बताइए जिसकी ऊँचाई $\sqrt{3}$ सेमी हो |

25. आकृति में AB‖CD‖EF, AB = 6 सेमी , CD = x सेमी, EF = 10 सेमी ,

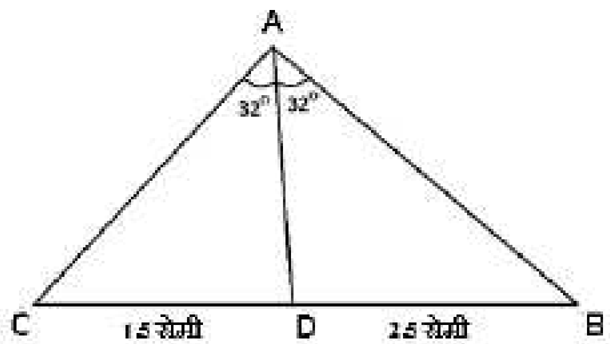
BD = 4 सेमी तथा DE = y सेमी हो, तो x तथा y का मान बताइए |



26. दी गई आकृति में $\angle MNP = 90^\circ$ और $NQ \perp MP$ है| NQ का माप बताइए |

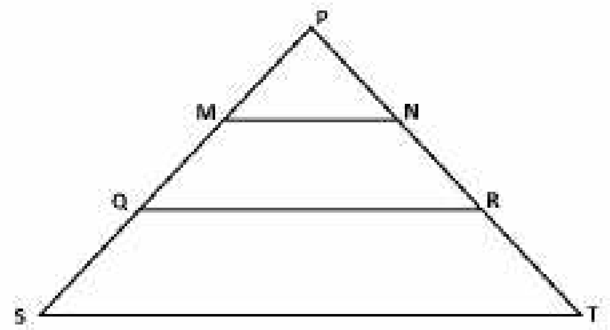


27. आकृति में $\frac{AB}{AC}$ का मान बताइए |



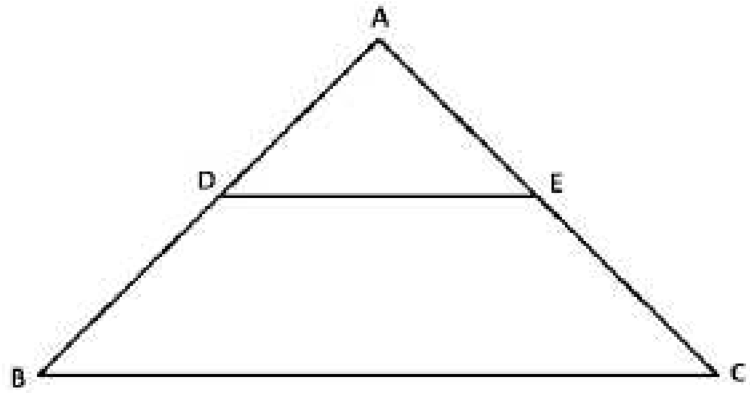
28. त्रिभुज ΔABC एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है जिसमे $\angle B = 90°$ है| बिंदु P, BC पर इस प्रकार है कि $PC = \frac{1}{3}BC$ है| यदि AB=6 सेमी है, तो AP का माप बताइए |

29. आकृति में $\angle S = \angle PRQ$ तथा $MN \parallel QR$, यदि $\frac{PS}{PT} = \frac{2}{3}$ हो तो $\frac{PN}{PM}$ का मान बताइए |

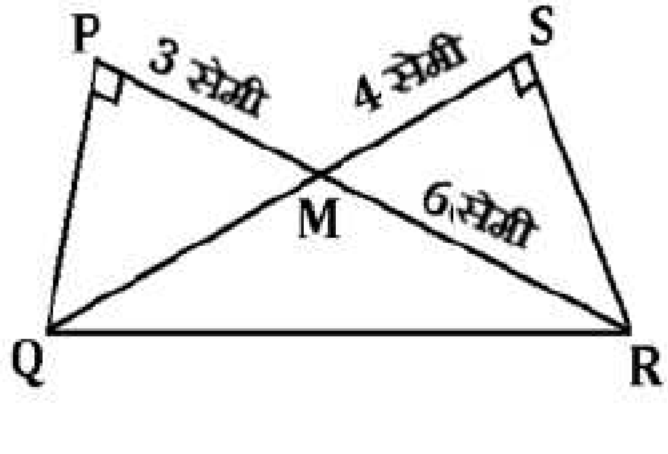


30. आकृति में $DE \parallel BC$ तथा AD:DB=2:3,

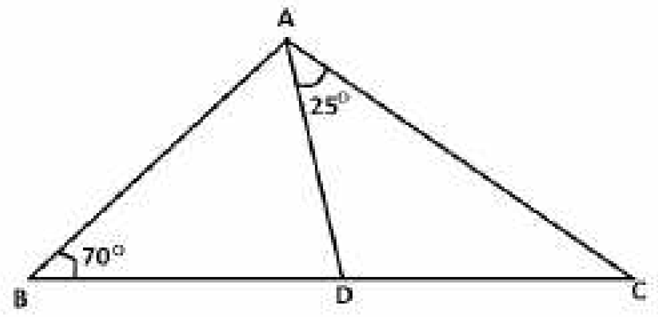
क्षेत्रफल (ΔADE): क्षेत्रफल (ΔABC) बताइए |



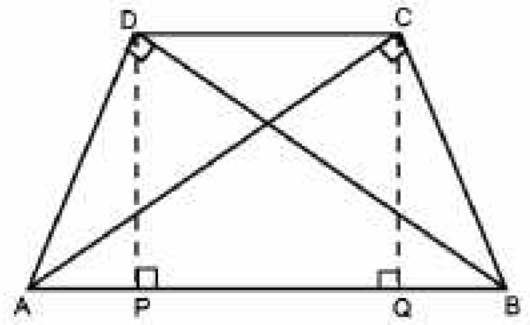
31. दी गई आकृति में MQ का माप बताइए |



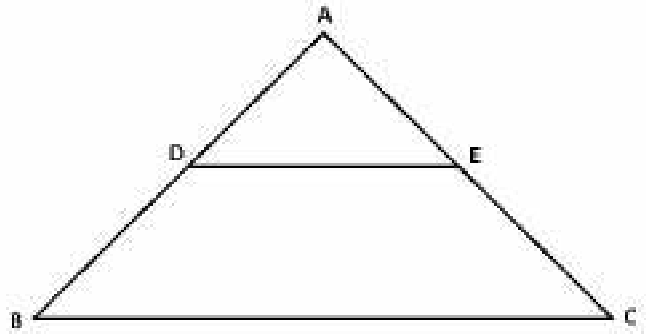
32. आकृति में यदि $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ हो, तो $\angle ACD$ का मान बताइए |



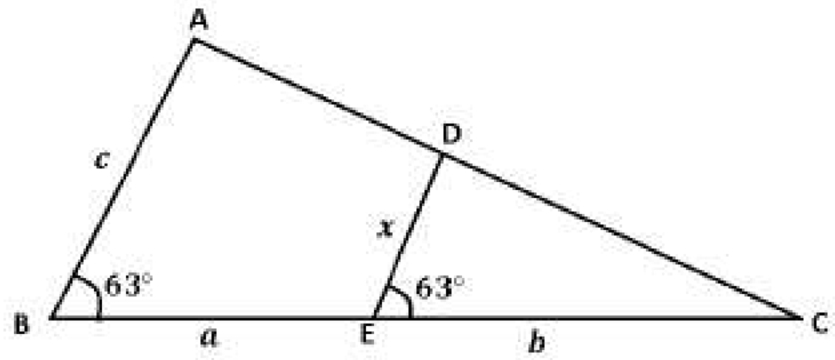
33. समलंब ABCD में, $AB \parallel DC$, $BD \perp AD$ तथा $AC \perp BC$ है|यदि AD=15 सेमी, BC = 15 सेमी और AB = 25 सेमी है, तो क्षे.(समलंब ABCD) बताइए |



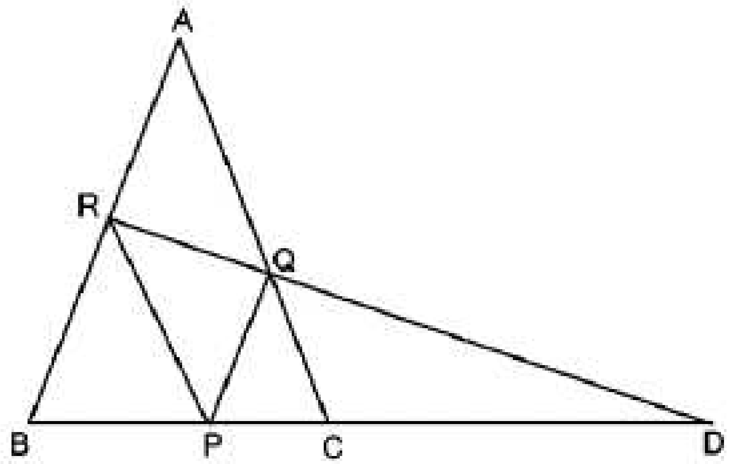
34. दी गई आकृति में $DE \parallel BC$,AD = 4BD तथा AC = 1.6 सेमी हो तो AE का माप बताइए |



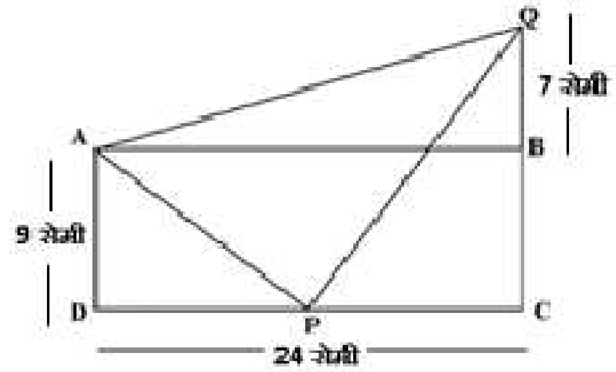
35. दी गई आकृति से, x का मान a, b तथा c के रूप में व्यक्त कीजिये|



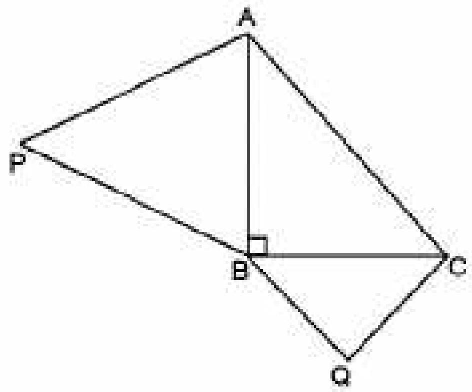
36. दी गई आकृति में, PQ ∥ BA और PR ∥ CA| यदि PD = 12 सेमी हो, तो $BD \times CD$ का मान बताइए |



37. दी गई आकृति में ABCD एक आयत है | यदि P, DC का मध्य बिंदु है, तो $\angle APQ$ का मान बताइए |

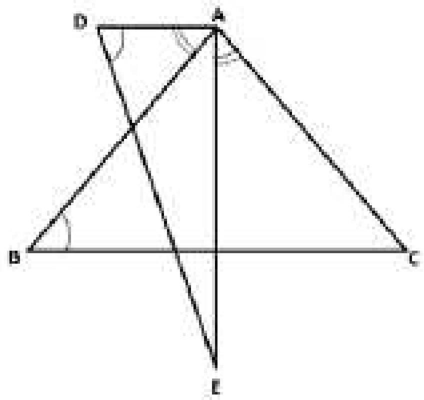


38. एक समकोण त्रिभुज ABC के लम्ब और आधार पर समबाहु त्रिभुज बनाए गए हैं | यदि क्षे.$(\Delta PAB) = 9\sqrt{3}$ वर्ग सेमी और क्षे.$(\Delta BQC) = 16\sqrt{3}$ वर्ग सेमी है, तो AC माप बताइए |

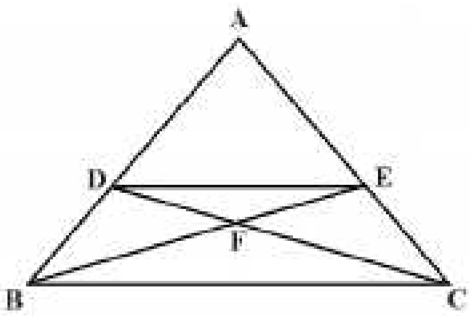


39. यदि एक समबाहु त्रिभुज में माध्यिका की लंबाई $\sqrt{3}$ सेमी है, तो समबाहु त्रिभुज की भुजा की लंबाई बताइए |

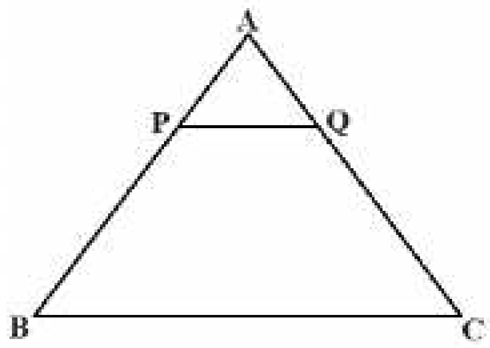
40. आकृति में ,$\angle BAD = \angle CAE$ तथा $\angle ADE = \angle ABC$ है |यदि AC:BC = 3:2 हो तो DE:AE का मान बताइए |



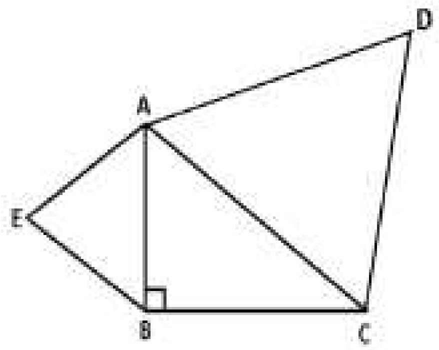
41. आकृति में यदि DE‖BC तथा AD:DB=5:4 हो, तो $\frac{\text{क्षेत्रफल}(\Delta DFE)}{\text{क्षेत्रफल}(\Delta CFB)}$ का मान बताइए |



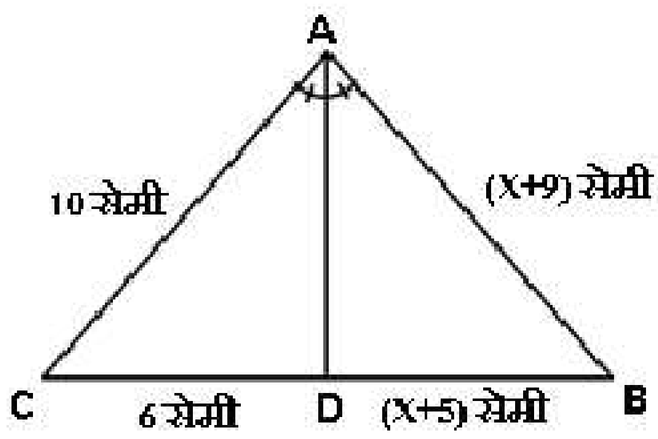
42. त्रिभुज ABC में रेखा PQ‖BC तथा AP : PB = 3 : 7 है |यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 100 वर्ग सेमी हो तो समलम्ब चतुर्भुज PQCB का क्षेत्रफल बताइए |



43. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $\angle B = 90°$ तथा भुजा AB व AC पर दो समद्विबाहु त्रिभुज बनाये गए हैं | $\frac{\text{क्षेत्रफल}\,(\Delta ABE)}{\text{क्षेत्रफल}\,(\Delta ACD)}$ का मान बताइए|



44. यदि त्रिभुज ΔABC में $\angle CAD = \angle BAD$ है, तो x का मान बताइए |



45. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ में, AB = 9.1 सेमी तथा DE = 6.5 सेमी है |यदि त्रिभुज DEF का परिमाप 25 सेमी हो, तो त्रिभुज ABC का परिमाप बताइए|

46. 6 मी लंबाई की एक उर्ध्वाधर मीनार ज़मीन पर 4 मी लम्बी छाया बनाती है और उसी समय पर एक टॉवर 28 मी लम्बी छाया बनाता है| मीनार की ऊँचाई बताइए |

47. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ इस प्रकार है कि क्षेत्रफल$(\Delta ABC) = 4$ क्षेत्रफल (ΔPQR)| यदि

BC = 12 सेमी हो तो QR का माप बताइए|

48. एक सीढ़ी एक दीवार के साथ इस प्रकार खड़ी है कि उसका पाद दीवार से 6 मीटर की दूरी पर है तथा उसका ऊपरी सिरा एक 8 मीटर की ऊँचाई पर स्थित खिड़की तक पहुँचता है| सीढ़ी को इस प्रकार सरकाया जाता है कि उसका पाद दीवार से 8 मीटर की दूरी पर हो तो बताइए कि सीढ़ी का ऊपरी सिरा दीवार पर किस ऊँचाई तक पहुंचेगा?

49. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में , AB = AC = 25 सेमी तथा BC = 14 सेमी हो तो शीर्ष A से BC पर डाले गए लम्ब की माप बताइए |

50. त्रिभुज ABC में $\angle A = 90°$,AB = 5 सेमी तथा AC = 12 सेमी है |यदि $AD \perp BC$ हो तो AD का माप बताइए |

उत्तर

प्र. सं.	उत्तर	प्र. सं.	उत्तर
1	2 सेमी	26	6 सेमी
2	100°	27	$1\frac{2}{3}$
3	18 सेमी	28	$2\sqrt{13}$ सेमी
4	∠M=70°,∠N=60°	29	$\frac{2}{3}$
5	4.5 सेमी	30	4:25
6	4:1	31	4.5 सेमी
7	$20\sqrt{2}$ सेमी	32	60°
8	18 सेमी	33	192 वर्ग सेमी
9	$12\sqrt{3}$ सेमी	34	1.28 सेमी
10	5.6 सेमी	35	$\frac{bc}{a+b}$ इकाई
11	90°	36	144 वर्ग सेमी
12	3 सेमी	37	90°
13	21	38	10 सेमी
14	20 मी	39	2 सेमी
15	384 वर्ग इकाई	40	2:3
16	240 वर्ग सेमी	41	$\frac{25}{81}$
17	8.2 मी	42	91 वर्ग सेमी
18	x=5	43	1:2
19	5 सेमी	44	1
20	37 सेमी	45	35 सेमी
21	$\frac{1}{3}$	46	42 सेमी
22	20.5 सेमी	47	6 सेमी
23	30°	48	6 मी
24	6 सेमी	49	24 सेमी
25	x=3.75 , y= 6.67	50	$4\frac{8}{13}$ सेमी

अध्याय 7

निर्देशांक ज्यामिति

याद रखने योग्य बिंदु

- एक तल पर किसी भी बिंदु की स्थिति का पता लगाने के लिए हमें निर्देशांक अक्षों की आवश्यकता होती है|
- निर्देशांक अक्ष तल को चार चतुर्थांश में विभाजित करते है|
- किसी बिंदु की x- अक्ष से लंबवत दूरी, उस बिंदु का y- निर्देशांक (कोटि) कहलाती है|
- किसी बिंदु की y- अक्ष से लंबवत दूरी, उस बिंदु का x- निर्देशांक (भुज) कहलाती है|
- x अक्ष पर किसी भी बिंदु का निर्देशांक (x, 0) के रूप में होता है |
- y अक्ष पर किसी भी बिंदु का निर्देशांक (0, y) के रूप में होता है|
- दो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी है

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- मूल बिंदु O (0, 0) से एक बिंदु P (x, y) की दूरी है

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- बिंदु P (x, y) के निर्देशांक जो बिंदु $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाली रेखाखंड को आंतरिक रूप से $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करते हैं:

$$P\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

इसे विभाजन सूत्र कहा जाता है|

- बिंदु $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ से बनने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु के निर्देशांक $= \left(\frac{x_1+x_1}{2}, \frac{y_1+y_1}{2}\right)$
- बिंदु $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ द्वारा बने त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक $= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$
- बिंदुओं $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ वर्ग इकाई होता है।
- यदि बिंदु $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ संरेखीय है तो इन तीन बिंदुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल 0 होता है और यदि क्षेत्रफल 0 है, तो बिंदु संरेखीय होते है।

प्रश्नावली

1. यदि बिंदुओं (x, 0) और (0, 3) के बीच की दूरी 5 इकाई है, तो x का मान बताइए।
2. बिंदुओं (10 cos 30°, 0) और (0, 10 cos 60°) के बीच की दूरी का मान बताइए।
3. बिंदुओं $\left(-\frac{8}{5}, 2\right)$ और $\left(\frac{2}{5}, 2\right)$ के बीच की दूरी का मान बताइए।
4. यदि बिंदुओं (4, k) और (1, 0) के बीच की दूरी 5 इकाई है, तो k का मान बताइए।
5. एक बिन्दु P का x-निर्देशांक उसके y-निर्देशांक का दुगुना है। यदि बिन्दु P, बिंदुओं Q (2, -5) और R(-3, 6) से सम दूरस्थ है, तो बिन्दु P के निर्देशांक बताइए।
6. यदि P (5, 2), Q (2, -2) और R (-2, a) बिन्दु एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं जिसमें $\angle Q = 90°$ है, तो a का मान बताइए।
7. बिंदुओं A (cosθ, sinθ) और B (sinθ, - cos θ) के बीच की दूरी का मान बताइए।
8. बिंदुओं (0, 4), (0, 0) और (3, 0) से बने त्रिभुज का परिमाप बताइए।

9. एक वृत्त जिसका केन्द्र C (3, 5) एक बिन्दु (-2, 4) से गुज़रता है, तो वृत्त के व्यास की लंबाई का मान बताइए |

10. बिंदुओं A (-5, 6), B (-4, -2) और C (7, 5) से बने त्रिभुज की भुजाएँ AB, BC और CA का मान बताइए |

11. यदि y-अक्ष पर किसी बिंदु A का कोटि 5 है और बिंदु B के निर्देशांक (-3, 1) हैं, तो AB की लंबाई बताइए |

12. यदि किसी वृत्त का केन्द्र बिन्दु (3, 4) है तो बिंदु A (5, 8) की वृत्त के केन्द्र से दूरी बताइए |

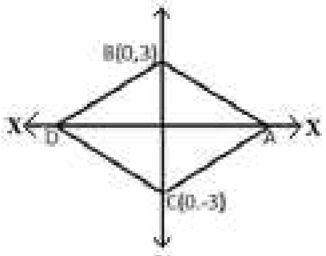
13. मूल बिन्दु से बिन्दु (a cosb, a sinb) की दूरी का मान बताइए |

14. k का मान बताइए यदि बिंदु (0, 4) ,बिंदुओं (10, k) और (k, 8) से सम दूरस्थ है|

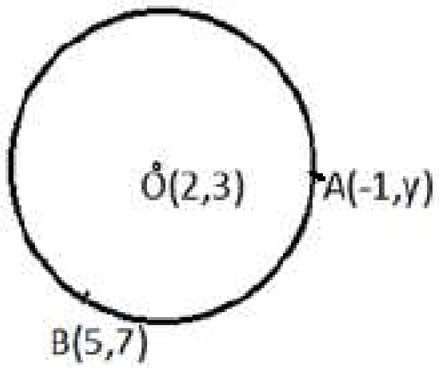
15. x और y का मान बताइए, यदि O (0, 0), A (0, 2), B (x, y) और C (3,0) एक आयत OABC बनाते हैं |

16. y का मान बताइए यदि A (5, y), B (5, 2), C (2, 2) और D (2, 5) एक वर्ग ABCD बनाते हैं |

17. दी गई आकृति में, बिंदु A और D के निर्देशांक बताइए यदि BACD एक समचतुर्भुज है और समबाहु त्रिभुज ABC का आधार BC, y अक्ष पर स्थित है|



18. आकृति में, O वृत्त का केंद्र है तथा A और B वृत्त पर कोई बिंदु हैं, y का मान बताइए |



19. बिंदु P के निर्देशांक बताइए, यदि P और Q बिंदुओं (5, −3) और (−1, 3) को जोड़ने वाले रेखाखंड को समत्रिभाजित करते हैं |

20. बिंदु (2, 1) और (5, −8) को मिलाने वाला रेखाखंड ,बिंदु P और Q द्वारा समत्रिभाजित किया जाता है| यदि बिंदु P रेखा $2x - y + k = 0$ पर है, तो k का मान बताइए |

21. यदि एक समबाहु त्रिभुज की भुजाओं में से एक की लंबाई 'a' है, तो बिंदु C के निर्देशांक बताइए, जिसका आधार BC, x- अक्ष पर स्थित है और मूल बिंदु B पर है|

22. P के निर्देशांक बताइए यदि बिंदु P से बिंदु (3,4) की दूरी $\sqrt{10}$ इकाई है और बिंदु P का भुज इसके कोटि का दोगुना है|

23. x का मान बताइए, यदि बिंदु (0, x) की (3, 5) से दूरी 5 इकाई है|

24. y का मान बताइए यदि बिंदु A (5, y), B (5, 5), C (1, 5) और D (1, 2) आयत के शीर्ष हैं |

25. x अक्ष पर स्थित बिंदु P के निर्देशांक बताइए, जो कि बिंदु (−2, 5) और (2, −3) से समदूरस्थ है|

26. y अक्ष पर स्थित बिंदु P के निर्देशांक बताइए जो कि बिंदु (3,4) और (−2, 5) से समान दूरी पर स्थित है|

27. वह अनुपात बताइए जिसमें बिन्दुओं P(3, -6) और Q (5, 3) को मिलाने वाला रेखाखंड x - अक्ष द्वारा विभाजित होता है|

28. A एवं B यदि, रेखाखंड PQ के त्रिविभाजन के बिंदु हैं, जहाँ P एवं Q के निर्देशांक (2, -2) और (-7, 4) हैं | यदि A, बिन्दु P के निकट है तो A के निर्देशांक बताइए |

29. यदि बिन्दु R (-1, 2) बिन्दुओं P(2, 5) और Q(x, y) को मिलाने वाले रेखाखंड को 3: 4 के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करता है, तो $x^2 + y^2$ का मान बताइए |

30. वह अनुपात बताइए जिसमें बिन्दु S (4, m), बिन्दुओं P (2, 3) और Q (6, -3) को मिलाने वाले रेखाखंड को विभाजित करता है|

31. उस बिंदु के निर्देशांक बताइए, जो बिंदु A (3, −6) और B (−2,7) को मिलाने वाली रेखाखंड को 2: 3 के अनुपात में विभाजित करता है|

32. y का मान बताइए, यदि बिंदु P (x, y) ,बिंदुओं (-3, 3) और (1, −2) को मिलाने वाले रेखाखंड को 2: 3 के अनुपात में विभाजित करता है|

33. x का मान बताइए, यदि P (x, y) बिंदुओं A (7, −5) और B (2, −1) को मिलाने वाले रेखाखंड को 4: 1 के अनुपात में विभाजित करता है|

34. k का मान बताइए, यदि x अक्ष बिंदुओं (−4, −6) और (5, 2) को मिलाने वाले रेखाखंड को k: 1 के अनुपात में विभाजित करता है|

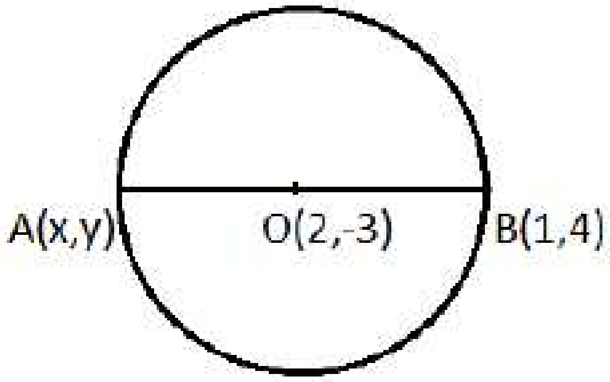
35. वह अनुपात बताइए जिसमें बिंदु A (−4,4) और B (8, 8) को मिलाने वाली रेखाखंड को बिंदु (−1, 5) से विभाजित किया गया है|

36. यदि बिन्दुओं A (6, -5) और B (-2, 11) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य बिन्दु P (2, q) है, तो q का मान बताइए |

37. यदि बिन्दुओं P (-2, 3) और Q (a, b) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य बिन्दु M (0, 4) है, तो a और b का मान बताइए |

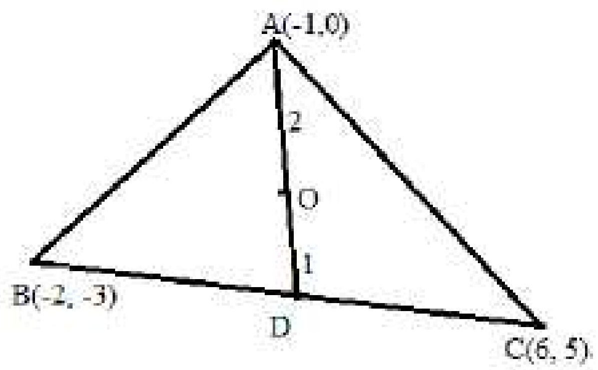
38. यदि एक वृत्त के व्यास के अंत बिन्दु (2, 4) और (-3, -1) हैं, तो वृत्त की त्रिज्या बताइए |

39. आकृति में, A के निर्देशांक बताइए|

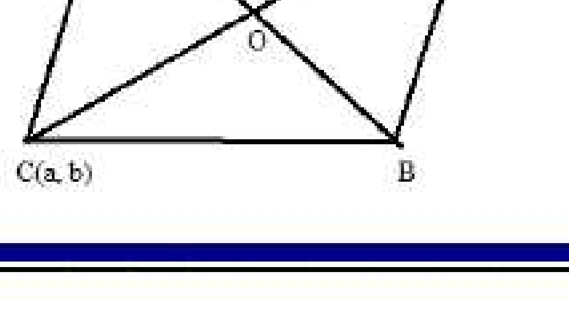


40. बिंदुओं (4, 10) और (2, 2) को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु की बिंदु (0, 2) से दूरी बताइए |

41. आकृति में, बिंदु A (−1, 0), B (−2, −3) और C(6, 5) ΔABC के शीर्ष हैं। यदि D, BC का मध्य बिंदु है, तो O के निर्देशांक बताइए जो AD को 2: 1 के अनुपात में विभाजित करता है |



42. समांतर चतुर्भुज ABCD में, A और C के निर्देशांक क्रमशः (3, 2) और (a, b) हैं | यदि AC और DB, मूल बिंदु O (0, 0) पर प्रतिच्छेद करते हैं ,तो 'a' और 'b' का मान बताइए |



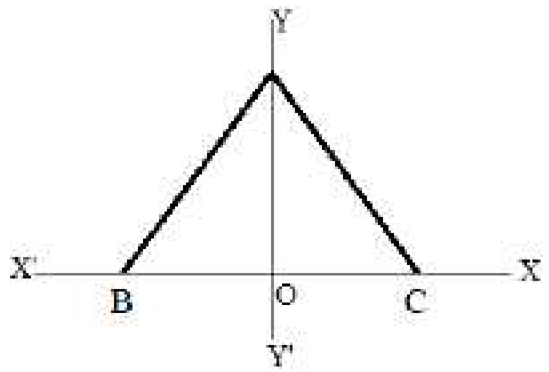
43. बिंदु Q रेखाखंड PR का मध्य बिंदु है जहां P, Q और R के निर्देशांक क्रमशः $(6, -2)$, $(1, 3)$ और $(x, 8)$ हैं | ' x ' का मान बताइए |

44. यदि $(\frac{a}{3}, 4)$, बिंदु P $(-6, 5)$ और R $(-2, 3)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड का मध्य बिंदु है, तो a का मान बताइए |

45. p + q का मान बताइए, यदि (p, q) बिंदु (5, 3) और (−2, 4) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य बिंदु है |

46. p - q का मान बताइए, यदि बिंदु (3p, 4) और (−2, 2q) से बने रेखाखंड का मध्य बिंदु (2, 6) है |

47. 24 सेमी भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज ΔABC का आधार BC, x - अक्ष पर स्थित है, यदि आधार का मध्य बिंदु मूल बिंदु पर है, तो B के निर्देशांक बताइए |



48. एक त्रिभुज जिसके शीर्ष बिन्दुओं के निर्देशांक (3, −6), (−3, −2) और (6, −4) हैं, तो इसके केन्द्रक के निर्देशांक बताइए |

49. यदि बिंदुओं (7, x), (y, −6) और (9, 10) द्वारा बने त्रिभुज का केन्द्रक (6, 3) है, तो x + y का मान बताइए |

50. यदि बिंदु (a, b), (b, c) और (c, a) द्वारा बने त्रिभुज का केंद्रक मूल बिंदु पर है, तो $a^3 + b^3 + c^3$ का मान बताइए |

51. यदि बिन्दु A (-2, 1), B (a, b) और C (4, -1) संरेखीय है और a – b = 1 है, तो a और b का मान बताइए |

52. बिंदुओं (a, b + c), (b, c + a) और (c, a + b) द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल बताइए |

53. बिंदुओं (3,2), (5,4), और (3,6) से बने त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदुओं को जोड़कर बने त्रिभुज के क्षेत्रफल का मान बताइए |

54. a का मान बताइए ताकि बिन्दु A (a, −6), B (−3, −4) और C (−1, 0) एक ही रेखा पर स्थित हों |

55. बिंदु A (1, −4) और A से गुजरने वाली भुजाओं के मध्य बिंदु (2, −1) और (0, −1) दिये हैं | त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल बताइए |

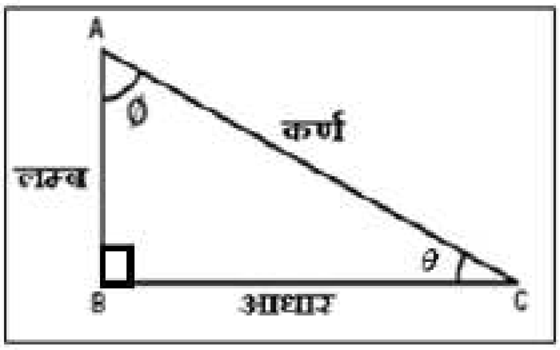
उत्तरमाला

प्र.सं.	उत्तर	प्र.सं.	उत्तर
1	$x = 4, -4$	29	29
2	10 इकाई	30	1:1
3	2 इकाई	31	$\left(1, -\frac{4}{5}\right)$
4	$k = \pm 4$	32	$y = 1$
5	(16, 8)	33	$x = 3$
6	$a = 1$	34	$k = 3$
7	$\sqrt{2}$ इकाई	35	1:3
8	12 इकाई	36	$q = 3$
9	$2\sqrt{26}$ इकाई	37	$a = 2, b = 5$
10	$AB = \sqrt{65}$ इकाई, $BC = \sqrt{170}$ इकाई, $CA = \sqrt{145}$ इकाई	38	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$ इकाई
11	5 इकाई	39	$A(3, -10)$
12	$2\sqrt{5}$ इकाई	40	5 इकाई
13	a इकाई	41	$\left(1, \frac{2}{3}\right)$
14	$k = 12.5$	42	$a = -3, b = -2$
15	$x = 3, y = 2$	43	$x = -4$
16	$y = 5$	44	$a = -12$
17	$A = (3\sqrt{3}, 0)$, $D\ (-3\sqrt{3}, 0)$	45	5
18	$y = -1$ or 7	46	-2
19	$(3, -1)$	47	$(-12, 0)$
20	-8	48	$(2, -4)$
21	$(a, 0)$ or $(-a, 0)$	49	7
22	(6, 3), (2, 1)	50	3abc
23	$x = 1, 9$	51	$a = 1, b = 0$
24	$y = 2$	52	0
25	$(-2, 0)$	53	1 वर्ग इकाई
26	$(0, 2)$	54	$a = -4$
27	2:1	55	12 वर्ग इकाई
28	$A(-1, 0)$		

अध्याय – 8

त्रिकोणमिति तथा इसके अनुप्रयोग

याद रखने योग्य बिंदु



- $\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{\text{co sec}\theta}$
- $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{\sec\theta}$
- $\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{1}{\cot\theta}$
- $\text{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{1}{\sin\theta}$
- $\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{1}{\cos\theta}$
- $\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{1}{\tan\theta}$

$$\emptyset = 90° - \theta$$

$$\sin\emptyset = \sin(90° - \theta) = \frac{BC}{AC}$$
$$= \cos\theta$$

पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात :

1) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ 2) $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$ 3) $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$

4) $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$ 5) $\sec(90° - \theta) = \text{cosec}\theta$ 6) $\text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 2) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ 3) $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

उन्नयन कोण और अवनमन कोण:

उन्नयन कोण (Angle Of Elevation) :- जब किसी वस्तु को धरातल से ऊपर की ओर देखा जाता है तो क्षैतिज रेखा और दृष्टि रेखा के साथ बने कोण को उन्नयन कोण कहते है।

अवनमन कोण (Angle Of Depression) :- जब किसी वस्तु को ऊँचाई से नीचे की ओर देखा जाता है तो क्षैतिज रेखा और दृष्टि रेखा के बीच बने हुए कोण को अवनमन कोण कहते है|

उन्नयन कोण = अवनमन कोण

प्रश्नावली

1. यदि $\sec\theta + \tan\theta = 2$, तो $\tan\theta$ का मान बताइए |

2. यदि $\sin\theta - \cos\theta = \frac{3}{5}$, तो $\cos\theta$ का मान बताइए |

3. यदि $\sin\theta = \frac{a}{b}$, तो $\cos\theta$ का मान बताइए |

4. यदि $\tan x = \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$, तो x का मान बताइए |

5. यदि $\cos\theta + \sec\theta = 2$, तो $\cos^3\theta + \sec^3\theta$ का मान बताइए |

6. यदि $\cot\theta = \frac{17}{4}$, तो $\frac{(2+2\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(2-2\cos\theta)}$ का मान बताइए |

7. यदि θ न्यून कोण है और $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$, तो $\sin\theta + \cos\theta$ का मान बताइए |

8. यदि $\theta = 45^\circ$, तो $2\sin\theta\cos\theta$ का मान बताइए |

9. $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ$ का मान बताइए |

10. यदि $5\cos\theta = 3$ है, तो मान बताइए

$$\frac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{5\sin\theta + 3\cos\theta}$$

11. यदि $\tan\theta = \frac{12}{5}$, तो $\frac{13\sin\theta}{3}$ का मान बताइए |

12. $(\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2$ का मान बताइए |

13. $(\sec^2\theta - 1)(1 - \operatorname{cosec}^2\theta)$ का मान बताइए |

14. यदि $\tan\theta + \cot\theta = 2$ है, तो $\tan^2\theta + \cot^2\theta$ का मान बताइए |

15. यदि $\cos A + \cos^2 A = 1$ तो $\sin^2 A + \sin^4 A$ का मान बताइए |

16. यदि $0 < \theta < 90^\circ$, θ का मान बताइए यदि $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 4$

17. यदि $\sin A + \operatorname{cosec} A = 3$, तो $\frac{\sin^4 A + 1}{\sin^2 A}$ का मान बताइए |

18. यदि $(\sin\theta + \text{cosec}\theta)^2 + (\cos\theta + \sec\theta)^2 = 14k + \tan^2\theta + \cot^2\theta$, तो k का मान बताइए |

19. यदि $\cos\theta - \cos(90^\circ - \theta) = 0$, तो θ का मान बताइए, $0 < \theta < 90^\circ$ |

20. यदि $x = 15^\circ$, तो $4\sin2x\cos4x\sin6x$ का मान बताइए |

21. यदि $K - 2 = \sec^2A(1 + \sin A)(1 - \sin A)$, तो K का मान बताइए |

22. यदि $\sin^4\theta - \cos^4\theta = k^4$, तो $\sin^2\theta - \cos^2\theta$ का मान बताइए |

23. यदि $x = 4\sin\theta$ और $y = 3\cos\theta$ तो $\sqrt{16y^2 + 9x^2}$ का मान बताइए |

24. मान बताइए: $\frac{1+\cot^2\theta}{1-\cos^2\theta} - \text{cosec}^4\theta$

25. मान बताइए: $\frac{\cos^2A+\sin^2A-1}{\sin^2A\tan^2A}$

26. $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \ldots + \sin^2 80^\circ$ का मान बताइए |

27. यदि $\tan A + \cot A = 4$ है, तो निम्नलिखित का मान बताइए:

$$\frac{\tan^2A + \cot^2A}{\tan^2A + \cot^2A + 20\tan A\cot A}$$

28. $\cot^4A - \text{cosec}^4A + \cot^2A + \text{cosec}^2A$ का मान बताइए |

29. यदि $7\sin^2A + 3\cos^2A = 4$ और $0 \le A \le 90^\circ$, तो $\tan A$ का मान बताइए |

30. यदि $\cos\theta + \sec\theta = 2$ है, तो $\cos^{68}\theta + \sec^{68}\theta$ का मान बताइए |

31. यदि $x = a\cos^3\theta$, $y = b\sin^3\theta$, तो $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}$ का मान बताइए |

32. यदि $\sec^2\theta = \frac{4}{3}$, तो $3(\sec^2\theta + \tan^2\theta)$ का मान बताइए |

33. यदि $x = a(\sin\theta + \cos\theta)$, $y = b(\sin\theta - \cos\theta)$, तो $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$ का मान बताइए |

34. यदि $x\sin45^\circ = y\,\text{cosec}30^\circ$ है, तो $\left(\frac{x}{y}\right)^4$ का मान बताइए |

35. यदि $\cos x + \cos y = 2$ है, तो $\sin x + \sin y$ का मान बताइए |

36. $\tan\theta \times \frac{\sin\theta - \sin^3\theta}{\cos\theta - \cos^3\theta}$ का मान बताइए |

37. x का मान बताइए यदि $\cos x° = \cos 60° \cos 30° + \sin 60° \sin 30°$

38. यदि $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$, तो $\sin 15°$ का मान बताइए |

39. tanA को sinA के पदों में बताइए |

40. सरल कीजिये : $(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sin\theta)$

41. $\frac{\sin^4\theta + \cos^4\theta}{1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta}$ का मान बताइए |

42. $\frac{\sin\theta}{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta} - \frac{\sin\theta}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta}$ का मान बताइए |

43. $(1 + \cot^2\theta)(3 - 3\cos\theta)(1 + \cos\theta)$ का मान बताइए |

44. $\frac{\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\cos\theta + \sin\theta} + \frac{\cos^3\theta - \sin^3\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ का मान बताइए |

45. यदि $4\sin\theta = 3$ और $\sqrt{\frac{\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta}{\sec^2\theta - 1}} + 2\cot\theta = \frac{\sqrt{7}}{x} + \cos\theta$, तो x का मान बताइए |

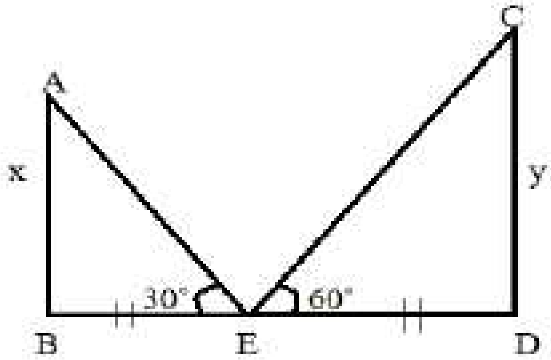
46. सूर्य का उन्नयन कोण उस समय बताइए, जिस समय एक खम्भे की छाया की लंबाई उसकी ऊँचाई की $\sqrt{3}$ गुना हो |

47. एक दीवार के साथ एक सीढ़ी को इस तरह से रखा गया था कि यह जमीन के साथ 30° का कोण बनाती है| यदि जमीन से सीढ़ी का शीर्ष 10 मीटर ऊँचाई पर है, तो सीढ़ी के पाद और दीवार के बीच की दूरी बताइए |

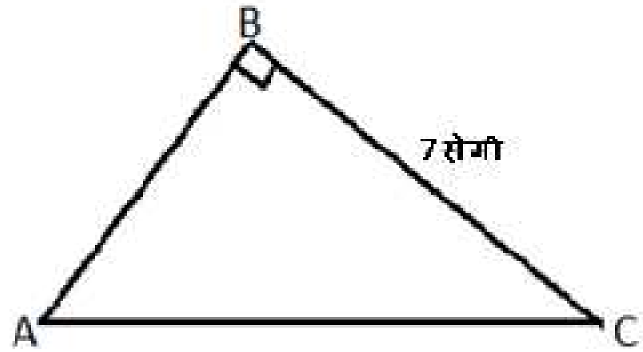
48. दो पोस्ट के बीच की दूरी 'k' मीटर हैं और एक की ऊंचाई दूसरी के दोगुनी है| यदि उनके पादों को जोड़ने वाली रेखाखण्ड के मध्य बिंदु से, एक पर्यवेक्षक को पोस्ट के शीर्ष का कोणीय माप पूरक लगता है, तो छोटे पोस्ट की ऊंचाई (मीटर में) बताइए |

49. यदि 6 मीटर ऊंचाई का एक टॉवर जमीन के साथ $2\sqrt{3}$ मीटर की छाया बनाता है, तो सूर्य के जमीन के साथ बनने वाला उन्नयन कोण का माप बताइए |

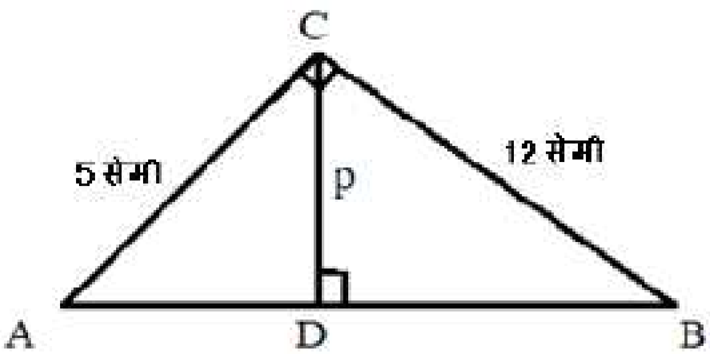
50. आकृति में, यदि BE = ED है तो x: y बताइए |



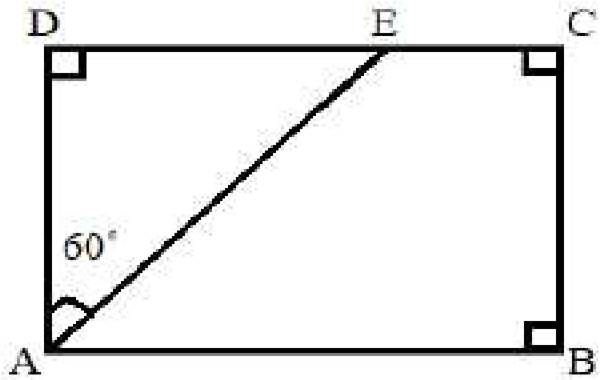
51. समकोण ΔABC में, $\angle B = 90^\circ$, और $AC - AB = 1$ सेमी है, तो $\cos A + \cos B + \cos C$ का मान बताइए |



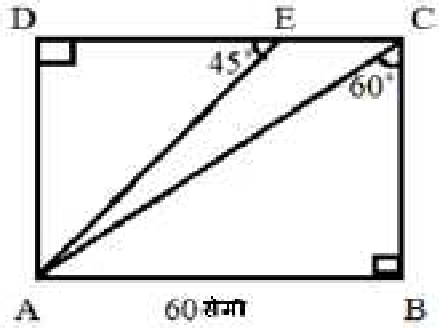
52. आकृति में, 'p' का मान बताइए |



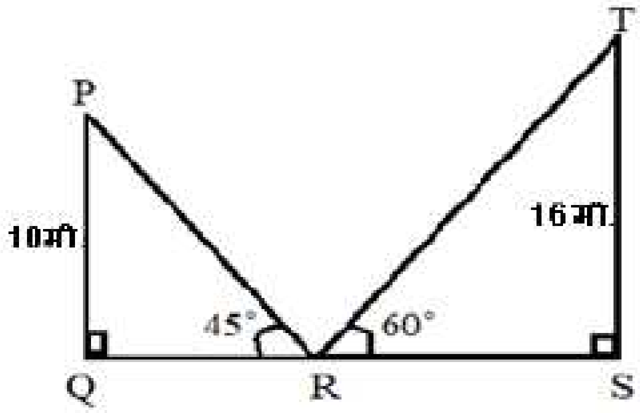
53. दी गई आकृति में, यदि AD=40 सेमी हो, तो AE का मान बताइए |



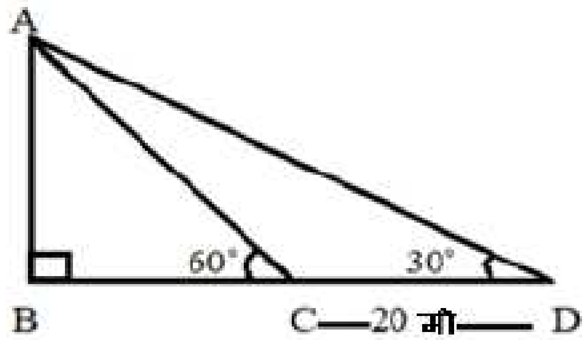
54. आकृति में, $AC + AD$ का मान बताइए |



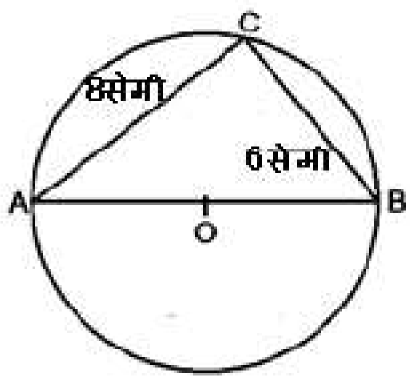
55. दी गई आकृति में, QS की लंबाई (मीटर में) बताइए |



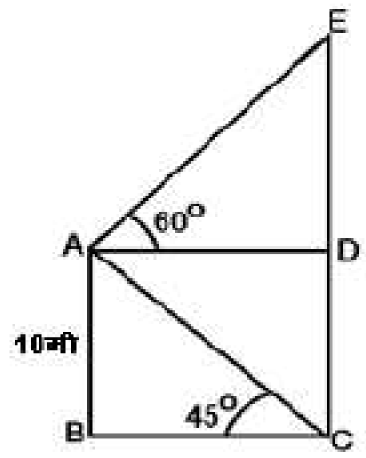
56. दी गई आकृति में, यदि $\angle B = 90^\circ$ हो, तो टॉवर AB की ऊँचाई (मीटर में) बताइए |



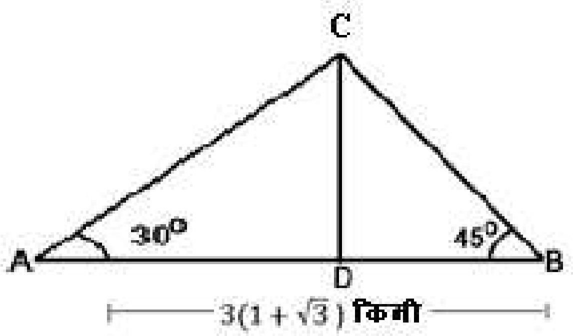
57. दी गई आकृति में $\tan A \tan B$ का मान बताइए, जहाँ O वृत्त का केन्द्र है |



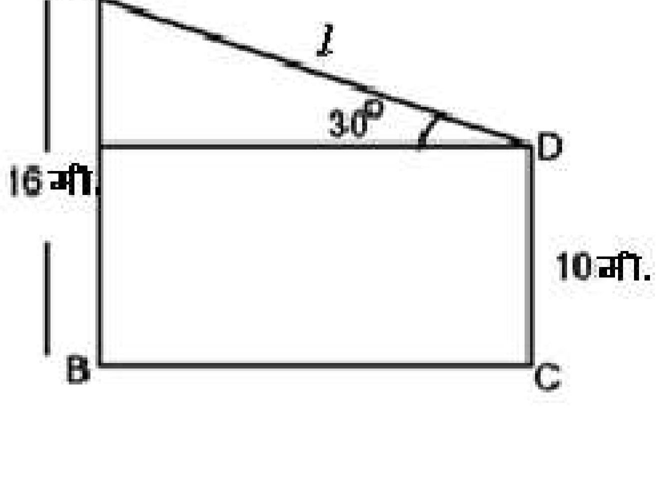
58. दी गई आकृति में एक आदमी बिन्दु A पर एक जहाज के डेक पर खड़ा है| CE पहाड़ी है | पहाड़ी की ऊँचाई का मान बताइए |



59. स्टेशन A और B, $3(1+\sqrt{3})$ किमी की दूरी पर हैं | जैसा कि आकृति में दिखाया गया है, प्रत्येक स्टेशन $30°$ और $45°$ के उन्नयन कोण पर एक हवाई जहाज को देखता है| हवाई जहाज की ऊँचाई का मान बताइए |



60. 16 मीटर और 10 मीटर ऊँचाई के दो खम्भें एक तार से जुडे हुए हैं जिसकी लंबाई l है| यदि तार क्षैतिज रेखा के साथ $30°$ का कोण बनाता है (आकृति देखें), तो l का मान बताइए |



उत्तर

प्र. सं.	उत्तर	प्र. सं.	उत्तर
1.	$\frac{3}{4}$	16.	$60°$
2.	$\frac{8}{25}$	17.	7
3.	$\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$	18.	$\frac{1}{2}$
4.	$45°$	19.	$45°$
5.	2	20.	1
6.	$18\frac{1}{16}$	21.	3
7.	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	22.	k^4
8.	1	23.	12
9.	1	24.	0
10.	$\frac{11}{29}$	25.	0
11.	4	26.	4
12.	2	27.	$\frac{7}{17}$
13.	-1	28.	0
14.	2	29.	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
15.	1	30.	2

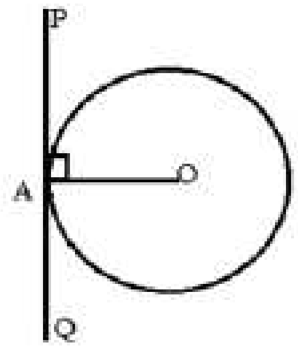
प्र. सं.	उत्तर	प्र. सं.	उत्तर
31.	1	46.	30°
32.	5	47.	$10\sqrt{3}$ मीटर
33.	2	48.	$\frac{k}{2\sqrt{2}}$ मीटर
34.	64	49.	60°
35.	0	50.	1:3
36.	1	51.	$1\frac{6}{25}$
37.	30	52.	$4\frac{8}{13}$ सेमी
38.	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	53.	80सेमी
39.	$\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$	54.	$60\sqrt{3}$ सेमी
40.	$\cos\theta$	55.	18 मीटर
41.	1	56.	$10\sqrt{3}$ मीटर
42.	2	57.	1
43.	3	58.	$10(\sqrt{3}+1)$ मीटर
44.	2	59.	3 किमी
45.	$1\frac{1}{3}$	60.	12 मीटर

अध्याय - 9

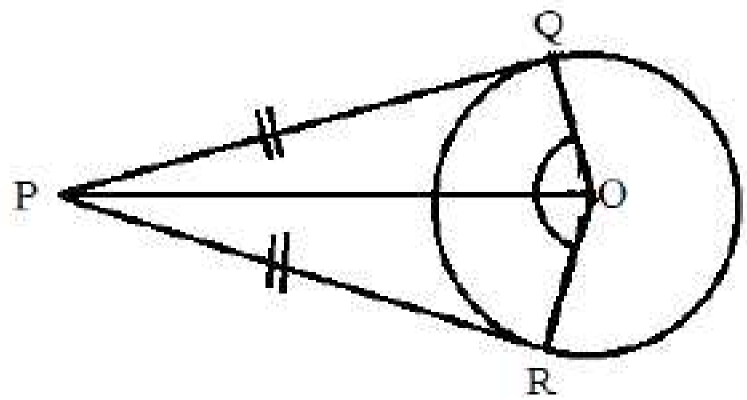
वृत्त

याद रखने योग्य बिंदु

- वृत्त की स्पर्श रेखा एक ऐसी रेखा है जो केवल एक बिंदु पर वृत्त को स्पर्श करती है |



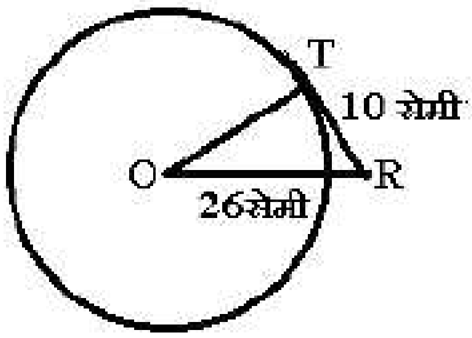
- किसी भी बिंदु पर स्पर्श रेखा संपर्क बिंदु से होकर गुजरने वाली त्रिज्या के लंबवत होती है| $OA \perp PA$ अर्थात $\angle OAP = 90^\circ$ |
- वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से एक वृत्त में केवल दो स्पर्श रेखाएं होती हैं| PQ और PR बाहरी बिंदु P से बनी दो स्पर्श रेखा हैं |
- बाहरी बिंदु से वृत्त तक खींची गई स्पर्श रेखा की लंबाई बराबर होती है, यहाँ PQ = PR है |



- उपरोक्त आकृति में, चतुर्भुज OQPR के सम्मुख कोणों का योग 180° है |

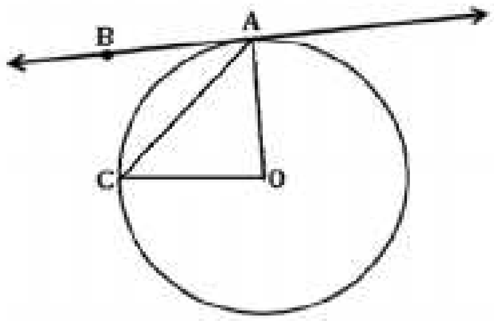
प्रश्नावली

1. यदि एक बिन्दु R वृत्त के केंद्र O से 26 सेमी की दूरी पर है और स्पर्श रेखा की लंबाई RT=10 सेमी है तो त्रिज्या OT की लंबाई बताइए।

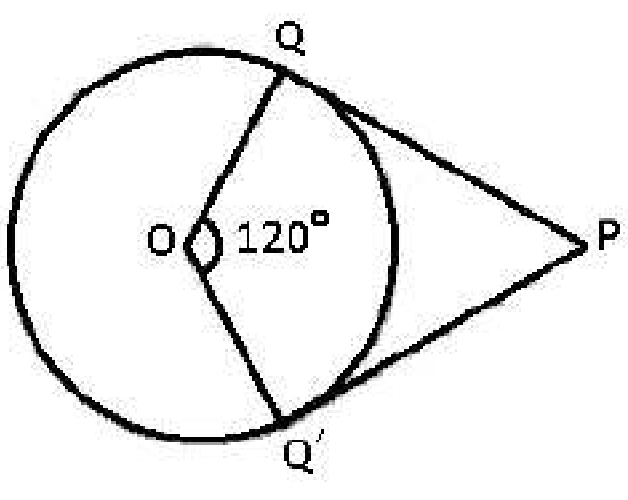


2. यदि 8 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की जीवा इसके केंद्र पर समकोण बनाती है, तो जीवा की लंबाई बताइए।

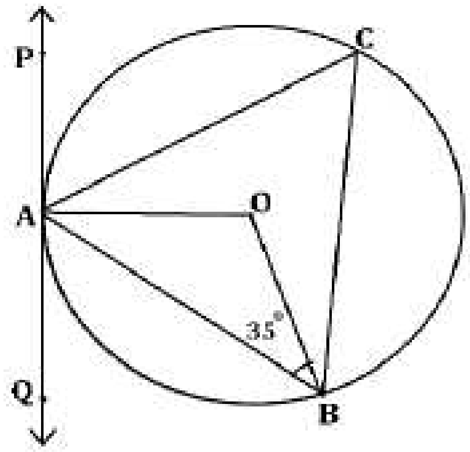
3. दी गई आकृति में, O वृत्त का केंद्र है। AC जीवा है एवं AB बिन्दु A पर स्पर्श रेखा है। यदि $\angle AOC = 60°$ है तो $\angle BAC$ का मान बताइए।



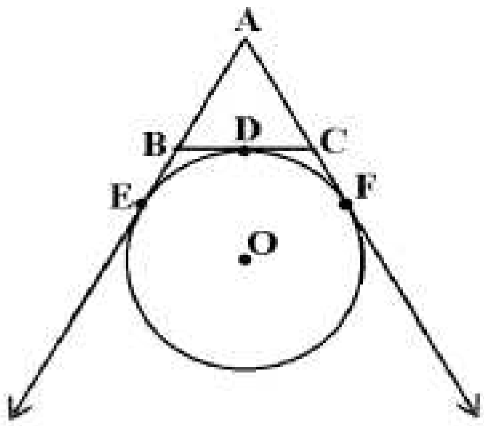
4. दी गई आकृति में PQ तथा PQ′ बिन्दु P से केंद्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखाएं हैं। यदि $\angle QOQ' = 120°$, तो $\angle OPQ$ का मान बताइए।



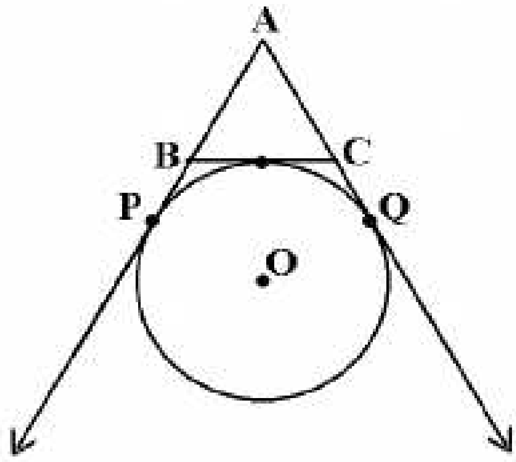
5. दी गई आकृति में वृत्त पर स्थित A बिन्दु पर स्पर्श रेखा PAQ है। यदि $\angle OBA = 35°$ है तो $\angle BAQ$ का मान बताइए।



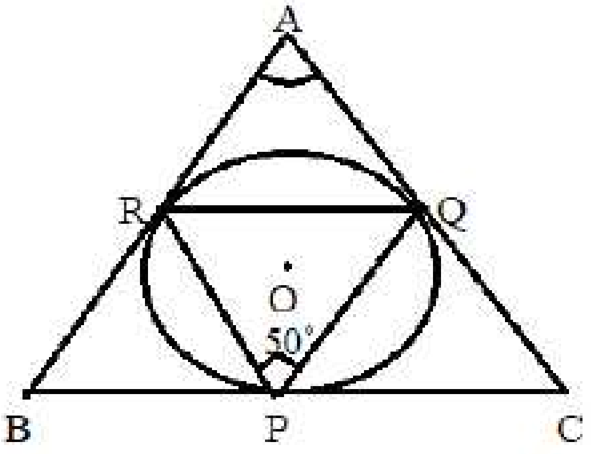
6. दी गई आकृति में एक वृत्त ΔABC की भुजा BC को स्पर्श करता है और बढ़ाई गई भुजाएँ AB एवं AC को क्रमशः बिंदु E और F पर स्पर्श करता है। यदि AE = 8 सेमी है तो ΔABC का परिमाप बताइए।



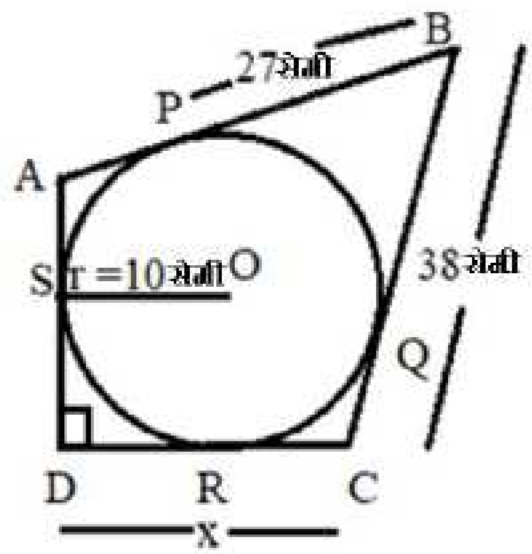
7. दी गई आकृति में, AP, AQ और BC वृत्त की स्पर्श रेखाएं हैं। यदि AB = 5 सेमी, AC = 6 सेमी और BC = 4सेमी हैं, तो AP की लंबाई बताइए।



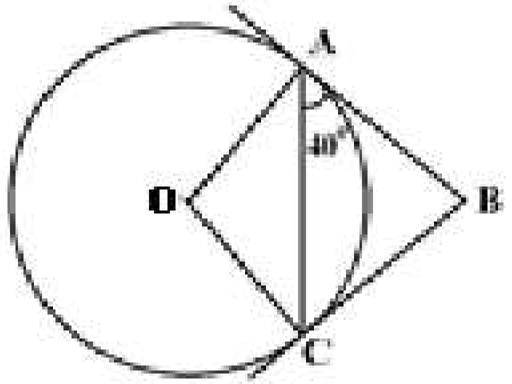
8. आकृति में, यदि $\angle RPQ = 50^\circ$, और O वृत्त का केंद्र है, तो $\angle BAC$ का मान बताइए |



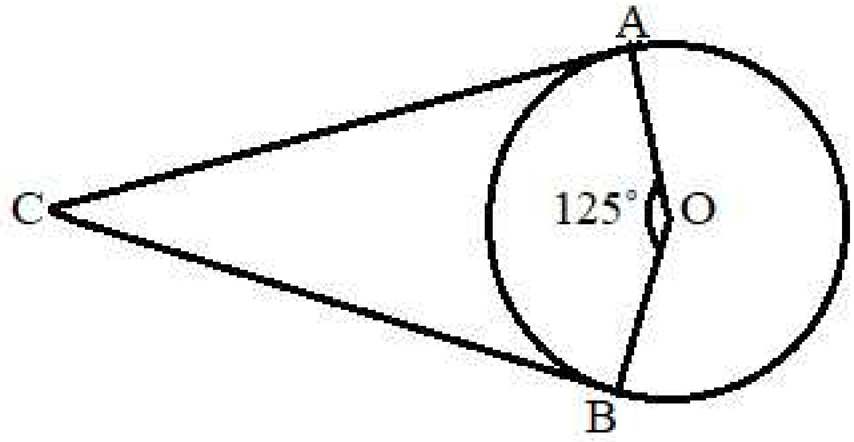
9. आकृति में, यदि O वृत्त का केंद्र है, तो x का मान बताइए |



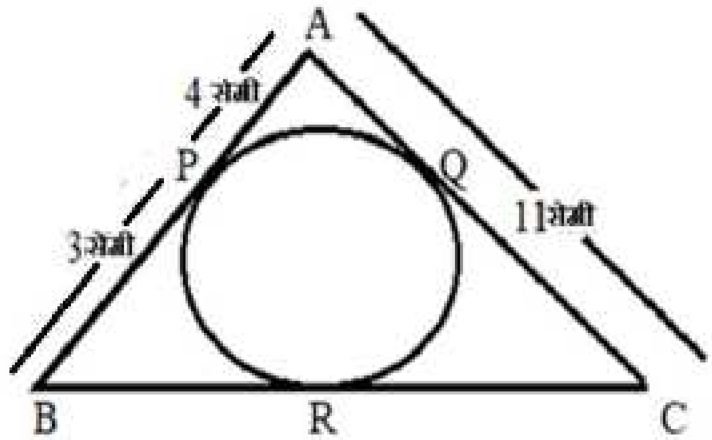
10. एक बाह्य बिन्दु B से, O केंद्र वाले वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ AB और BC खींची गई हैं | यदि $\angle BAC = 40^\circ$ है, तो $\angle AOC$ का मान बताइए |



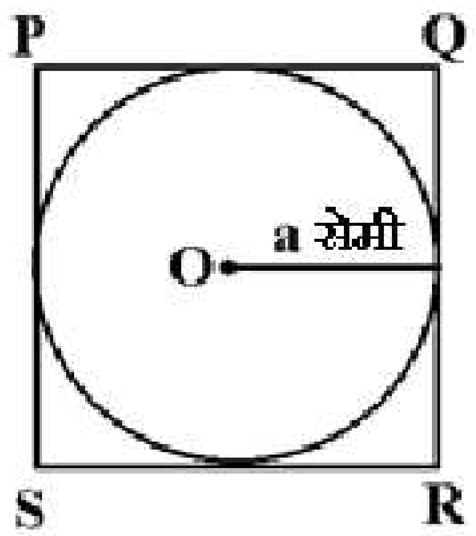
11. आकृति में, (∠ACB + ∠CAO) का मान बताइए |



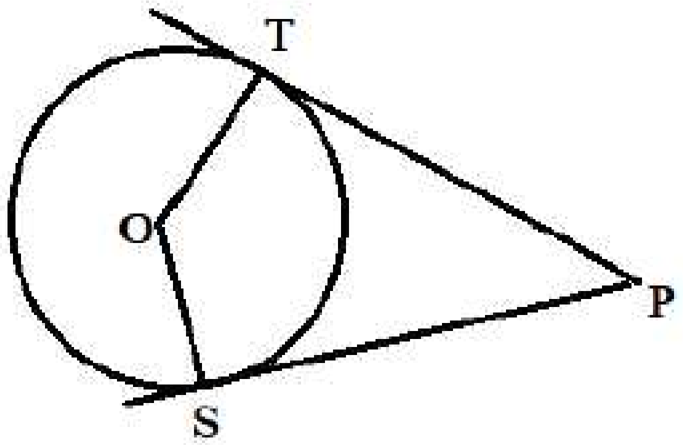
12. आकृति में, BC की लंबाई बताइए |



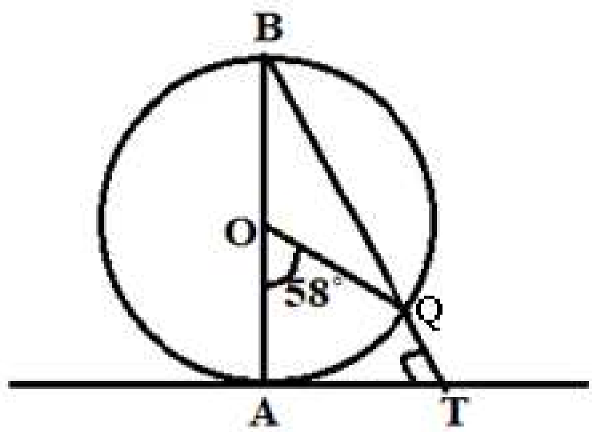
13. एक 'a' सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के परिगत (बाहर) बने हुए वर्ग का परिमाप बताइए |



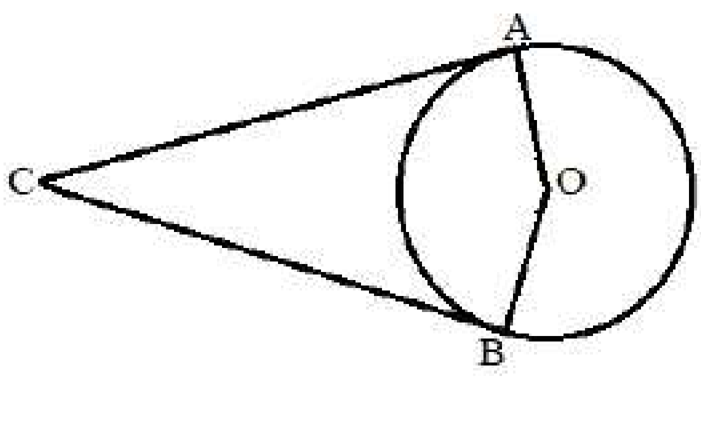
14. आकृति में, त्रिज्या r वाले वृत का केंद्र O है | यदि OP = 2r, तो $\angle OST$ का मान बताइए |



15. आकृति में, केंद्र O वाले वृत्त का व्यास AB है और AT स्पर्श रेखा है | $\angle ATQ$ का मान बताइए |

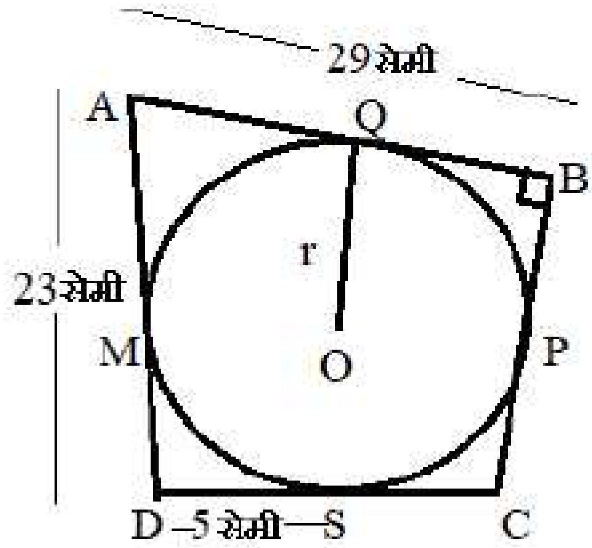


16. आकृति में, $\angle AOB$ का मान बताइए यदि $\angle ACB + \angle CBO = 120^\circ$ |

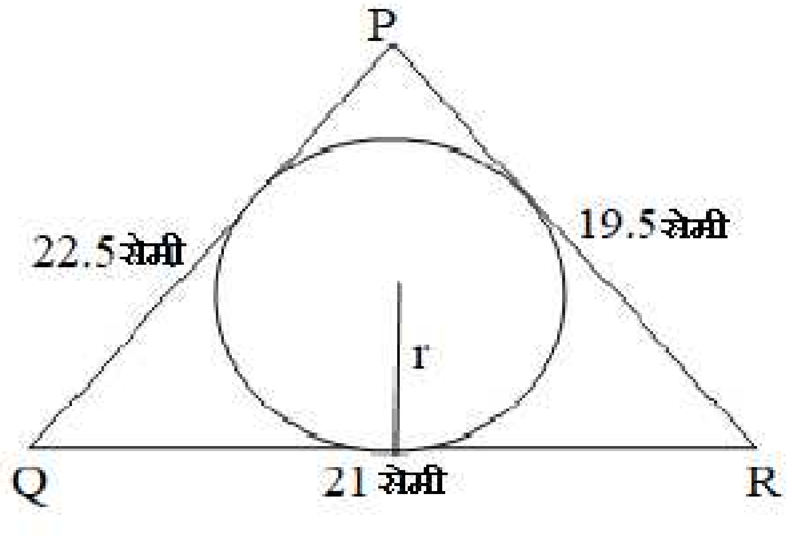


17. उस वृत्त की त्रिज्या बताइए जिसकी परिधि, 36 सेमी और 20 सेमी व्यास वाले दो वृत्तों की परिधि के योग के बराबर हो |

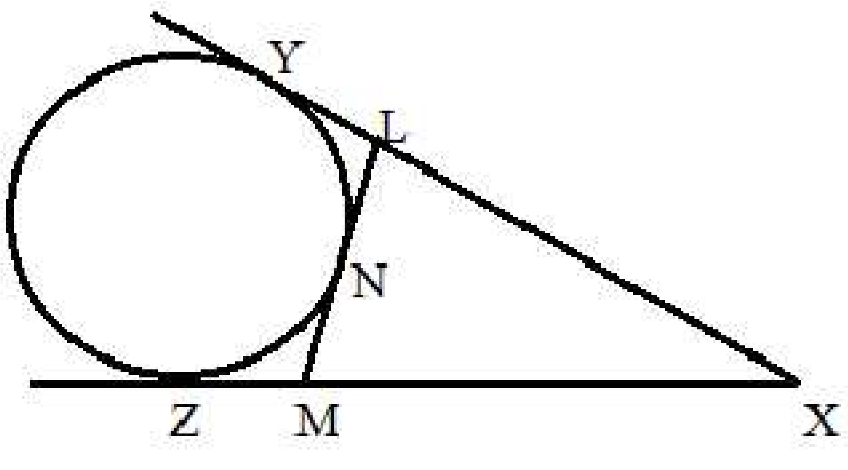
18. आकृति में, त्रिज्या r वाले वृत्त का केंद्र O है, वृत्त की त्रिज्या 'r' का मान बताइए |



19. आकृति में, वृत्त की त्रिज्या बताइए, यदि ΔPQR का क्षेत्रफल = 189 वर्ग सेमी हैं |

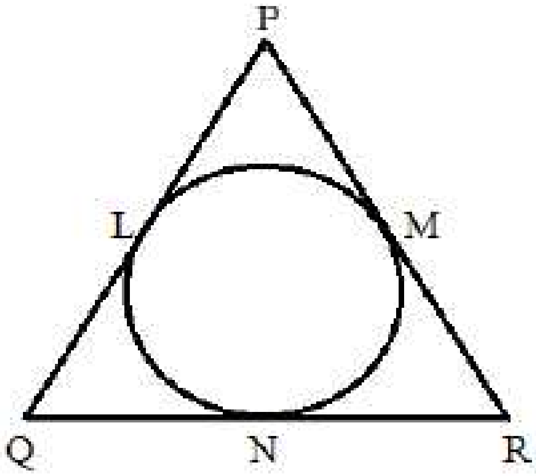


20. ΔXLM की परिमाप बताइए, यदि XY = 18 सेमी है |

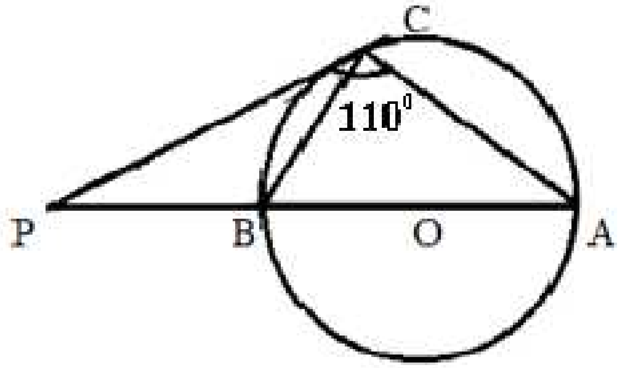


21. ΔPQR की परिमाप बताइए, यदि PM = a सेमी, RN = b सेमी तथा

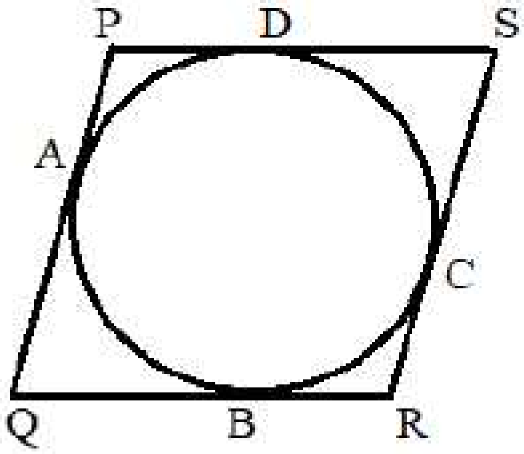
QL = c सेमी है ।



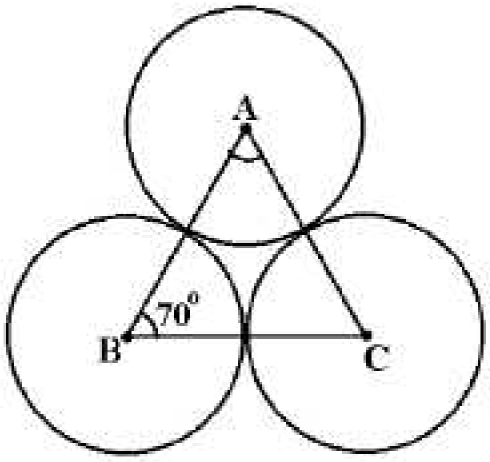
22. यदि वृत के एक बिंदु 'C' पर स्पर्श रेखा और उसके व्यास AB को आगे बढाए जाने पर वह बिन्दु 'P' पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा $\angle PCA = 110^\circ$, तो $\angle CBA$ का मान बताइए ।



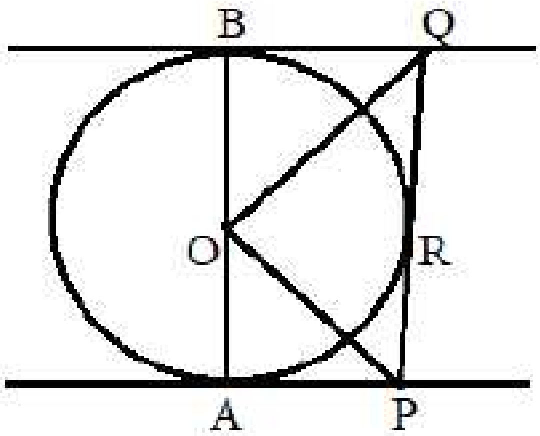
23. आकृति में, चतुर्भुज PQRS का परिमाप बताइए, यदि PA = 3 सेमी, DS = 4 सेमी, SR = 7 सेमी तथा QB = 4 सेमी है ।



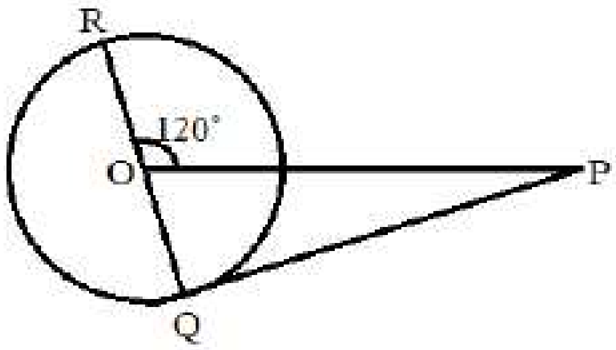
24. निम्न आकृति में तीन वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं | केंद्र A वाले वृत्त की त्रिज्या 'r' सेमी है तथा B और C समान त्रिज्या 3.8 सेमी वाले वृत्तों के केंद्र हैं | यदि $\angle ABC = 70°$ है, तो $\angle BAC$ का मान बताइए |



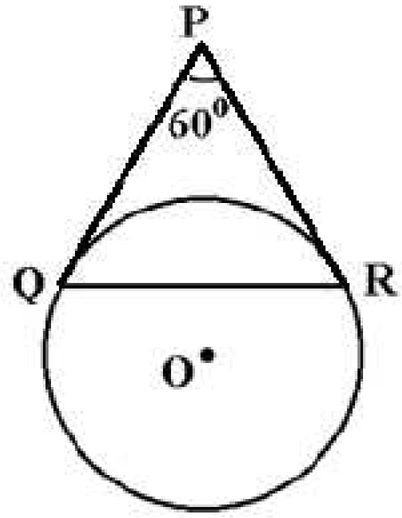
25. यदि BQ, QP और AP केंद्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं, तो $\frac{4\angle QOP}{5}$ का मान ज्ञात कीजिए |



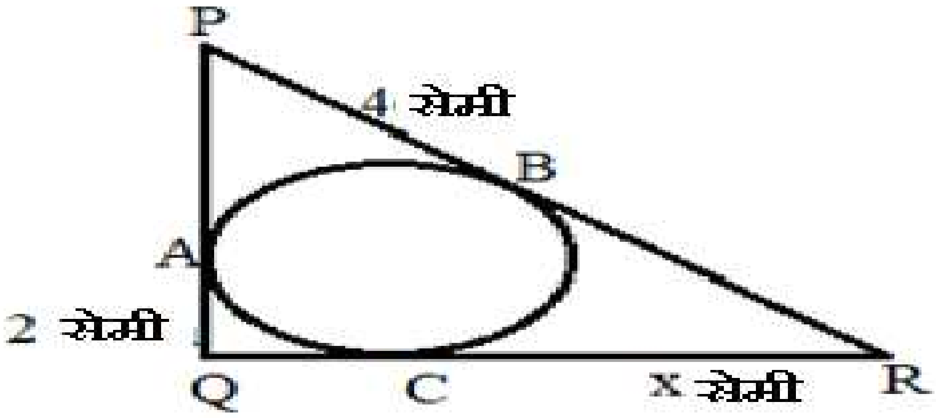
26. एक बाहरी बिंदु P से केंद्र O वाले एक वृत्त पर PQ स्पर्श रेखा है | यदि QR वृत्त का व्यास है और $\angle POR = \angle 120°$, तो $\angle OPQ$ का माप बताइए |



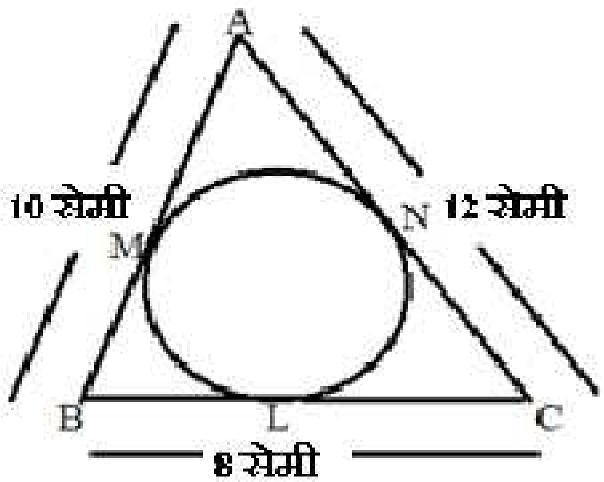
27. दी गई आकृति में PQ और PR केंद्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं | यदि $PQ = 5$ सेमी तथा $\angle QPR = 60°$ है, तो जीवा QR की लंबाई का मान बताइए |



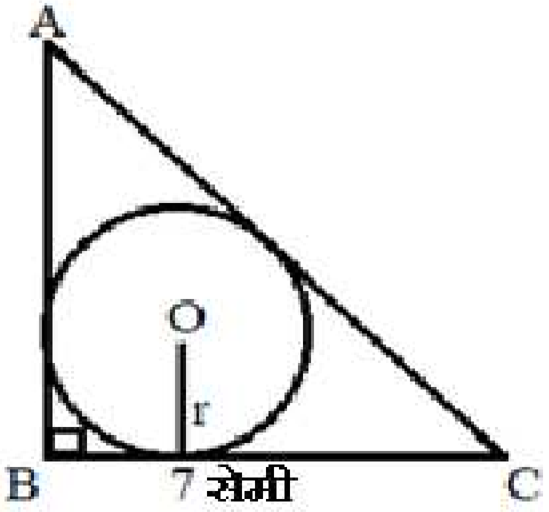
28. आकृति में, 'x' का मान बताइए, यदि ΔPQR का परिमाप 24 सेमी. हैं |



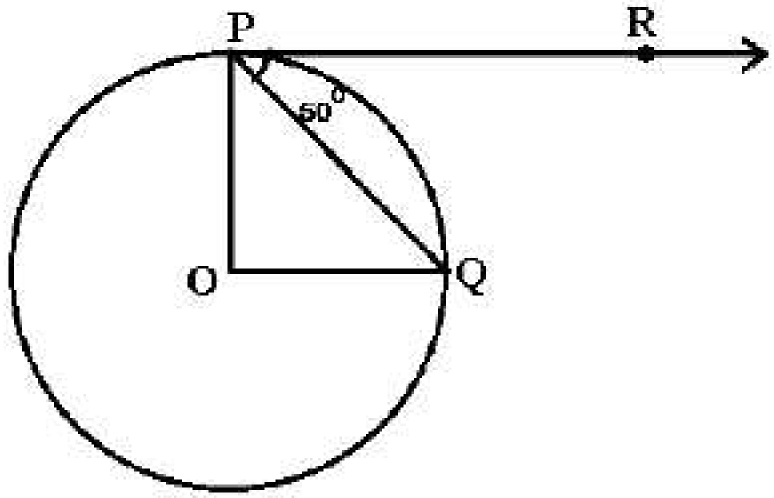
29. आकृति में, BL की लंबाई बताइए|



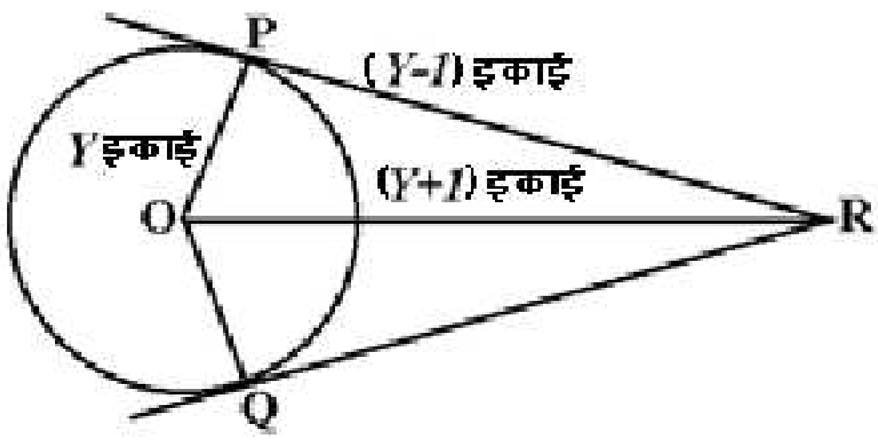
30. आकृति में, यदि AC − AB = 1 सेमी है, तो 'r' का मान बताइए|



31. दी गई आकृति में, O एक वृत का केंद्र है| PQ एक जीवा है और P पर स्पर्श रेखा PR , PQ के साथ 50° का कोण बनाती है तो ∠POQ का मान बताइए |

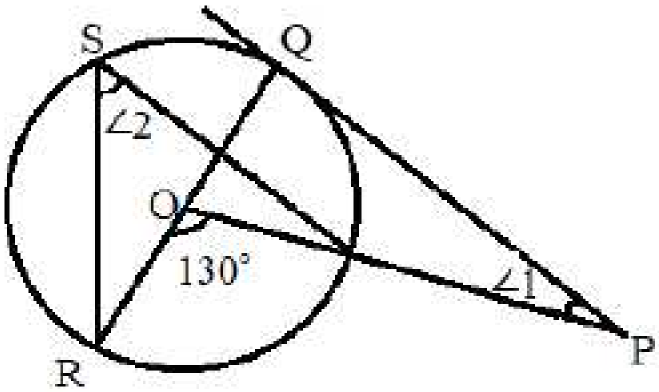


32. दी गई आकृति में, Y का मान बताइए |

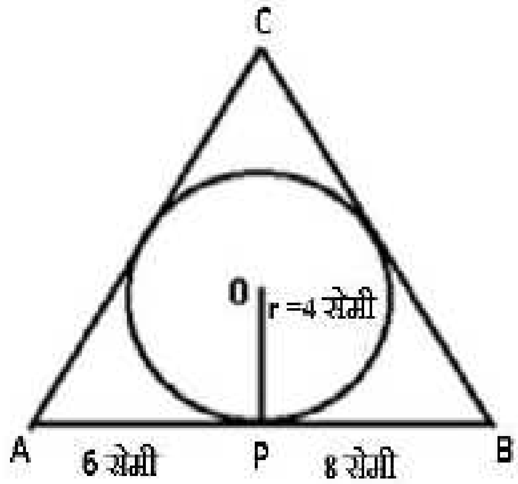


33. आकृति में, यदि बाह्य बिंदु P से PQ एक स्पर्श रेखा है तथा ∠POR = 130° है, तो

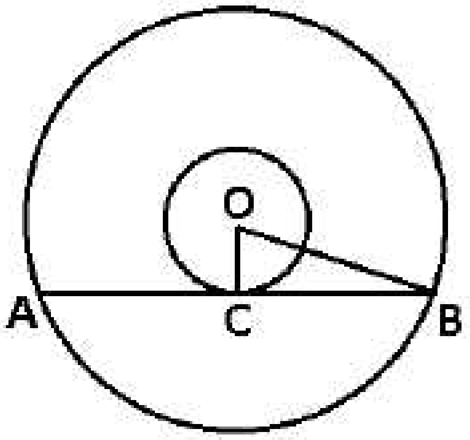
$\angle 1 + \angle 2$ का मान बताइए |



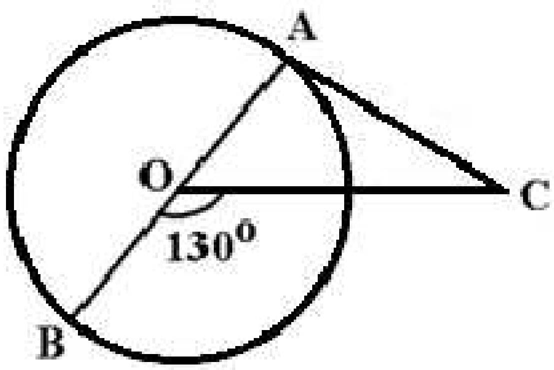
34. आकृति में, यदि ΔABC का क्षेत्रफल 84 वर्ग सेमी है, तो AC + BC की लंबाई का मान बताइए |



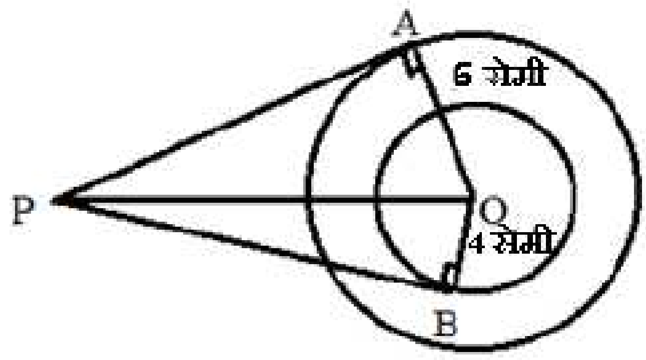
35. आकृति में, यदि AB = 48 सेमी और OC = 7 सेमी है, तो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याओं का अंतर बताइए |



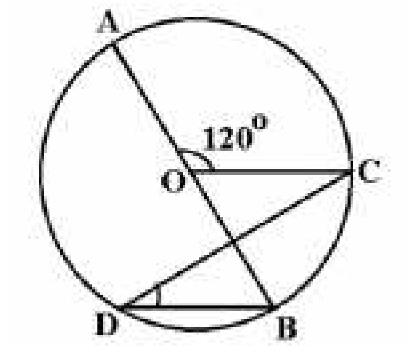
36. दी गई आकृति में, केंद्र O वाले वृत्त का व्यास AB है | AC बिन्दु A पर वृत्त की स्पर्श रेखा है| यदि $\angle BOC = 130°$ है, तो $\angle ACO$ का मान बताइए |



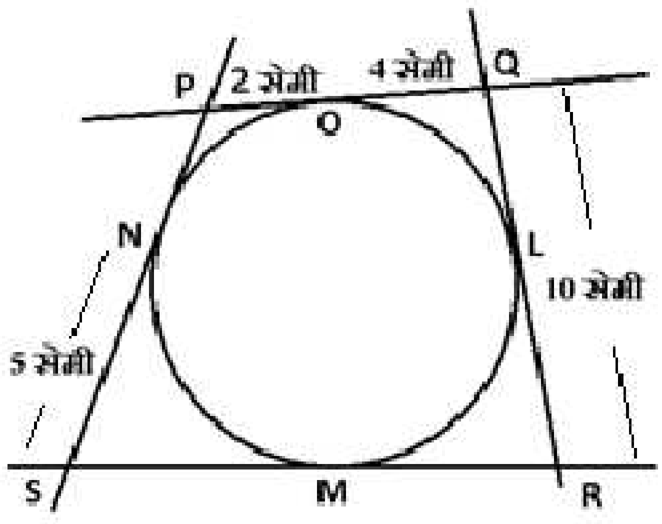
37. आकृति में, यदि PO − PA = 2 सेमी है, तो BP का मान बताइए |



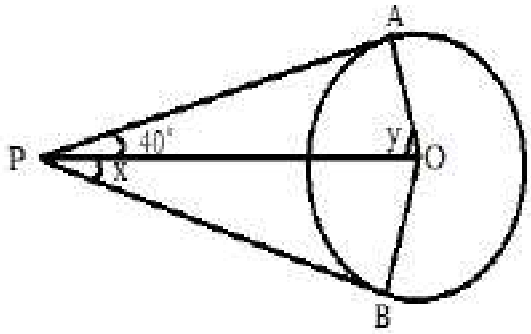
38. दी गई आकृति में, AOB एक वृत्त का व्यास है जिसका केंद्र O है| यदि $\angle AOC = 120°$ तो $\angle BDC$ का मान बताइए |



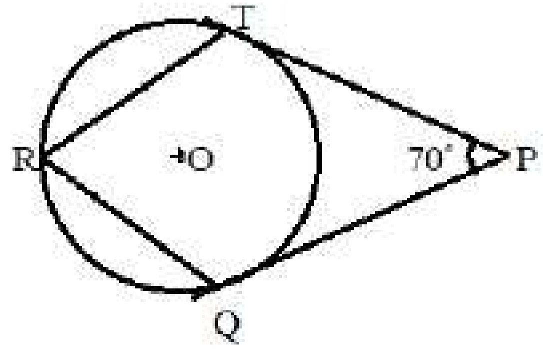
39. आकृति में, (PQ + QR + RS − SP) का मान बताइए |



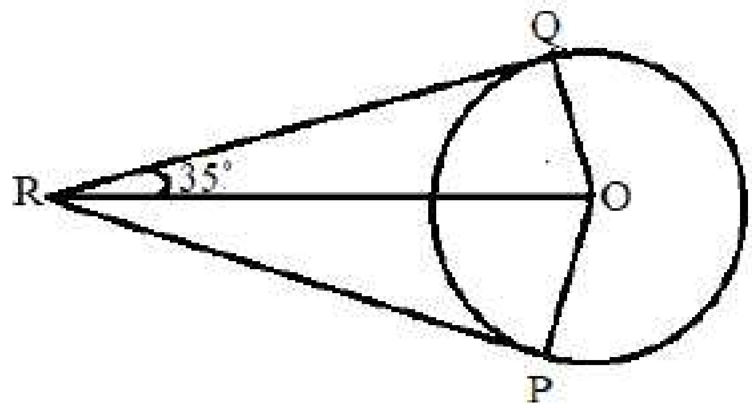
40. आकृति में, $(4y - 5x)$ का मान बताइए ।



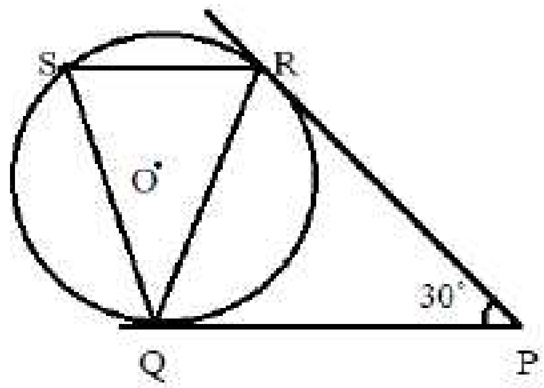
41. आकृति में, $\angle TPQ = 70^\circ$, $\angle TRQ$ का मान बताइए ।



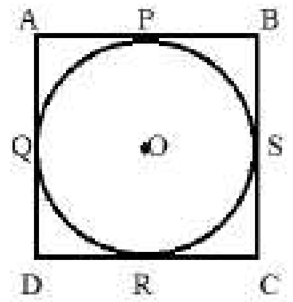
42. आकृति में, $(\angle QOP - \angle ROP)$ का मान बताइए ।



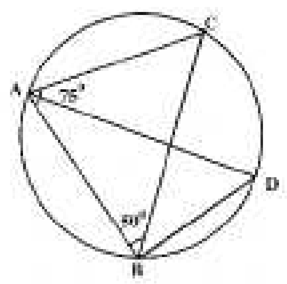
43. आकृति में, $SR \parallel QP$, $\angle RQS$ का मान बताइए ।



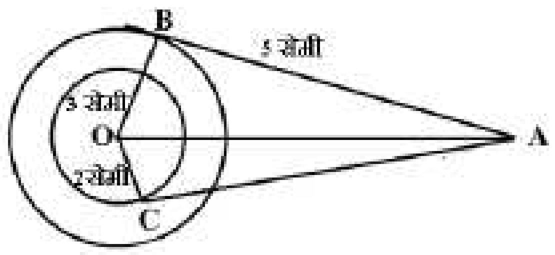
44. आकृति में, यदि AB = 15.5 सेमी और CD = 16 सेमी है, तो चतुर्भुज ABCD का परिमाप बताइए |



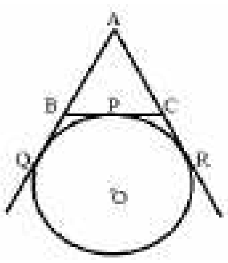
45. दी गई आकृति में $\angle CAB = 75°$ तथा $\angle CBA = 50°$, $\angle DAB + \angle ABD$ का मान बताइए |



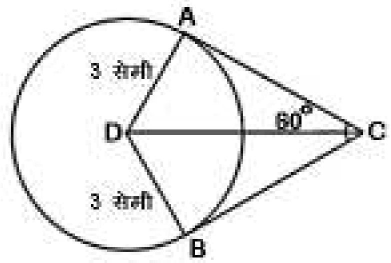
46. दी गई आकृति में, AB बाह्य वृत्त की स्पर्श रेखा है तथा AC आंतरिक वृत्त की स्पर्श रेखा है| यदि AB = 5 सेमी, OB = 3 सेमी और OC = 2 सेमी हैं, तो AC की लंबाई का मान बताइए |



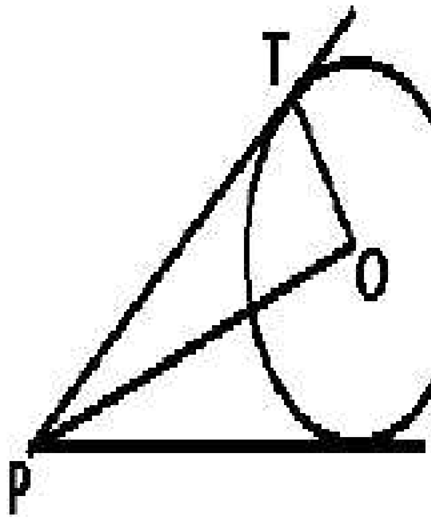
47. आकृति में, यदि AB = 2x सेमी, AC = 4y सेमी, BC = 6z सेमी, तो AQ का मान बताइए |



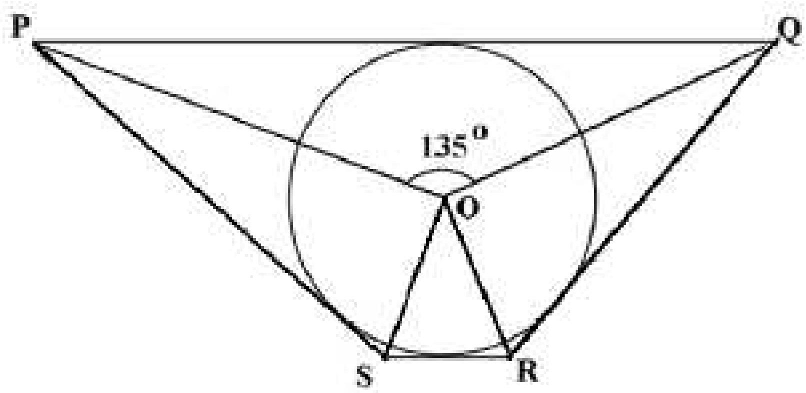
48. यदि 3 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत पर 60° कोण पर झुकी हुई दो स्पर्श रेखाएँ खींची जाएँ तो प्रत्येक स्पर्श रेखा की लंबाई बताइए |



49. आकृति में, यदि OT : TP = 3: 4 और OP = 10 सेमी, तो वृत की त्रिज्या का मान बताइए |



50. दी गई आकृति में यदि ∠POQ = 135° तो ∠ROS बताइए |



उत्तर

प्र. सं.	उत्तर	प्र. सं.	उत्तर
1	24 सेमी	26	30°
2	$8\sqrt{2}$ सेमी	27	5 सेमी
3	30°	28	6
4	30°	29	3 सेमी
5	55°	30	3 सेमी
6	16 सेमी	31	100°
7	7.5 सेमी	32	Y = 4
8	80°	33	105°
9	21 सेमी	34	28 सेमी
10	80°	35	18 सेमी
11	145°	36	40°
12	10 सेमी	37	$\sqrt{84}$ सेमी या $2\sqrt{21}$ सेमी
13	8a सेमी	38	30°
14	30°	39	20 सेमी
15	61°	40	0
16	150°	41	55°
17	28 सेमी	42	55°
18	11 सेमी	43	30°
19	6 सेमी	44	63 सेमी
20	36 सेमी	45	125°
21	2(a + b + c) सेमी	46	$\sqrt{30}$ सेमी
22	70°	47	(x + 2y + 3z) सेमी
23	28 सेमी	48	$3\sqrt{3}$ सेमी
24	40°	49	6 सेमी
25	72°	50	45°

अध्याय-10

वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

याद रखने योग्य बिंदु

- वृत्त की परिधि और क्षेत्रफल

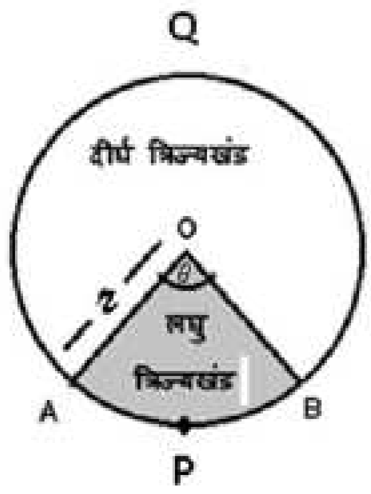
परिधि : एक वृत्त की परिधि इसकी सीमा की लंबाई होती है|

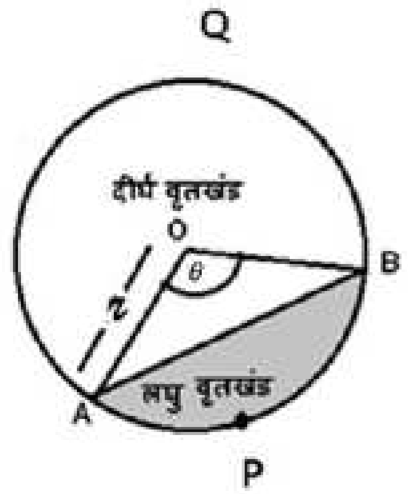
वृत्त की परिधि $= 2\pi r = \pi d$

क्षेत्रफल : एक वृत्त का क्षेत्रफल उसकी सीमा से घिरे क्षेत्र का माप है|

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$(जहाँ r वृत्त की त्रिज्या और d वृत्त का व्यास है)

- वृत्त की परिधि को वृत्त के परिमाप के रूप में भी जाना जाता है|
- त्रिज्यखंड और वृत्तखंड का क्षेत्रफल





त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$ (जहाँ $\theta = \angle AOB$)

त्रिज्यखंड OAPB की संगत चाप की लंबाई = $\frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

त्रिज्यखंड OAPB का परिमाप = $\frac{\theta}{360°} \times 2\pi r + 2r$

- कोई भी जीवा एक वृत्त को दो भागों में विभाजित करती है |बड़ा भाग दीर्घ वृत्तखंड और छोटा भाग लघु वृत्तखंड कहलाता है|
- लघु वृत्तखंड APB का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल – ΔOAB का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta \quad (\text{जहाँ } \theta = \angle AOB)$$

- दीर्घ वृत्त खंड का क्षेत्रफल = πr^2 – लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

प्रश्नावली

1. यदि एक वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल का $\frac{7}{18}$ है, तो वृत्त के त्रिज्यखंड के संगत कोण का माप बताइए |
2. एक वृत्त की परिधि और व्यास के बीच का अंतर 30 सेमी है, वृत्त की त्रिज्या बताइए |
3. एक ऐसे त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल बताइए जिसका परिमाप उसकी त्रिज्या(r) का 4 गुना है|
4. एक घड़ी की घंटे की सुई 6 सेंटीमीटर लंबी है| 11 : 20 पूर्वाह्न और 11 : 55 पूर्वाह्न के बीच घंटे की सुई द्वारा बने क्षेत्र का क्षेत्रफल (वर्ग सेमी में) बताइए |
5. केंद्रीय कोण 90° और 8 सेमी की त्रिज्या वाले वृत्त के वृत्तखंड का क्षेत्रफल(π के संदर्भ में) बताइए |
6. उस वृत्त का क्षेत्रफल बताइए जिसकी परिधि 44 सेमी है |
7. एक वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल बताइए जिसकी त्रिज्या 10 सेमी तथा संगत चाप की लंबाई 30 सेमी है |
8. 21 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त में चाप केंद्र पर 30° का कोण बनाती है | उस चाप की लंबाई बताइए |

9. यदि किसी वृत्त की परिधि एक वर्ग के परिमाप के बराबर है, तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात बताइए (π के रूप में)।

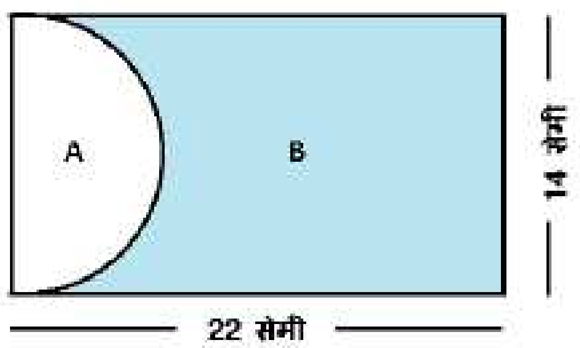
10. उस सबसे बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल बताइए जो 85 मीटर त्रिज्या के अर्धवृत्त के अंतर्गत बना है।

11. एक अर्धवृत्ताकार चाँदे का परिमाप 108 सेमी है, चाँदे का व्यास बताइए।

12. यदि वृत्त की त्रिज्या 40% बढ़ा दी जाए, तो बताइए उसके क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत वृद्धि होगी ?

13. एक वर्ग की भुजा 14 सेमी है।उस वृत्त का क्षेत्रफल बताइए जो इस वर्ग के परिगत बनाया गया है।

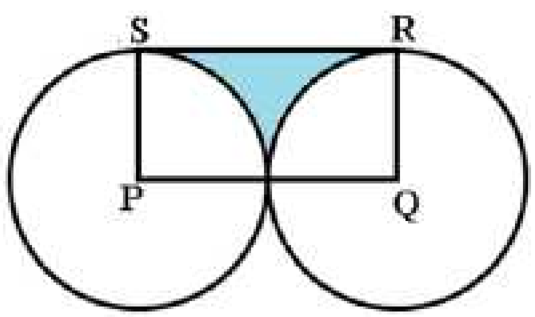
14. दी गई आकृति में 'भाग A' का क्षेत्रफल बताइए।



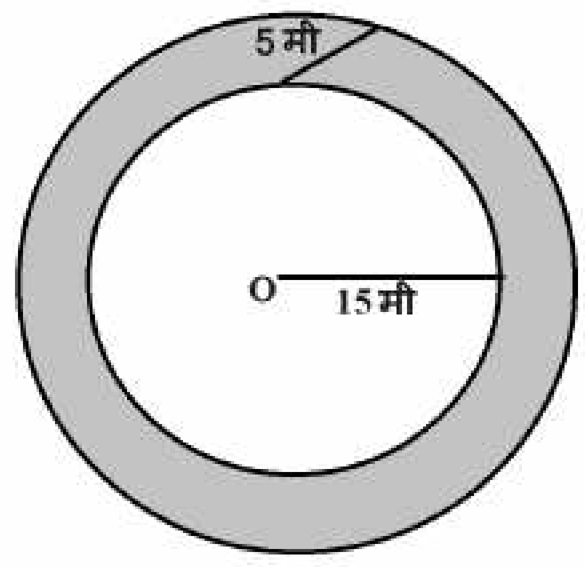
15. प्रश्न संख्या 14 में दी गई आकृति में 'भाग B' का क्षेत्रफल बताइए।

16. प्रश्न संख्या 14 में दी गई आकृति में, 'भाग B' और 'भाग A' के क्षेत्रफलों का अनुपात बताइए।

17. दी गई आकृति में 7 सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त दर्शाए गए हैं। PQRS एक आयत है और PS और QR त्रिज्याएँ हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए।



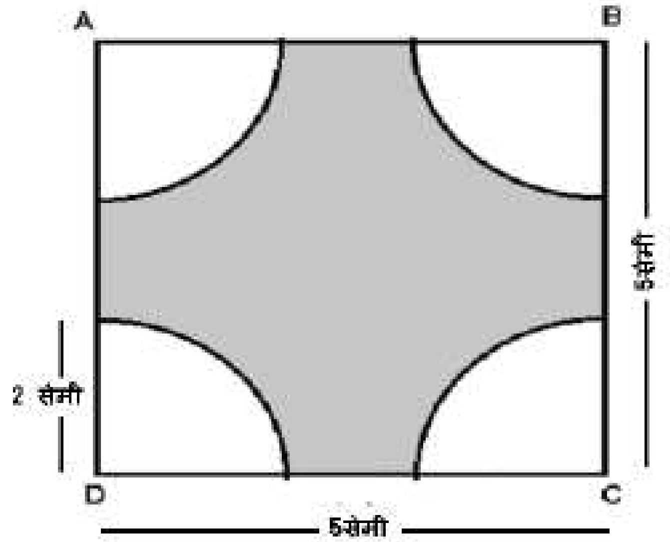
18. दी गई आकृति में 15 मी त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार पार्क के बाहर 5 मी चौड़ा वृत्ताकार पथ बनाया गया है |



(i) वृत्तों के परिमापों का योग बताइए |

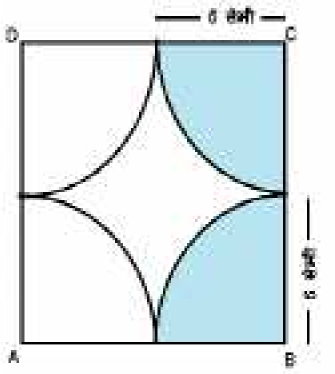
(ii) पथ का क्षेत्रफल बताइए |

19. दी गई आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए (π के रूप में)|



20. प्रश्न संख्या 19 में दी गई आकृति में छायांकित भाग का परिमाप π के रूप में बताइए |

21. दी गई आकृति में ABCD एक आयत है जिसकी प्रत्येक भुजा 12 सेमी है | प्रत्येक शीर्ष पर 6 सेमी त्रिज्या का एक चतुर्थांश बनाया गया है | निम्न का मान बताइए :

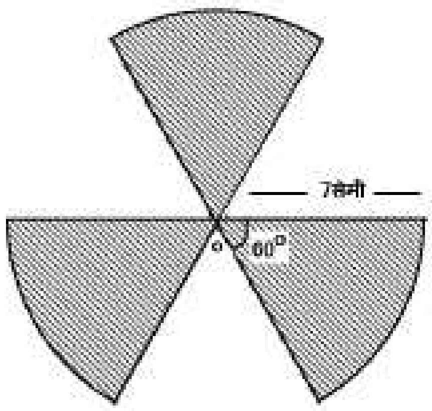


(i) छायांकित भाग का क्षेत्रफल (π के रूप में)|

(ii) छायांकित भाग का परिमाप (π के रूप में)|

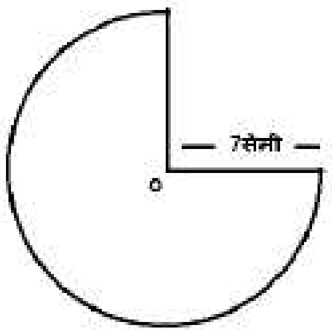
(iii) अछायांकित भाग का क्षेत्रफल (π के रूप में)|

22. दी गई आकृति में,O केंद्र वाले तीनों बराबर त्रिज्यखंडो का कुल क्षेत्रफल बताइए| ($\pi = \frac{22}{7}$)



23. प्रश्न संख्या 22 में दी गई आकृति का परिमाप बताइए |

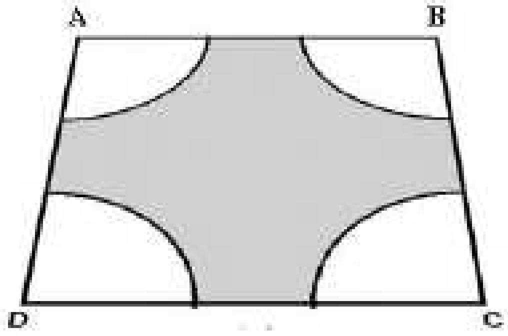
24. दी गई आकृति का परिमाप बताइए जहाँ O वृत्त का केंद्र है |



25. स्टील के एक तार को जब वर्ग के आकार में मोड़ा जाता है तो इसके द्वारा आन्तरित क्षेत्रफल 121 वर्ग सेमी है |यदि इसी तार को एक वृत्त के रूप में मोड़ा जाए तो वृत्त का क्षेत्रफल बताइए |

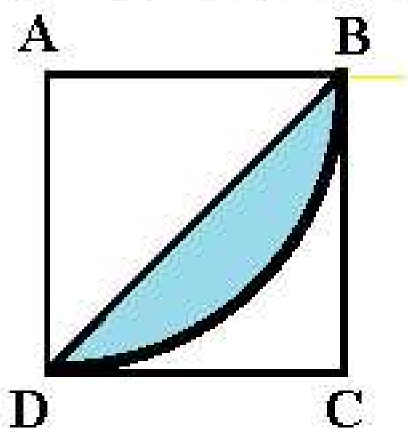
26. एक साइकिल का पहिया 500 चक्कर में 1.1 किलोमीटर की दूरी तय करता है | साइकिल के पहिये का व्यास(सेमी में) बताइए |

27. दी गई आकृति में ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें AB ∥ DC, AB = 18 सेमी ,DC = 32 सेमी तथा AB और DC के बीच की दूरी 14 सेमी है |यदि A, B, C तथा D को केंद्र मानकर 7 सेमी की चाप खींची जाए, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए |

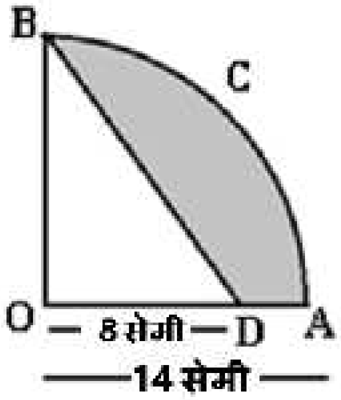


28. दो वृत्त एक दूसरे को बाह्य रूप से स्पर्श करते हैं |वृत्त के केन्द्रों के बीच की दूरी 14 सेमी है और उनके क्षेत्रफलों का योग 308 वर्ग सेमी है, वृत्तों की त्रिज्याओं (सेमी में) के बीच का अंतर बताइए |

29. दी गई आकृति में ABCD एक वर्ग है जिसका विकर्ण $7\sqrt{2}$ सेमी है और A को केंद्र मानकर चाप BD खींचा गया है, π के संदर्भ में छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए |

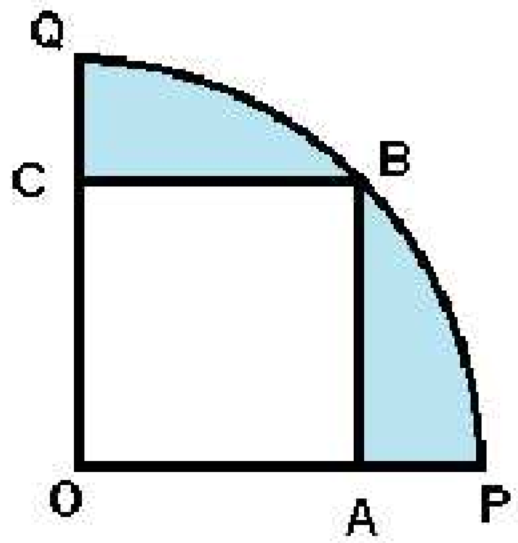


30. दी गई आकृति में, यदि O केंद्र तथा त्रिज्या 14 सेमी वाले वृत्त में यदि OACB एक चतुर्थांश है तथा OD = 8 सेमी है , तो $\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करके छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए |

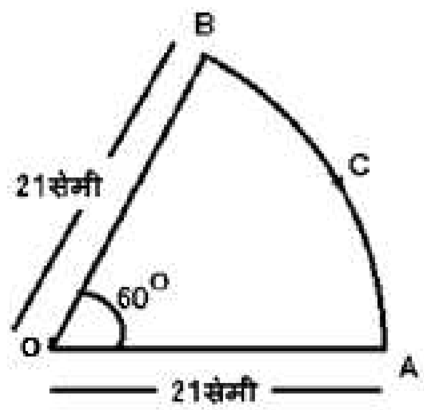


31. दी गई आकृति में किसी वृत्त के चतुर्थांश में एक वर्ग OABC अंतरित है | यदि OA = 20 सेमी हो, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए |

($\pi = 3.14$ का प्रयोग करें)



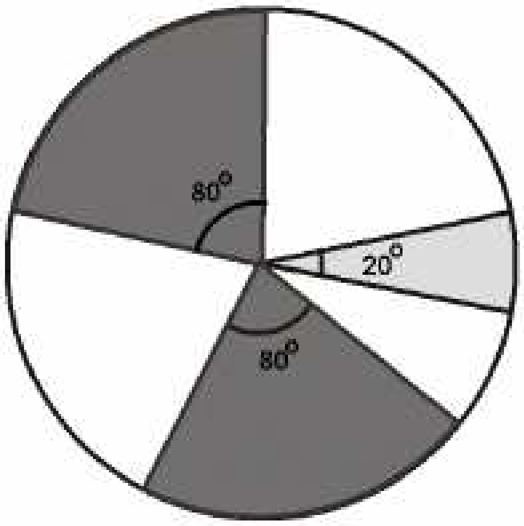
32. दी गई आकृति में OACB का परिमाप बताइए |



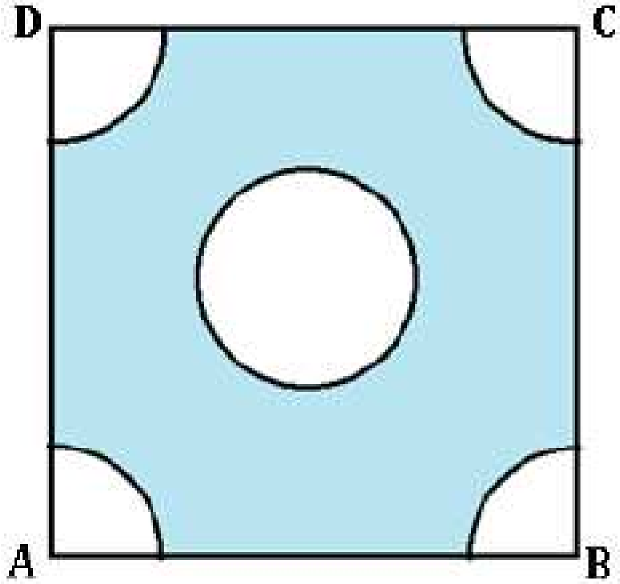
33. यदि एक चाँदे का व्यास 14 सेमी है तो उसका परिमाप बताइए |

34. एक वृत्त का व्यास बताइए जिसका क्षेत्रफल व्यास $2(a^2 - b^2)$ सेमी और व्यास 4ab सेमी वाले दो वृत्तों के क्षेत्रफल के योग के बराबर है |

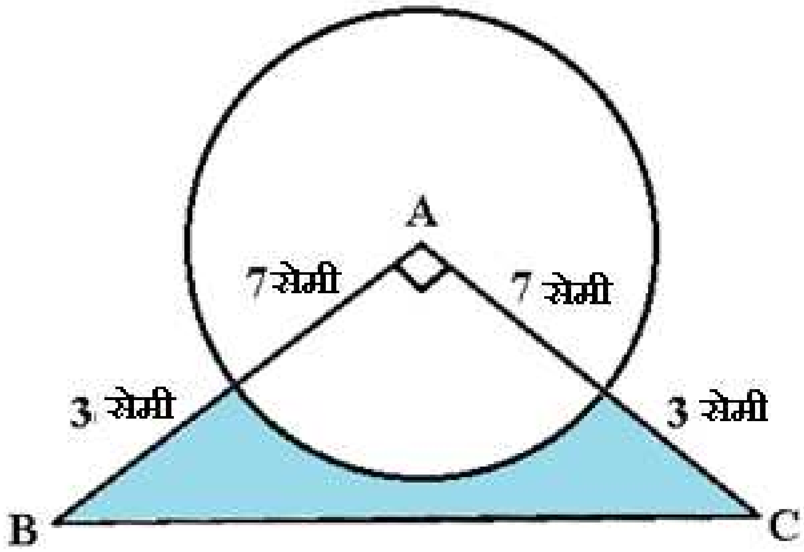
35. दी गई आकृति में ,एक वृत्त जिसका व्यास 7 सेमी है उस वृत्त के तीन त्रिज्यखंड दिए गए है जो वृत्त के केंद्र पर क्रमशः $20°, 80°$ और $80°$ का कोण अंतरित करते हैं |छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए |



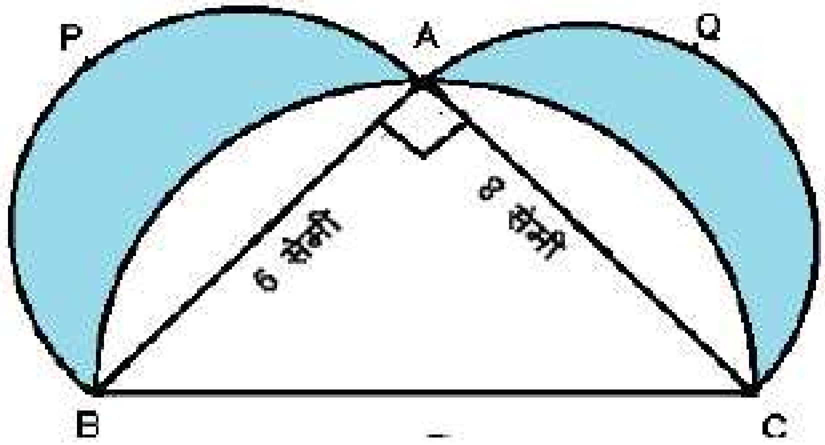
36. दी गई आकृति में ,ABCD 5 सेमी भुजा वाला एक वर्ग है |वर्ग के शीर्षों को केंद्र मान कर 1 सेमी त्रिज्या वाले चतुर्थांश बनाये गए है तथा वर्ग के अंदर एक 2 सेमी व्यास वाला वृत्त भी बनाया गया है |छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए |($\pi = 3.14$ का प्रयोग करें)



37. आकृति में दर्शाए अनुसार एक डिज़ाइन बनाया गया है, छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए |



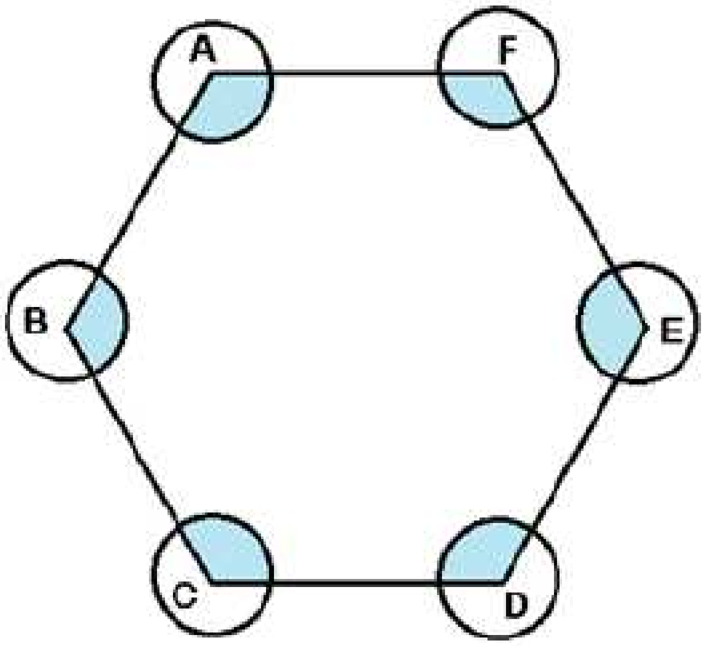
38. दी गई आकृति में ΔBAC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle A = 90^\circ$ है और AB, AC तथा BC को व्यास मानकर तीन अर्धवृत्त बनाए गए है |यदि AB = 6 सेमी तथा AC=8 सेमी है तो छायांकित भाग का परिमाप बताइए |



39. दो वृत्त आंतरिक रूप से स्पर्श करते हैं और इन दो वृत्तों की परिधि 88 सेमी और 44 सेमी है| उनके केंद्रों के बीच की दूरी बताइए |

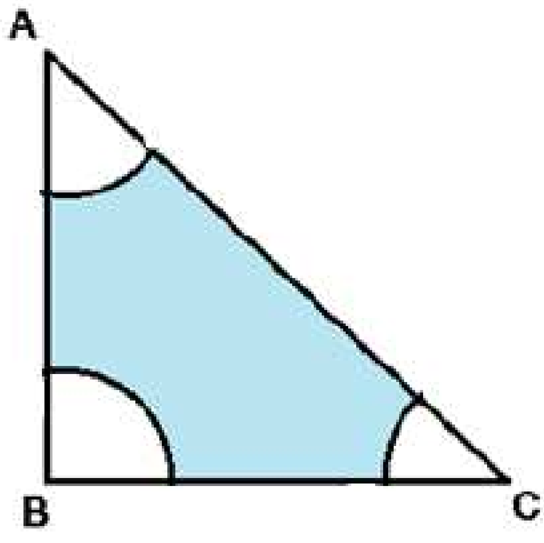
40. दो वृत्त आंतरिक रूप से स्पर्श करते हैं, उनके क्षेत्रफलों का योग 116π वर्ग सेमी है और उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 6सेमी है, वृत्तों की त्रिज्याओं का योगफल बताइए |

41. दी गई आकृति में ABCDEF एक समषट्भुज है ,जिसके शीर्षों को केंद्र मानकर 7 सेमी त्रिज्याओं के वृत्त खींचे गए है |छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए |

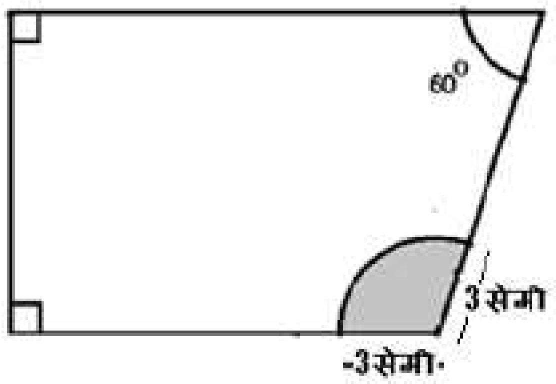


42. दी गई आकृति में त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B तथा C को केंद्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या वाले तीन त्रिज्यखंड बनाये गए है| यदि AB=10 सेमी , BC= 24 सेमी और CA= 26 सेमी हो, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए |

(π के रूप में)

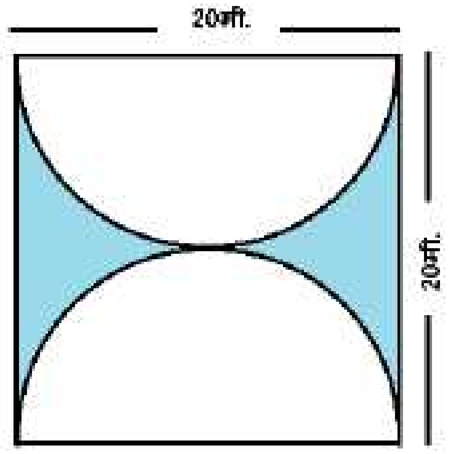


43. दी गई आकृति में ,छायांकित भाग का परिमाप बताइए (π के रूप में)|



44. प्रश्न संख्या 43 में दी गई आकृति में ,छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए (π के रूप में)|

45. दी गई आकृति में ,छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए (π के रूप में)|

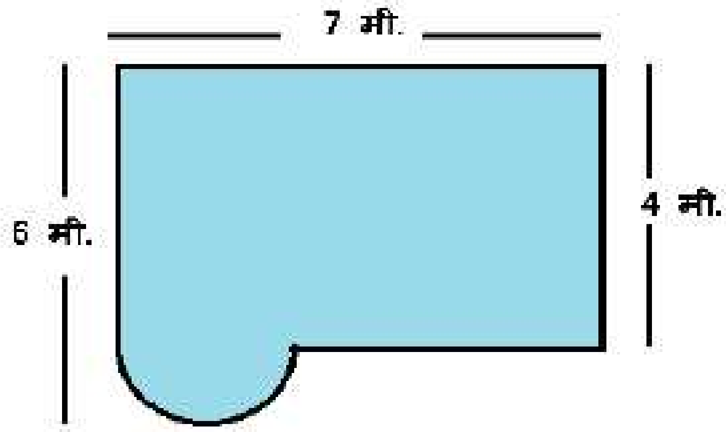


46. प्रश्न संख्या 45 में दी गई आकृति में ,छायांकित भाग का परिमाप बताइए (π के रूप में)|

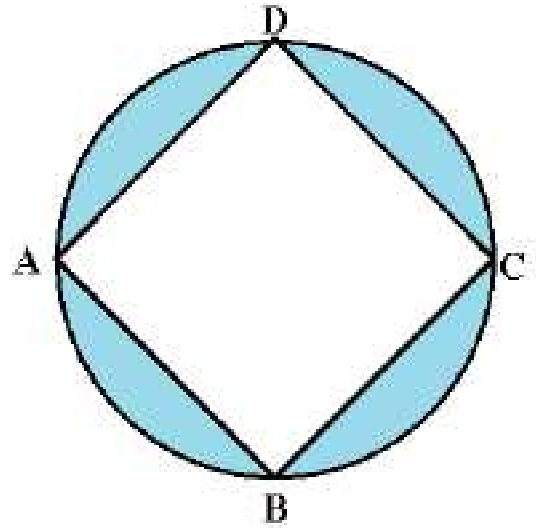
47. दी गई आकृति में ,निम्न को (π के रूप में) बताइए :

(i) छायांकित भाग का क्षेत्रफल

(ii) छायांकित भाग का परिमाप

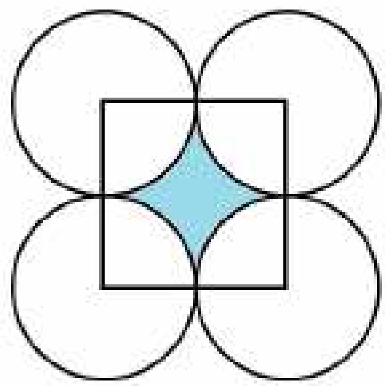


48. दी गई आकृति में, ABCD एक वर्ग है जिसकी भुजा $7\sqrt{2}$ सेमी है और वर्ग ABCD के परिगत एक वृत्त खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए |

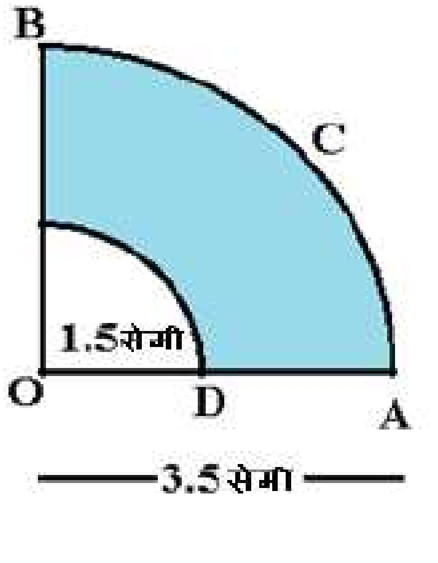


49. चार समान वृत्त जिसमें प्रत्येक की त्रिज्या 7 सेमी है, एक दूसरे को स्पर्श करतें हैं जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है| छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए |

(π = 22/7)



50. OACB केंद्र O और 3.5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त का चतुर्थांश है| यदि OD = 1.5 सेमी है तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल बताइए |



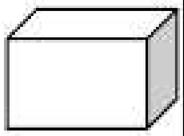
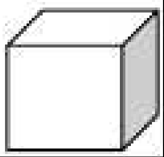
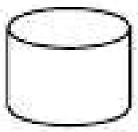
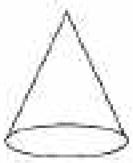
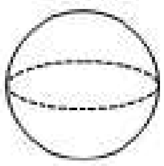
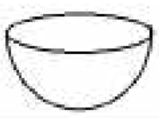
उत्तर

प्र. सं.	उत्तर	प्र. सं.	उत्तर
1	140°	26	70 सेमी
2	7 सेमी	27	196 वर्ग सेमी
3	r^2 वर्ग सेमी	28	0
4	5.5 वर्ग सेमी	29	$\frac{49}{4}(\pi - 2)$ वर्ग सेमी
5	$(16\pi - 32)$ वर्ग सेमी	30	98 वर्ग सेमी
6	154 वर्ग सेमी	31	228 वर्ग सेमी
7	150 वर्ग सेमी	32	64 सेमी
8	11 सेमी	33	36 सेमी
9	$4:\pi$	34	$2(a^2 + b^2)$ सेमी
10	7225 वर्ग मी	35	19.25 वर्ग सेमी
11	42 सेमी	36	18.72 वर्ग सेमी
12	96%	37	11.5 वर्ग सेमी
13	308 वर्ग सेमी	38	$37\frac{5}{7}$ सेमी
14	77 वर्ग सेमी	39	7 सेमी
15	231 वर्ग सेमी	40	14 सेमी
16	3:1	41	308 वर्ग सेमी
17	21 वर्ग सेमी	42	$(120 - 8\pi)$ वर्ग सेमी
18	(i)220मी (ii) 550 वर्ग मी	43	$(2\pi + 6)$सेमी
19	$(25 - 4\pi)$ वर्ग सेमी	44	3π वर्ग सेमी
20	$(4\pi + 4)$सेमी	45	$(400 - 100\pi)$ वर्ग सेमी
21	(i) 18π वर्ग सेमी (ii) $[6(\pi + 4)]$सेमी (iii) $[144\text{-}18\pi]$वर्ग सेमी	46	$(40 + 20\pi)$मी
22	77 वर्ग सेमी	47	(i)$(28 + 2\pi)$वर्ग मी (ii)$(18 + 2\pi)$मी
23	64सेमी	48	56 वर्ग सेमी
24	47सेमी	49	42 वर्ग सेमी
25	154 वर्ग सेमी	50	$7\frac{6}{7}$ वर्ग सेमी

अध्याय-11

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

याद रखने योग्य बिंदु

ठोस का नाम	वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल	कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल	आयतन
 घनाभ	$2(l+b)h$	$2(lb+bh+hl)$	lbh
घन 	$4(\text{किनारा})^2$	$6(\text{किनारा})^2$	$(\text{किनारा})^3$
लम्ब वृतीय बेलन 	$2\pi rh$	$2\pi r(h+r)$	πr^2h
लम्ब वृतीय शंकु 	πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2h$
गोला 	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
अर्ध गोला 	$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$

प्रश्नावली

1. एक घन का विकर्ण $\sqrt{108}$ मी है| घन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए |

2. यदि एक घन के प्रत्येक किनारे में 50% वृद्धि की जाए तो बताइए उसके कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत वृद्धि होगी ?

3. एक घन का आयतन $3\sqrt{3}a^3$ घन इकाई है| उसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए|

4. एक घनाभाकार टैंक 6 मी लम्बा, 5 मी चौड़ा तथा 4.5 मी गहरा है| बताइए उसमें कितने लीटर पानी आ सकता है ?

5. यदि एक लम्ब वृतीय बेलन के आधार की त्रिज्या में 75% वृद्धि की जाती है तथा उसकी उंचाई में 50% कमी की जाती है तो बताइए कि बेलन के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत वृद्धि/ कमी होगी ?

6. तीन ठोस गोले जिनके व्यास क्रमशः 6 सेमी 8 ,सेमी तथा 10 सेमी है को पिघलाकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है | नए ठोस गोले का व्यास बताइए |

7. एक खोखला लोहे का पाइप 21 सेमी लम्बा है और इसका बाहरी व्यास 8 सेमी है | यदि पाइप की मोटाई 1 सेमी है तो पाइप का आयतन (π के रूप में) बताइए |

8. सबसे बड़े लम्ब वृत्ताकार शंकु का आयतन (π के रूप में) बताइए जिसे एक 12 सेमी के घन से काटा जा सकता है |

9. यदि घन की प्रत्येक भुजा को तीन गुना कर दिया जाए तो बताइए उसके कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत वृद्धि होगी ?

10. 60 वृत्ताकार थाली जिनकी प्रत्येक की त्रिज्या 60 सेमी और मोटाई 1 सेमी का एक तिहाई है, को एक के ऊपर एक रखकर ठोस वृत्ताकार बेलन का रूप दिया गया है| इस प्रकार बने बेलन का

(i) सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए |

(ii) आयतन बताइए |

11. दो शंकुओं के आयतनों का अनुपात 1:4 है तथा उनके व्यास का अनुपात 4:5 है, तो उनकी ऊँचाइयों का अनुपात बताइए |

12. यदि घन के प्रत्येक किनारे में 25% की कमी की जाती है, तो मूल घन के आयतन और नए घन के आयतन का अनुपात बताइए |

13. एक ठोस घनाभ जिसकी विमाएँ 100 सेमी $\times$ 80 सेमी $\times$ 64 सेमी हैं को पिघलाकर एक ठोस घन बनाया जाता है |इस प्रकार प्राप्त घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए |

14. एक लम्ब वृतीय शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई 2:3 के अनुपात में हैं | शंकु की तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए, यदि शंकु का आयतन 100.48 घन सेमी है| $(\pi = 3.14)$

15. एक गोलाकार गुब्बारे में से हवा निकालने पर उसकी त्रिज्या 21 सेमी से घटकर 14 सेमी रह जाती है| बताइए गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत कमी हुई ?

16. 1 मीटर भुजा वाले एक बड़े घनाकार बॉक्स में 5 सेमी भुजा वाले कितने छोटे घन आ सकते हैं ?

17. एक विद्यार्थी चिकनी मिट्टी से एक लम्ब वृत्ताकार शंकु बनाता है, जिसकी ऊँचाई 48 सेमी तथा आधार की त्रिज्या 12 सेमी है| दूसरा विद्यार्थी उस शंकु को एक गोले में बदल देता है | इस प्रकार प्राप्त गोले का व्यास बताइए |

18. एक दुकानदार के पास एक गोलाकार लड्डू है जिसकी त्रिज्या 6 सेमी है| बताइए उस एक लड्डू से 1.5 सेमी त्रिज्या वाले कितने गोलाकार लड्डू बनाये जा सकते है ?

19. 1सेमी, 6 सेमी और 8 सेमी किनारे वाले तीन ठोस घनों को पिघलाकर एक नया घन बनाया जाता है | नए घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए |

20. धातु के एक ठोस घनाभ जिसकी वीमाएँ 11 सेमी $\times$ 7 सेमी $\times$ 7 सेमी हैं, को पिघलाकर त्रिज्या $\frac{7}{2}$ सेमी वाले 'n' ठोस गोले बनाए जाते हैं | n का मान बताइए |

21. यदि 18 सेमी व्यास के एक लोहे के ठोस गोले को 4 मि.मी व्यास के तार में ढाला जाता है, तो तार की लंबाई बताइए |

22. एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई का योगफल $6\sqrt{3}$ सेमी है तथा उसके एक विकर्ण की लंबाई $2\sqrt{3}$ सेमी है | घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए |

23. यदि एक बेलन और शंकु के आधारों की त्रिज्या 3:4 के अनुपात में है और उनकी ऊँचाई 2:3 के अनुपात में है ,तो उनके आयतनों का अनुपात बताइए |

24. दो लम्ब वृत्ताकार बेलनों A और B के आधार की त्रिज्या 3:2 के अनुपात में है और उनकी ऊँचाई n : 1 के अनुपात में है |यदि बेलन A का आयतन बेलन B के आयतन का तीन गुना है ,तो n का मान बताइए |

25. दो लोहे की गोलाकार गेंदे जिन दोनों का व्यास 6 सेमी है, को पानी से आधे भरे बेलनाकार बर्तन, जिसकी त्रिज्या 6 सेमी है, में डुबाया जाता है |बताइए कि पानी का स्तर कितना बढेगा ?

26. एक गाड़ी के पहिये का व्यास 42 सेमी है| बताइए 132 किमी की दूरी तय करने के लिए इसे कितने चक्कर लगाने पड़ेंगे ?

27. एक चाँदी से बने ठोस शंकु का द्रव्यमान बताइए जिसका व्यास 14 सेमी और ऊँचाई 30 सेमी है ,यदि चाँदी का घनत्व 10 ग्राम प्रति घन सेमी है|

28. गर्वित एक गणितीय मॉडल बना रहा है जिसमें वह 20 सेमी किनारे वाले चार घनों को एक के ऊपर एक रखता है| इस प्रकार प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए |

29. एक ठोस गोले की त्रिज्या 'r' सेमी है| इसे 4 बराबर भागों में बाँटा जाता है| चारों भागों का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए |

30. धातु से बने एक खोखले गोले का भार बताइए यदि उसका आंतरिक और बाहरी व्यास क्रमशः 8 सेमी तथा 10 सेमी है और 1 घन सेमी धातु का भार 21ग्राम है |

31. एक घनाभ का आयतन एक घन के आयतन का 36 गुना है |यदि घनाभ की विमाएँ 9 सेमी, 18 सेमी और 48 सेमी हैं, तो घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए |

32. यदि त्रिज्या' r 'की एक ठोस गोलाकार स्टील की गेंद को चाँदी की पोलिश की जाती है और इसे चार बराबर टुकड़ों में काटा जाता है तो

    (i) प्रत्येक टुकड़े के'बिना पोलिश वाले भाग' का क्षेत्रफल बताइए |

(ii) प्रत्येक टुकड़े के'पोलिश किये भाग' के क्षेत्रफल और' बिना पोलिश वाले भाग' के क्षेत्रफल का अनुपात बताइए |

33. यदि एक लम्ब वृत्ताकार बेलन की ऊँचाई को 6 गुना किया जाता है और उसके आधार के क्षेत्रफल को $\frac{1}{9}$ गुना किया जाता है, तो बेलन के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितने गुना वृद्धि/कमी होगी ?

34. तीन समान घनों को एक पंक्ति में साथ - साथ जोड़ कर रखा गया है |नए घनाभ के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल और तीनों घनों के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफलों के योग का अनुपात बताइए |

35. 2.2 घन डेसीमीटर तांबे से 0.5 सेमी व्यास की बेलनाकार तार बनाई गई हो तो तार की लंबाई मीटर में बताइए |

36. 15 सेमी त्रिज्या वाले एक धातु के ठोस गोले को पिघलाया जाता है और 10 मिमी व्यास वाले छोटे - छोटे ठोस धातु के गोले बनाए जाते हैं | इस प्रकार बनाए गए छोटे ठोस धातु के गोलों की संख्या बताइए |

37. एक धातु से बने लम्ब वृत्ताकार बेलन की त्रिज्या 3 सेमी है और इसकी ऊँचाई 5 सेमी है | इसको पिघलाकर 1 सेमी ऊँचाई और 1 मिमी त्रिज्या वाले छोटे-छोटे शंकु बनाये जाते हैं | इस तरह प्राप्त कुल शंकुओं की संख्या बताइए |

38. यदि 27π घन सेमी के आयतन का ठोस शंकु एक खोखले बेलन के अन्दर रखा जाता है जिसकी त्रिज्या और ऊँचाई शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई के बराबर है तो बेलन में बची खाली जगह को भरने के लिए आवश्यक पानी की मात्रा बताइए |

39. एक शंकु के आकार की शीशी पानी से भरी है ,जिसके आधार की त्रिज्या' r ' और ऊँचाई 'h' है| इस पानी को एक बेलनाकार शीशी में डाला जाता है जिसकी त्रिज्या 'mr' है| बेलनाकार शीशी में पानी की ऊँचाई बताइए |

40. स्टील के एक तार को जब वर्ग के आकार में मोड़ा जाता है तो इसके द्वारा आन्तरित क्षेत्रफल 121 वर्ग सेमी है| यदि इस तार को वृत्त के रूप में मोड़ा जाए तो वृत्त का क्षेत्रफल बताइए |

41. यदि एक गोले की त्रिज्या 2 सेमी बढ़ जाती है तो इसका कुल क्षेत्रफल 352 वर्ग सेमी बढ़ जाता है| परिवर्तन से पहले गोले की त्रिज्या बताइए |

42. यदि एक वृत्त का परिमाप एक वर्ग के परिमाप के बराबर है, तो इनके क्षेत्रफलों का अनुपात बताइए |

43. यदि घन का आयतन 3375 घन मीटर है, तो उसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए |

44. आधार व्यास 1.5 सेमी और ऊँचाई 0.2 सेमी वाली धातु की वृत्ताकार चकतियों(discs) की संख्या बताइए जिनको पिघलाकर 10 सेमी ऊँचाई और 4.5 सेमी व्यास का एक ठोस लम्ब वृत्तीय बेलन बनाया जा सके |

45. दो घनों, जिनके प्रत्येक का किनारा $2l$ है, के संलग्न फलकों को मिलाकर एक घनाभ बनाया जाता है | घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए |

46. यदि 3 सेमी ऊँचाई वाले शंकु का अर्ध-उर्ध्वाधर कोण 60° है तो

i) शंकु का व्यास बताइए |

ii) शंकु की तिर्यक ऊँचाई बताइए |

iii) शंकु का आयतन (π के रूप में) बताइए |

47. यदि एक घनाभ के तीन आसन्न फलकों का क्षेत्रफल क्रमशः 36 वर्ग मीटर , 27वर्ग मीटर और 12 वर्ग मीटर है , तो घनाभ का आयतन बताइए ।

48. एक शंकु ,अर्ध गोला और बेलन समान आधार और समान ऊँचाई के हैं ।

i. उनके वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात बताइए ।

ii. उनके आयतनों का अनुपात बताइए ।

49. एक लम्ब वृत्ताकार बेलन और एक शंकु के आधारों की त्रिज्याएँ $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ के अनुपात में है और उनकी ऊँचाई $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ के अनुपात में है । उनके आयतनों का अनुपात बताइए ।

50. एक ठोस गोलाकार गेंद, जिसकी त्रिज्या 3 सेमी है, को पिघलाकर तीन ठोस गोलाकार गेंद बनाई जाती हैं । यदि उनमें से दो गेंदों की त्रिज्याएँ 1.5 सेमी और 2 सेमी है तो तीसरी गेंद की त्रिज्या बताइए ।

उत्तर

प्र. सं.	उत्तर	प्र. सं.	उत्तर
1	144 वर्ग मी	26	100000
2	125%	27	15.4 किग्रा
3	$18a^2$ वर्ग इकाई	28	7200 वर्ग सेमी
4	1,35,000 लीटर	29	$8\pi r^2$ वर्ग सेमी
5	12.5% की कमी	30	5368 ग्रा or 5.368 किग्रा
6	12 सेमी	31	216 वर्ग सेमी
7	147π घन सेमी	32	(i) πr^2 (ii) 1:1
8	144π घन सेमी	33	वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल दोगुना हो जायेगा
9	800%	34	7:9
10	i) 1,188 वर्ग सेमी ii) 3,080 घन सेमी	35	112 मी
11	25:64	36	27000
12	64:27	37	13500
13	38400 वर्ग सेमी	38	54π घन सेमी
14	$2\sqrt{13}$ सेमी	39	$\left(\frac{h}{3m^2}\right)$
15	$55\frac{5}{9}\%$	40	154 वर्ग सेमी
16	8000	41	6 सेमी
17	24 सेमी	42	14:11
18	64	43	1350 वर्ग मी
19	486 वर्ग सेमी	44	450
20	3	45	$40l^2$
21	243 मी	46	(i) $6\sqrt{3}$ सेमी (ii) 6 सेमी (iii) 27π घन सेमी
22	96 वर्ग सेमी	47	108 घन मी
23	9:8	48	(i) $1:\sqrt{2}:\sqrt{2}$ (ii) 1:2:3
24	$n=\frac{4}{3}$	49	$3\sqrt{3}:\sqrt{2}$
25	2 सेमी	50	2.5 सेमी [संकेत : $1.5^3 + 2^3 + 2.5^3 = 3^3$]

अध्याय-12

सांख्यिकी

याद रखने योग्य बिंदु

- **माध्य :**

अवर्गीकृत आंकड़ों का माध्य : $\bar{x} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{कुल प्रेक्षणों की संख्या}}$

वर्गीकृत आंकड़ों का माध्य :

(i) **प्रत्यक्ष विधि :** $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

(ii) **कल्पित माध्य विधि :** $\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$, **जहाँ** $A =$ **कल्पित माध्य**, $d_i = x_i - A$

(iii) **पग विचलन विधि :** $\bar{x} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$ **जहाँ** $A =$ **कल्पित माध्य,**

$u_i = \frac{x_i - A}{h}$, h = **वर्ग माप**

- **बहुलक :**

अवर्गीकृत आंकड़ों का बहुलक = सबसे अधिक बारंबारता वाला प्रेक्षण

वर्गीकृत आंकड़ों का बहुलक $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_1}\right) \times h$

जहाँ $l =$ **बहुलक वर्ग की निम्न सीमा**

$f_1 =$ **बहुलक वर्ग की बारंबारता**

$f_0 =$ **बहुलक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की बारंबारता**

$f_2 =$ **बहुलक वर्ग से ठीक अगले वर्ग की बारंबारता**

$h =$ **बहुलक वर्ग की वर्ग माप**

- **माध्यक :**

अवर्गीकृत आंकड़ों का माध्यक: माना n आंकड़ें है। आंकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में लिखें।

यदि n विषम संख्या है तो माध्यक $= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{वा}}$ **प्रेक्षण,**

यदि n सम संख्या है तो माध्यक $= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{वा}} \text{प्रेक्षण} + \left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{वा}} \text{प्रेक्षण}}{2}$

वर्गीकृत आंकड़ों का माध्यक $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

जहाँ l = **माध्यक वर्ग की निम्न सीमा**

cf = **माध्यक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता**

f = **माध्यक वर्ग की बारंबारता**

h = **वर्ग माप**

n = **प्रेक्षणों की संख्या**

- **आनुभाविक सम्बन्ध :**

बहुलक = 3 माध्यक − 2 माध्य

प्रश्नावली

1. **यदि x, x+2, x+4, x+6, x+8 का माध्य 14 है, तो प्रथम 4 आंकड़ों का माध्य बताइए।**

2. **मिशिका ने तीन गणित की परीक्षाओं में 79, 94 तथा 87 अंक अर्जित किए। बताइए अपने परीक्षणों पर औसत 89 अंक प्राप्त करने के लिए उसे अपनी चौथी परीक्षा में कितने अंक अर्जित करने की आवश्यकता है?**

3. **x का मान बताइए यदि निम्न बारंबारता सारणी का माध्य भार 58.5 किलोग्राम है:**

भार (किग्रा में)	50	55	60	x +12.5	70
व्यक्तियों की संख्या	1	4	2	2	1

4. p का मान बताइए यदि निम्न बारंबारता सारणी का माध्य 20 है:

x_i	10	15	p	25	35
f_i	3	10	30	7	5

5. 15 छात्रों के वजन (किलोग्राम में) इस प्रकार हैं :

33, 27, 34, 37, 23, 31, 42, 44, 35, 38, 45, 40, 48, 39, 41

यदि 45 किलोग्राम भार को 54 किलोग्राम भार से और 31 किलोग्राम भार को 21 किलोग्राम भार से बदल दिया जाए, तो नया माध्यक बताइए |

6. दो वितरण M और N जिनके प्रेक्षणों की कुल संख्या क्रमशः 25 और 75 है तथा माध्य क्रमशः 3 और 4 है को मिला दिया जाता है | इस प्रकार प्राप्त वितरण का माध्य बताइए |

7. निम्न आंकड़ों का माध्यक बताइए यदि माध्य 4.5 है:

5, 7, 7, 8, x, 5, 4, 3, 1, 2

8. x का मान बताइए यदि दिए गए आंकड़ों का माध्यक 9 है($x > 0$):

$$\frac{x}{7}, \quad \frac{x}{6}, \quad \frac{x}{5}, \quad \frac{x}{3}, \quad \frac{x}{2}, \quad x, \quad \frac{x}{4}$$

9. निम्न आंकड़ों के लिए माध्यक वर्ग की उपरि सीमा बताइए:

वर्ग	0 – 5	6–11	12 –17	18 – 23	24 – 29
बारम्बारता	13	10	15	8	11

10. यदि 3, 7, 5 और x का माध्य 5 है तथा 12, 7, 6, x और y का माध्य 10 है, तो y का मान बताइए |

11. यदि किसी वितरण का माध्य 169 और बहुलक 175 है, तो उस वितरण का माध्यक बताइए |

12. 42 के सभी गुणनखंडों का माध्य बताइए |

13. यदि प्रथम n प्राकृत संख्याओं का माध्य $\frac{5n}{9}$ है, तो n का मान बताइए |

14. गुड्डू पोल वॉल्टिंग प्रतियोगिता के लिए वार्षिक एथलेटिक मीट में अभ्यास कर रहा था| उसने निम्नलिखित ऊँचाइयों के वॉल्ट बनाए:

3.4 मी. , 3.5 मी. , 3.4 मी. , 3.5 मी. , 3.8 मी. , 3.5 मी. , 3.4 मी.

माध्य ऊँचाई बताइए |

15. निम्न आंकड़ों के माध्यक और माध्य का अंतर बताइए:

17, 19, 20, 22, 23, 25

16. यदि किसी शहर में किसी सप्ताह के 7 दिनों में वर्षा(मिमी. में) इस प्रकार दर्ज की गई है:

दिन	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	वीरवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
वर्षा(मिमी.में)	0.6	9.1	6.5	0.9	11.5	7.9	2.0

(i) माध्य वर्षा बताइए |

(ii) परिसर बताइए |

(iii) औसत से अधिक वर्षा वाले दिनों की संख्या बताइए |

17. यदि $\sum f_i = 15, \sum f_i x_i = 3p + 36$, तथा वितरण का माध्य 4 हो तो p का मान बताइए |

18. 300 संख्याओं का माध्य 50 है |बाद में यह पता चलता है कि दो संख्याओं को 76 और 62 की जगह गलती से क्रमशः 67 और 26 पढ़ा गया| सही माध्य बताइए |

19. निम्नलिखित सारणी के लिए माध्यक वर्ग की उपरि सीमा तथा बहुलक वर्ग की निम्न सीमा का योगफल बताइए:

वर्ग	65–85	85–105	105–125	125–145	145–165	165–185	185–205
बारंबारता	4	5	13	20	14	7	4

20. यदि वर्गीकृत आंकड़ों के किसी वर्ग का वर्ग चिन्ह m है तथा उस वर्ग की उपरि सीमा l है, तो उस वर्ग की निम्न सीमा बताइए |

21. तीन संख्याओं p, q और r का माध्य 9 है तथा पाँच संख्याओं p, q, r, s और t का माध्य 14 है |s और t का माध्य बताइए |

22. यदि किसी वर्गीकृत आंकड़ों के प्रत्येक 5 वर्गों की वर्ग माप 5 है तथा निम्नतम वर्ग की उपरि वर्ग सीमा 10 है, तो उच्चतम वर्ग की उपरि वर्ग सीमा बताइए |

23. एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी में

$\sum f_i u_i = 27, \sum f_i = 30$ और $u_i = \frac{x_i - 25}{10}$ हो तो माध्य बताइए |

24. 5 संख्याओं का माध्य 30 है| यदि एक संख्या निकाल दी जाती है तो शेष संख्याओं का माध्य 28 है| निकाली गई संख्या बताइए |

25. 10 सदस्यों के एक समूह की माध्य मासिक आय ₹1445 है | एक और सदस्य जिसकी मासिक आय ₹1500 है , समूह में शामिल हो जाता है| 11 सदस्यों के समूह की माध्य मासिक आय बताइए |

26. यदि $x_1, x_2, \ldots, x_n$ का माध्य $\bar{x}$ है तथा $a \neq 0$ तो $ax_2, \ldots, ax_n, \frac{x_1}{a}, \frac{x_1}{a}, \ldots, \frac{x_n}{a}$ का माध्य बताइए |

27. 25 आंकड़ों का माध्य 36 है| इनमें से यदि प्रथम 13 आंकड़ों का माध्य 32 है तथा अंतिम 13 आंकड़ों का माध्य 40 है तो 13वां आंकड़ा बताइए |

28. दिए गए आंकड़ों का माध्य बताइए:

$x-5,\ 2x+5,\ x+3,\ 3x+7,\ 2x+1,\ 2x+9,\ 3x+8$

29. यदि $x, x+3, x+5, x+7, x+10$ का माध्य 9 है, तो अंतिम तीन आंकड़ों का माध्य बताइए |

30. एक फैक्टरी में 5 कर्मचारियों की एक दिन की मजदूरी क्रमशः ₹ 400, ₹500, ₹420, ₹ 350 और ₹ 300 है| यदि प्रत्येक कर्मचारी की मजदूरी ₹ 50बढ़ा दी जाए तो नयी माध्य मजदूरी बताइए |

31. यदि 50 संख्याएँ हैं और प्रत्येक संख्या को 53 में से घटाने पर प्राप्त संख्याओं का माध्य -3.5 है, तो शुरू में दी गई संख्याओं का माध्य बताइए |

32. निम्न दिए गए आंकड़ों का बहुलक 48 हो तो $2x+8$ का मान बताइए:

36, 42, 48, 53, 36, 48, $x+2$, 50, 42

33. प्रथम 10 भाज्य संख्याओं का माध्य बताइए |

34. निम्नलिखित आंकड़ों में माध्यक वर्ग की निम्न सीमा तथा बहुलक वर्ग की उपरि सीमा का गुणनफल बताइए:

वर्ग	0 – 5	5–10	10 – 15	15 – 20	20 – 25
बारंबारता	10	15	12	20	9

35. यदि किन्हीं आंकड़ों के बहुलक और माध्यक का अंतर 24 है तो माध्यक तथा माध्य का अंतर बताइए |

36. 100 प्रेक्षणों का माध्य और माध्यक क्रमशः 50 और 52 है| सबसे बड़े प्रेक्षण का मान 100 है| बाद में पता चलता है कि यह 100 नहीं 120 है| सही माध्य और माध्यक का योग बताइए |

37. निम्नलिखित आंकड़ों के लिए बहुलक वर्ग बताइए:

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	3
20 से कम	12
30 से कम	27
40 से कम	57
50 से कम	75
60 से कम	80

38. Z का मान बताइए यदि निम्नलिखित आंकड़ों का बहुलक 55 है:

वर्ग	0 – 15	15–30	30 –45	45 – 60	60 – 75	75–90
बारंबारता	10	7	Z	15	10	12

39. 7 संख्याओं का माध्य 24 है| उनमें पहली 4 संख्याओं का माध्य 23 है और अंतिम 4 संख्याओं का माध्य 25.5 है, तो चौथी संख्या बताइए |

40. 108 के सभी गुणनखंडों का माध्यक बताइए |

उत्तर

प्र. सं.	उत्तर	प्र. सं.	उत्तर
1	13	21	21.5
2	96	22	30
3	50	23	34
4	19	24	38
5	38 किलोग्राम	25	₹1450
6	3.75	26	$\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{\overline{x}}{2}$
7	4.5	27	36
8	36	28	2x + 4
9	17.5	29	$11\frac{1}{3}$
10	y = 20	30	₹444
11	171	31	56.5
12	12	32	100
13	9	33	11.2
14	3.5 मी	34	200
15	0	35	12
16	(i) 5.5मिमी (ii) 10.9मिमी (iii) 4 दिन	36	102.2
17	8	37	30 – 40
18	50.15	38	5
19	270	39	26
20	2m – l	40	10.5

अध्याय-13

प्रायिकता

याद रखने योग्य बिंदु

- किसी घटना की प्रायिकता , $P(E) = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के सभी सम्भव परिणामों की संख्या}}$.
- किसी भी घटना की प्रायिकता $0 \leq P(E) \leq 1$ होती है |
- P (असंभव घटना) = 0
- P (निश्चित घटना) = 1
- किसी घटना E के लिए , P(E) + P(E नहीं) = 1 या $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

प्रश्नावली

1. नीचे दी गई तालिका एक कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा 100 में से प्राप्त अंकों को दर्शाती है:

अंक	0 – 20	20–40	40 –60	60 – 80	80 से अधिक
बारंबारता	8	16	40	10	6

कक्षा के एक विद्यार्थी को यादृच्छया चुना जाता है| प्रायिकता बताइए कि उसे

(i) 40 अंक से कम अंक प्राप्त हों |

(ii) 60 % या उससे अधिक अंक प्राप्त हों |

2. 400 अण्डों के एक संग्रह में से एक ख़राब अंडा प्राप्त करने की प्रायिकता 0.055 है| इस संग्रह में ख़राब अण्डों की संख्या बताइए |

3. एक लीप वर्ष में 2024 में 53 रविवार या 53 सोमवार आने की प्रायिकता बताइए |

4. एक बक्से में 2 से 19 तक लिखी संख्याओं के कार्ड हैं | इस बॉक्स में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला जाता है| इसकी प्रायिकता बताइए कि निकाले गए कार्ड पर एक अभाज्य संख्या हो |

5. 900 सेबों के एक ढेर में से यादृच्छया एक सेब चुनने पर सड़े हुए सेब के निकलने की प्रायिकता 0.18 है| ढेर में ताजे सेबों की संख्या बताइए |

6. 2 और 100 के बीच एक पूर्ण वर्ग संख्या चुनने की प्रायिकता बताइए |

7. एक बक्से में कुछ कार्ड हैं जिन पर क्रमशः संख्याएँ 1, 2 ,3, ..., 17 अंकित है | बाक्स में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला जाता है| प्रायिकता बताइए कि कार्ड पर आने वाली संख्या

(i) एक अभाज्य संख्या है |

(ii) एक विषम संख्या है |

(iii) 3 से विभाजित होती है |

(iv) 3 और 2 दोनों से विभाजित होती है |

8. एक बक्से में कुछ कार्ड हैं , जिन पर 3 से 101 तक की संख्याएँ अंकित है | एक व्यक्ति इस बक्से में से एक कार्ड यादृच्छया निकालता है |इसकी प्रायिकता बताइए कि निकाले गए कार्ड पर एक पूर्ण वर्ग संख्या या पूर्ण घन संख्या हो |

9. 52 पत्तों वाली ताश की एक गड्डी में से' सभी काले चित्र पत्ते 'निकाल दिए जाते हैं | शेष पत्तों में से एक पत्ता निकाला जाता है, प्रायिकता बताइए कि निकाला गया पत्ता

(i) एक चित्र पत्ता होगा |

(ii) एक लाल पत्ता होगा |

(iii) एक काला पत्ता होगा |

10. प्रायिकता बताइए कि एक वर्ष जो लीप वर्ष है, उसमें 53 रविवार तथा 53 सोमवार हों |

11. 0 और 100 के बीच से एक पूर्णांक चुना जाता है| इसकी प्रायिकता बताइए कि चुनी गई संख्या

(i) 7 से विभाज्य हो |

(ii) 7 से विभाज्य न हो |

12. एक बक्से में कुछ कार्ड हैं जिन पर संख्याएँ 1, 3, 5, ...,49 अंकित हैं | बक्से में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला जाता है| प्रायिकता बताइए कि कार्ड पर आने वाली संख्या

i) 3 से विभाजित होती है |

ii) एक भाज्य संख्या है |

iii) पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है |

iv) 3 और 5 का गुणज है |

13. दो अंकीय संख्याओं में से एक संख्या यादृच्छया चुनी गई | प्रायिकता बताइए कि चुनी गई संख्या 5 या 7 की गुणज हो |

14. ताश की एक सामान्य गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है| इसकी प्रायिकता बताइए कि निकाले गए पत्ते पर प्राप्त संख्या 3 से बड़ी हो तथा 10 से छोटी हो|

15. एक बॉक्स में कुछ कार्ड हैं जिन पर संख्याएँ 3, 5, 7, 9,..., 35, 37 अंकित है | बॉक्स में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला जाता है | प्रायिकता बताइए कि निकाले गए कार्ड पर एक अभाज्य संख्या हो |

16. तीन पासों को एक साथ उछालने पर प्राप्त संख्याओं का योगफल 5 होने की प्रायिकता बताइए |

17. एक थैले में कुछ लाल, नीली और नारंगी गेंदें हैं| इस थैले में से एक लाल गेंद और एक नीली गेंद निकालने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{3}$ है |यदि थैले में कुल 10 नारंगी गेंद हैं, तो कुल गेंदों की संख्या बताइए |

18. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है| इसकी प्रायिकता बताइए कि दोनों पासों पर आयी संख्याओं का योगफल एक अभाज्य संख्या हो |

19. एक मर्तबान में 54 कंचे हैं जिनमें से कुछ नीले, कुछ लाल और शेष पीले है | मर्तबान में से एक कंचा निकालने पर उसके नीले और पीले होने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{5}{9}$ है |मर्तबान में लाल कंचो की संख्या बताइए |

20. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है| एक पासे पर 2 का गुणज तथा दूसरे पासे पर 3 का गुणज आने की प्रायिकता बताइए |

21. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है| इसकी प्रायिकता बताइए कि दोनों पासो पर आयी संख्याओं का गुणनफल एक पूर्ण वर्ग संख्या हो |

22. एक थैले में 100 कार्ड हैं जिनपर 1 से 100 तक की संख्याएँ अंकित हैं | थैले में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला जाता है| इसकी प्रायिकता बताइए कि निकाले गए कार्ड पर जो संख्या है, वह 9 से विभाज्य हो तथा पूर्ण वर्ग हो |

23. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है| कम से कम एक 3 आने कि प्रायिकता बताइए |

24. 52 पत्तों की ताश की एक गड्डी में से सभी बादशाह, बेगम और इक्के निकाल दिए जाते है| शेष पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है |प्रायिकता बताइए कि निकाला गया पत्ता एक

(i) काला चित्र पत्ता हो |

(ii) लाल पत्ता हो |

25. किसी खेल को हारने की प्रायिकता 0.029 हो, तो उस खेल को जीतने की प्रायिकता बताइए |

26. 1000 छोटे रंगीन बल्बों में से, 9^3 सफ़ेद रंग के है, 5^3 लाल रंग के है, 2^6 हरे रंग के है तथा शेष नीले रंग के है |एक बल्ब को चयनित करने पर उसके नीले रंग के होने की प्रायिकता बताइए |

27. ताश की एक सामान्य गड्डी में से एक पत्ता खींचा जाता है | प्रायिकता बताइए कि खींचा गया पत्ता:

(i) राजा या रानी हो |

(ii) लाल रंग का चित्र पत्ता हो |

(iii) न राजा हो न रानी हो |

(iv) या तो लाल रंग का हो या काले रंग का चित्र पत्ता हो |

(v) राजा न हो |

28. एक थैले में कुछ पर्चियां हैं जिन पर 3 और 32 के बीच की सभी प्राकृत संख्याएँ अंकित है | एक पर्ची यादृच्छया थैले में से निकाली जाती है | पर्ची पर 4 के गुणज होने की प्रायिकता बताइए |

29. एक थैले में 12 गेंद है जिनमें से 'x' गेंद सफेद हैं:

(i) यदि थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है,तो उसके सफ़ेद होने की प्रायिकता बताइए |

(ii) यदि थैले में 6 सफ़ेद गेंद और डाल दी जाती है, तो सफ़ेद गेंद को निकालने की प्रायिकता पहले से दोगुनी हो जाती है |x का मान बताइए |

30. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है | प्रायिकता बताइए कि दोनों पासों पर आयी संख्याओं का गुणनफल 12 हो |

31. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है | प्रायिकता बताइए कि दोनों पासों पर आयी संख्याओं का गुणनफल 16 से कम हो |

32. संख्याओं 1, 4, 9, 16, 25 में से एक संख्या 'x' यादृच्छया चुनी जाती है और फिर संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5 में से दूसरी संख्या 'y' यादृच्छया चुनी जाती है | इसकी प्रायिकता बताइए कि 'xy' का मान 25 से अधिक हो |

33. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है| प्रायिकता बताइए कि

i) दोनों पासों में से किसी भी पासे पर 5 ना आये |

ii) कम से कम एक पासे पर 5 आये |

iii) दोनों पासों पर 5 आये |

34. एक थैले में 6 लाल गेंद और कुछ सफ़ेद गेंद है | यदि थैले में से एक सफ़ेद गेंद निकालने की प्रायिकता एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता की दोगुनी है, तो थैले में सफ़ेद गेंदों की संख्या बताइए |

35. एक सिक्के को तीन बार उछालने पर एक चित या दो चित आने की प्रायिकता बताइए |

36. ताश की अच्छे से फेंटी गई सामान्य गड्डी में से एक सम संख्या वाला पत्ता निकालने की प्रायिकता बताइए |

37. किसी परिवार में तीन बच्चे हैं | उनमें से अधिकतम एक लड़की के होने की प्रायिकता बताइए |

38. ताश की अच्छे से फेंटी गई एक सामान्य गड्डी में से एक पत्ता खींचा जाता है | एक व्यक्ति यह शर्त लगाता है कि यह पान का पत्ता या इक्का है | उसके शर्त जीतने की प्रायिकता बताइए |

39. कोमल और अमित एक खेल खेल रहे थे | कोमल एक पासा फेंकती है और प्राप्त संख्या का वर्ग करती है | अमित दो पासों को एक साथ फेंकता है और प्राप्त संख्याओं का गुणनफल निकालता है | दोनों के 25 प्राप्त करने की प्रायिकता का अंतर बताइए |

40. 3, 5, 5, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9 में से एक संख्या यादृच्छया चुनी जाती है | इसकी प्रायिकता बताइए की चुनी गई संख्या दी गई संख्याओं का औसत हो |

उत्तर

प्र. सं.	उत्तर	प्र. सं.	उत्तर
1	(i) $\frac{3}{10}$ (ii) $\frac{1}{5}$	21	$\frac{2}{9}$
2	22	22	$\frac{3}{100}$
3	$\frac{3}{7}$	23	$\frac{11}{36}$
4	$\frac{4}{9}$	24	(i) $\frac{1}{20}$ (ii) $\frac{1}{2}$
5	738	25	0.971
6	$\frac{8}{97}$	26	$\frac{41}{500}$
7	(i) $\frac{7}{17}$ (ii) $\frac{9}{17}$ (iii) $\frac{5}{17}$ (iv) $\frac{2}{17}$	27	(i) $\frac{2}{13}$ (ii) $\frac{3}{26}$ (iii) $\frac{11}{13}$ (iv) $\frac{8}{13}$ (v) $\frac{12}{13}$
8	$\frac{1}{9}$	28	$\frac{1}{4}$
9	(i) $\frac{3}{23}$ (ii) $\frac{13}{23}$ (iii) $\frac{10}{23}$	29	(i) $\frac{x}{12}$ (ii) x = 3
10	$\frac{1}{7}$	30	$\frac{1}{9}$
11	(i) $\frac{14}{99}$ (ii) $\frac{85}{99}$	31	$\frac{25}{36}$
12	(i) $\frac{8}{25}$ (ii) $\frac{2}{5}$ (iii) $\frac{21}{25}$ (iv) $\frac{2}{25}$	32	$\frac{11}{25}$
13	$\frac{29}{90}$	33	(i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$ (iii) $\frac{1}{36}$
14	$\frac{6}{13}$	34	12
15	$\frac{11}{18}$	35	$\frac{3}{4}$
16	$\frac{1}{36}$	36	$\frac{5}{13}$
17	24	37	$\frac{1}{2}$
18	$\frac{5}{12}$	38	$\frac{9}{13}$
19	6	39	$\frac{5}{36}$
20	$\frac{11}{36}$	40	$\frac{3}{10}$

MENTAL MATHS

शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली सरकार, दिल्ली

पढ़े चलो बढ़े चलो